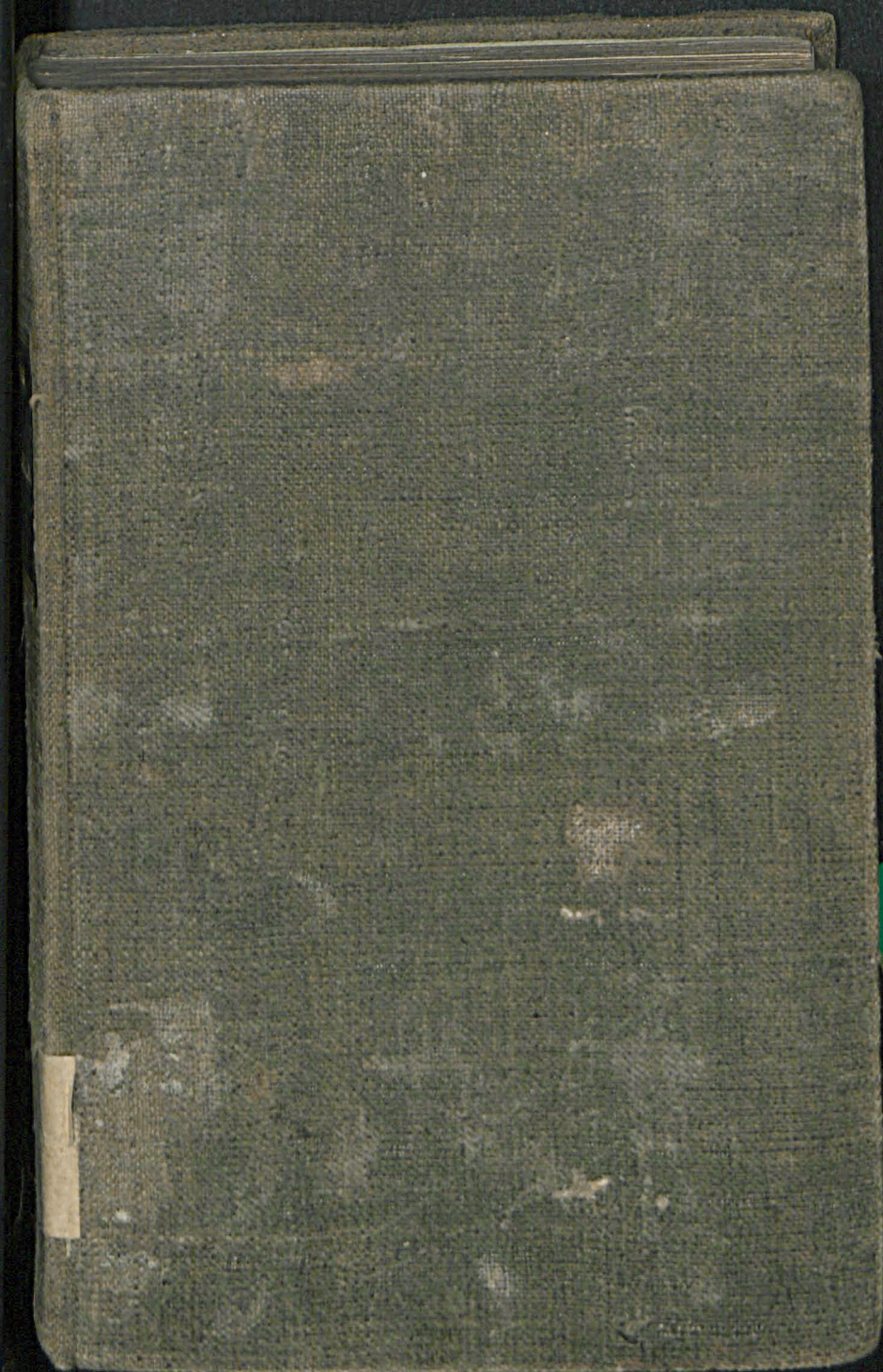




GNOMONIKA +

UWAŻANA

JAKO WSTĘP DO ASTRONOMII

z zastosowaniem Rozbioru i objaśnieniem
na przykładach oyczystych

z przedmową

JÓZEFA ŁĘSKIEGO

Professora Astronomii w Uniwersytecie

Jagiellońskim;

napisana przez

PAWŁA KRZYŻANOWSKIEGO.

„Unius ætatis sunt quæ fortiter fiunt, quæ
„vero pro utilitate Reipublicæ servatur
„æterna sunt.

Flavius Vegetius.

z trzema Rycinami.

z Biblioteki Szkoły Białskiej
—○○○○○—

W KRAKOWIE R. 1820.

W Drukarni Akademickiej.

Nakładem Autora.



472
Znak. *472*
M. inw. *5860*

4517
54

434

Jaśnie Wielmożnemu
H R A B I
STANISŁAWOWI
WODZICKIEMU

SENATOROWI, KASZTELANOWI KRÓLESTWA
POLSKIEGO, PREZESOWI SENATU RZECZYPOSPOL-
ITEY KRAKOWSKIEY, PREZESOWI NAYWYŻ-
SZEY RADY UNIWERSYTETU JAGIELŃSKIEGO
I TOWARZYSTWA ROLNICZEGO W KRAKOWIE;
WIELU TOWARZYSTW UCZONYCH CZŁONKOWI.

KAWALEROWI ORDERU S. STANISŁAWA

I. KLASY.

etc. etc. etc.



Jaśnie Wielmożny Panie!



*P*osiada już Kraków w swym
obwodzie drogę zesztých Przodków
zabytki; niemniéy szanownemi mu
są żyjących wzory. Znane są Pu-
bliczności Jaśnie Wielmożnego
Pana obywatelskie cnoty i uczone
prace (*) obok publicznych tru-
dów podejmowane. Te więc stu-
żony

(*) O chodowaniu, użytku, mnożeniu i
poznawaniu drzew, krzewów, roślin,
ziół celniejszych. w Krakowie Tomów
3. in 8vo 1820.

żyły mi za wskazówkę wytrwałości w uskutecznieniu pierwszego mego przedsięwzięcia, które iako owoc Twego przykładu i zachęty ośmiela CI ofiarować.

Naynijszy sługa

Paweł Krzyżanowski.

TREŚĆ MATERYL.

	Karta.
Przedmowa Professora Astronomii	1
1. <i>Gnomonika trygonometryczna.</i>	
Wyobrażenia wstępne	13
Robienie wszelkiego rodzaju kompasów	26
Rozwiązanie ogólne za pomocą Trygonometrii kulistey	33
Rozwiązanie rysunkowe ogólnego zadania Gnomoniki	40
Południk średniego czasu	41
Droga cienia	43
Nowsze rozwiązanie rozbiorowe	45
II. <i>Nayglówniejsze zasady geometryi rozbiorowey</i>	46
Rozwiązanie równoległościanu prost:	47
Zadania Geometryi rozbiorowey i wykreslny	56
Analemma	93
Zamiana współrzędnych	97
Równanie powierzchni ostrokregu prostego	107
Powierzchnie obrotowe walcowe	115
Powierzchnie obrotowe ostrokregowe	119
Rozbiór wyższy	121
Różniczkowanie wielkości algebraicz:	125
Różniczki ciągłe	127
Twierdzenie Maclaurina	128
Różniczkowanie wielkości przestępn:	129
Twierdzenie Taylora	139
Zastosowanie rachunku różniczkowego i sposób stycznych	148
Asymptoty krzywych	152
O naywiększościach i naymniejszościach	153

Promień

	<i>Karta.</i>
Promień zakrzywienia	159
Rachunek Integralny	163
Rachunek odmian	173

Przypisy.

Do teoryi zamiany współrzędnych	178
Rozbiór równania trzeciego stopnia o trzech zmiennych	180
Do powierzchni obrotowych	182
O planach stycznych do krzywych dru- giego rzędu i onych normal: 191	
Rozwinięcie równania krzywey linii za pomocą rachunku Infinite- zimalnego	196
Zasada najmniejszych kwadratów	199
O rzutach ortograficznych i stereo- graficznych	204
Perspektywa malarska	207
Wyznaczenie płaszczyzny południkowey	210
II. Gnomonika rozbiorowa	221
III. Gnomonika praktyczna i wykreślna	242
Kompasy kuliste	250
— walcowe	252
— księżycowe	255
— gwiazdowe	257
Ogólne uwagi	259

PRZEDMOWA.

Jednëm z nayożyteczniëyszych zastosowań Astronomii dla społeczności iest nauka miary czasu. Narzędziami do tego zamiaru służącemi są zegary. Bieg tych urządzeń się podług ciał nieba. — Potrzebną więc tu iest wiadomość związku, iaki zachodzi między naszą ziemią i ciałami niebieskiemi.

Między temi mają gwiazdy stałe bieg pozorny nayiednostayniëyszy; czyli raczë takim iest rzeczywisty bieg wirowy ziemi odpowiadający pozornemu biegowi gwiazd we 24. godzinach. Tych 86400 częśćka czyli sekunda gwiazdowa iest więc iednostką naydoskonalszą, i żadnëy zmianie niepodlegającą miarą czasu.

Zegary astronomiczne urządzaig się w takim gwiazdowym czasie, zaczynaig

2
go liczyć od przechodu punktu równonocnego wiosiennego przez południk, co stanowi wznoszenie się proste środka nieba.

Lecz słońce udzielające światło tak istotnie potrzebne ludzkim pracom, widocznie wskazuje miarę czasu swym biegiem. — Powstało stąd najpierw używanie zegarów słonecznych czyli Kompasów. — Bieg atoli słońca nie jest foremny. — Przypuszcza się więc idealne słońce, mające iednostayny bieg przez ciąg całego roku, za pomocą którego poznać się nieregularności prawdziwego słońca. — Zegary zwyczajne mają bieg takiego średniego czasu czyli pośredniego słońca: i dosyć jest wiedzieć dla każdego dnia, o wiele w samo południe różni się czas prawdziwy od czasu średniego, czyli znać równanie czasu.

Sposoby do tego, i tabliczkę wydał już był autor w r. 1813; obszerniejszy zamiar jest niniejszego pisma jego celem.

Wiadomo Publiczności (*) że Kompas słonec.

(*) Ob. Gazetę Krak. r. 1819 nro. 45.

5
słoneczny zrobiony tu na biskupim pałacu jeszcze r. 1688. został teraz przez niego odnowionym z przydaniem południka dla średniego czasu. Podobneż Kompasów foremne znajdują się na tutejszem Obserwatorium. — Są one wzięte z wzorowych Paryżkich wykreślonych na pałacu składu wojennego, na bramie szkoły polytechnicznej i po innych miastach stołecznych, używanych. (*)

Prócz pożytku dla Publiczności, przez wyiednanie iły wygodnego regulowania zegarów, łączą takowe kompasów wiele korzyści i w naukowym względzie, przez okazanie nieiako w treści i zmysłowym sposobem zasad teoryi słońca. — Dokładnie wywodzi się ta z rocznych Obserwacyi odprawionych doskonałemi narzędziami, iakiemi są: Zegar astronomiczny, Luneta południkowa i Kwadrans muryowy, i w protokule

(*) Piękny marmurowy poziomy Kompas z południkiem dla średniego czasu wdziałem w Swoycznach przy Krakowie. Podobneż są tu także do Lwowa zamówione.

4
tokule astronomicznym zachowanych. — Tu jest mowa o przybliżonych datach, z których się też teoria wywodzi; to jest o kierunku i długości cieniów rzucanych w ciągu rocznym na płaszczyznę iakgkolwiek.

Podany trojaki sposób rozwiązania ważnego ogólnego zadania Gnomoniki, wystawiony oraz w treści na trzech osobnych tablicach, to jest za pomocą Trygonometrii, Geometrii rozbiorowej i wykreślnej, (*) (które przepisy gruntownie są zrozumiane, gdy im iak tu teoria rozbiorowa towarzyszy) i zgodność wypadków, przykładają się do oswoiania się z rozwiązaniami graficznymi i z nowszymi fortelami Rozbioru, któremu niniejszy stan Matematyki winien jest swój wzrost tak znakomity.

Wystawienie z tego powodu niektórych główniejszych zasad Geometrii rozbiorowej i wykreślnej, wywiedzionych z wiadomych własności Równoległościanu prostoką-

(*) Świeżym wyrokiem ministrowskim jest ta nauka na nowo do szkół we Francyi zaprowadzona.

stokątnego co do wszelkich położeń, punktów, linii, kątów i planów iego, lub przestrzeni, jest bardzo prostém, i w sprzeczności z długim rozwodzeniem się, które bardzo mordernie iak naucza. I w ogóle rozwlekłość i przesadzona gruntowność, w pierwiastkowym przynajmniej nauczaniu szkodać raczy, iak pożytkuig, przez utrudzanie pojęcia prawd przez się iasných. — Bardzo ściśle dowodzenia, w których dopiero dojrzałszy albo przeciwiony umysł smakować może, zrażają tylko i odstręczają od nauki poczynającego, co jest tém szkodliwsza, że przy obecnim wygórowaniu wychowania i nauk, już niema czasu uczyć się rzeczy łatwych, dopieroż mnię potrzebnych.

Ma to postępowanie, używane nayeściej w nowszych francuzkich płodach matematycznych swe korzyści, zwłaszcza dla umysłów już usposobionych; bo myśli niepotrzebuig być zwracane do tego co dopiero ma być wynalezioném; lecz z drugiej strony, pozbawia czytelnika, dopieroż słuchacza początkowego, wielkiej korzyści;

rzyści; gdy bowiem ten nie wie celu, do którego te wnioskiowania mają prowadzić, nie jest przeto w stanie oceniać wartości każdego kroku, a mniéj jeszcze ma powodu do zadania sobie usilności, dla odkrycia sam dowodzeń. — Nieustanne cui bono? i częste pytania się uczniów nieobojętnych na czas i na postępek, są tą niewyraźnością tłómaczenia, albo samowolnością poniskąd usprawiedliwione.

Elementa Euklidesowe niepodlegają takim zarzutom, i ze względu na korzyści pierwiastkowej nauki, to jest zaszczepienia wczesnie smaku do dokładnego, porządnego i zwięzłego myślenia, długo jeszcze utrzymywać będą swe pierwszeństwo przed ich reformatorami.

Czyste ich przełożenie jest naszego, Czecha.

Zaś między reformatorami ma zapewne niezaprzeczone pierwszeństwo P. Legendre; lecz po cóż w nim już na samym wstępie dowodzenie równości kątów prostych, mniéj potrzebne, a niasłasnością swą odrażające poczynających.

Nay-

Naypożyteczniéjszemi dziełmi elementarnymi, w umysłowym i praktycznym względzie zostaną zawsze te, w których zasady nauki są w naturalnym i ścisłym logicznym związku, i ile bydź może w krótkości rozwiniętymi.

Ograniczając się na Arytmetyce, początkach Algiebrę, iéy zastosowaniu do Geometrii rozbiorowéy i wykreślnéy, tudzież do Mechaniki, dobrém byłoby jeszcze przełożenie z francuzkiego Kursu Matematyki dla Szkół w St. Cyr, ułożonego przez Professorów Allaize, Billy, Puissant i Boudrot.

W przechodzie do wyższyć Matematyki nie widzę w tych względach lepszego dzieła nad Algiebrę J. Śniadeckiego i onéy do Geometrii zastosowania. — Dzieło to dopełnione nowemi nabytkami przez francuzkich mierników poczynionemi, utworzyćby mogło oyczystą Algiebrę, nieustępującą w swéy dobroci zagranicznym, podchlebnie zaś zalecającą się swym przymiotem narodowéy własnodzielności i oszczędzaniem wiecznego tłómaczenia rozlicznych obcych dzieł analitycznych, których stosy swym

swym widokiem samego Lagranża przerażały.

Wielce jeszcze stwierdzaia pomyślną naukę łatwe obięcie ięy całości i pamięć związku ięy zasad. — Osiągaię się te zamiary w części umieszczaniem formuł raz ściśle dowiedzionych, obok figur wyrażających rozwiązanie graficzne Zadań fundamentalnych.

Już same dokładne wykręślenia, służące nieiako za przewodnika, i daia przybliżone Kontrole rachunku, który ostatecznie, nayważniejszym iest Matematyki, a szczególniey terażnieyszey Astronomii celem.

Rachunkowem zastosowaniem do oyczystych przykładów, i wykręśleniem praktycznem różnych Kompasów (na którym wielu będzie chciało przedstawiać) zakończył autor swe pismo.

Od czasów Kopernika niewidziemy jeszcze w oyczystym ięzyku dzieła Astronomii, któreby zasady wytuszczane albo objaśniane były oyczystemi Obserwacyami, a przecież takowe dopiero zastosowania naywięcey wniecaia interessu i prak-

wa¹ i.

widziwą umysłowi iednaia rozkosz (*) — Wstępem do właściwey nauki są historyczne opisy zasad bez ich dowodów i rachunku. Wstępem do tych ostatnich, i nieiako także przygotowaniczym a przynaymniey ulacniającym onych teoryę są sposoby i przedmioty, iak obrane od naszego akademicznego ucznia. — Po takowych i tym podobnych pierwiastkowych objaśnieniach, łacnieyszymi staię się do zrozumienia rozprawy i pisma astronomiczne obce, albo w oyczystym ięzyku wydane. Podaię one powód do życzenia posiadania w nim dzieła Astronomii, któreby takiem było dla ięy obecnego stanu, iakiem było Nicolai Copernici Torinensis. De revolutionibus Orbitum coelestium Libri VI. Norimbergæ apud Joh. Petricium 1543 anno.

Myśli te ściągaię się do osobnych oddziałów nauk matematycznych, któreby kto chciał zgłębiać i onym się poświęcić.

Inne są zamiary uczenia się młodzi po

(*) Ob: Observationes bidue Cracoviae factæ, w Miscell. Krakow: i Rozniki Towarz: Krak. P. N. Rozprawa o Zaciemniach i t. d.

po szkołach. — Zdać się, że używanie Kompendyów, czyli krótkich zbiorów zasad naukowych i onych zastosowań, ułożonych jasno, w ich naturalnym i ścisłym systematycznym porządku i związku, i jakie są wprowadzone po niemieckich szkołach, jest naśladowania godnym. (*)

C'est

(*) Takimi są n. p. *Elementa Matematyki czystej i zastosowanej* P. Fiszera w dwóch małych Tomkach, których w wyższych Klasach Liceum Warszawskiego używalem.

Czemużby młodzież, wychowująca się po szkołach rolniczego Kraju nie miała w nich powziąć pierwszych wiadomości teoryi, układu, rachunku i rysunku miar, i tym podobnych przedmiotów.

Radziłbym przeto przełożyć na odczyty język wspomnianego *Elementa*, gdyby już wyszły narodowego jęzika plody; gdyby wyborne uwagi umieszczone w naukowych Pamietnikach Warszawskich; gdyby pióra Śniadeckich i Lewskich wskazywały nowych widoków i korzyści, jakie sobie i w tym względzie obiecywać można z pożytej pracy własnego rodaka.

Nadszedł czas, w którym i *Elementa* nauk nosić na sobie powinny cechę odczytów własnej działalności.

„C'est parla que l'on finira,“ było zdanie P. Biot, gdy mu wystawiał potrzebę zadania sobie pracy, połączenia w iednym dziele elementarnym, związku zasad obecnego stanu nauk matematycznych, i okazywał pierwiastkowe moje w tym względzie usilności, w wydrukowanym obrazie *Matematyki*.

Nie jest tu miejsce rozwodzenia się nad tym ważnym przedmiotem, będącym w ścisłym związku z publicznym wychowaniem, narodowością, i obecnym nauk wygórowaniem; na wzmiance o nim przestać tu muszę.

Wreszcie, gdy w chwili przywróconego światu pokoju, iedyna tylko dla młodzi otworem stoi droga do szlachetnego bytu, a tą jest honor, cnota i pożyteczne usługi społeczeństwu i naukom, życzę piszącemu szczęścia i pragnę by owoce pracy szkolnej i domowej stały mu się zachętą do dalszego naukom się poświęcania.

Drugi był wychowaniec Szkoły Głównej, Frąckiewicz napisał także *Rozprawę o Gnomonice*, w której sobie zamierzył powydobywać ogólne

ogólne téy nauki formuły własném rozmyślan-
niem.— A tak obydwie Rozprawy przez uła-
cnianie nauki i onéy zbogacanie, przynosząc
oraz zaszczyt instytutowi naukowemu w któ-
rym autorowie pierwsze swe czerpali wiado-
mości, staią się dla współuczniów godnym
naśladowania przykładem.

W Krakowie d. 1go Stycznia 1820.

Jozef Łęski,
Prof: Astron:

GNOMO-

GNOMONIKA.

Wyobrażenia wstępne.

Gnomonika jest to nauka robienia na po-
wierzchni danéy narzędzia astronomiczne-
go znanego pod nazwiskiem Kompas, za
pomocą którego mierzą się godziny i
wysokości słońca. Jest więc ta nauka nie-
iako wstępną całej Astronomii, bo ta jest
ciągłym doskonaleniem tych dwóch zadań
mierzyć czas, mierzyć wysokość.— Z wy-
sokości skazówki AB (fig. 1.) i wymie-
rzonéy długości cienia AC wynayduie się
wyniesienie słońca nad poziomem AC
formułą:

$$\text{tang } ACB = \frac{AB}{AC}$$

to jest styczna wysokości słońca nad po-
ziomem jest równa wysokości skazówki
podzielonéy przez długość iéy cienia.

Skoro

Skoro trójkąt ABC jest w płaszczyźnie południkowej, jest wysokość słońca największą, i długość skazówki jest wielkością stałą, tę wzięwszy za jedność, nazwawszy skazówkę a , zaś długość cienia b , wysokość słońca nad poziomem H

$$\text{mamy } \cotg H = \frac{b}{a}$$

dla oddalenia słońca od zenitu Z też formuła stała się

$$\text{tang } Z = \frac{b}{a} (*)$$

Jm dokładniéj będą wymierzone długości cieniów, tém dokładniészemi będą wypadki i zasady z nich wyprowadzone. Lecz cień skazówki jest zakończony półcieniem, aby mieć doskonalszą granicę, dobrze jest przymocować na wierzchołku skazówki pierścień, od którego padać będzie podłużne kółko na płaszczyźnie poziomej

(*) Wzięwszy skazówkę za jedność wyrażonąby była $\text{tang } Z$ liczbami z tablic trygonometrycznych, mogły więc pierwiastkowe obserwacje gnomonów dać powód do wynalazku linii trygonometrycznych: przypisaną ten wynalazek Arabom.

ziomej. Tego koła środek nie będzie odpowiadać środkowi słońca, szukamy więc dla niego wyrażenia (fig. 2.)

$$\begin{aligned} BE: BD &= EC: CD = \sin D: \sin E \\ \frac{EC + CD}{EC - CD} &= \frac{\sin D + \sin E}{\sin D - \sin E} = \frac{\text{tang}^2(D+E)}{\text{tang}^2(D-E)} \\ \frac{2 Cm}{ED} &= \frac{\text{tg } r}{\text{tg}^2(D+E)} = \frac{\text{tg } r}{\text{tg } H} = \text{tang } r \text{ tang } Z \\ Cm &= \frac{1}{2} \text{ Półcienia } \text{tg } r \text{ tg } Z \end{aligned}$$

w czém r znaczy pozorny promień słońca, zaś Z oddalenie zenitowe. Można z tego wyrażenia wyrugować wielkość półcienia, a wtedy stałaby się

$$Cm = a \text{ tang}^2 r \text{ Sec}^2 Z \text{ tang } Z$$

idzie tu jeszcze o wynalezienie wartości r . Uważając na upłyniony czas gwiazdowy między dotknięciem się brzegu słońca do nitki pionowej i wychodem z niej drugiego brzegu podczas górowania słońca, znajdziemy, że w dzień równonocy wio-
siennéj potrzebuje

	2 ^m 8,6	cały dzień	24 ^h 3m 36 ^s
iesiennéj	2 8,0		24 3 38
Środek $r =$	2 8,3		24 3 34

potrze-

potrzebuie więc słońce $24^h 3^m 37^s$ gwiazdowych do przeyscia 360° a ztąd

$$24^h 3^m 37^s : 360 = 2^m 8^s,3 : 2r$$

$$2r = 32' \text{ prawie}$$

jest to łuk równikowy, który zakrywa tarcza słońca, czyli jego średnica. (*)

Wygodniéj urządzony takowy gnomon wystawia nam fig. 3. (Scaphé) czółno. Używali go w tym kształcie starożytni w swych podróżach do mierzenia szerokości geograficznéj miejsc z wysokości słońca podczas równonocy.

Jakież

(*) Takimże sposobem zraydziemy, że w chwili przesilenia dnia z nocą letniego jest średnica słońca $32' 35'',6$.
zimowego $31' 30'',9$.
zaczém słońce jest w zimie bliżéj ziemi, iak w lecie; że więc ściśte biorąc, nie jest bieg roczny słońca kołem, lecz elipsą, i ziemia znajduje się w iednym z iéy ognisk.

W średniém oddaleniu wypada na średnicę słońca

$$32' 3'',1$$

Gdy słońce jest w znaku ♋ czyli w perigeum przebiega na dzień $1^\circ 1' 10'',3$

gdy jest w znaku ♎ w apogeum, przebiega na dzień $57' 11'',4$ ztém średni bieg jest $59' 10'',8$

Jakież stopniowanie w doskonaleniu aż do koła Reichenbacha! Taż sama szerokość wynalazłaby się z wysokości słońca w czasie przesilen, a z nich pochyłość ekliptyki, która była za czasów Hipparcha $23^\circ 52'$ teraz zaś jest $23^\circ 27' 45''$ i zmniejsza się corok o $0'',5$.

Zwracając się do naszego przedmiotu, zastanówmy się szczególniéj nad trójkątem ABC . Leżeć on powinien w płaszczyźnie południkowéj, ponieważ wtedy tylko słońce jest naywyżéj wyniesione, gdy do niéy dojdzie, i cień skazówki stanie się naykrótszym?

Naypierwszą jest więc rzeczą w Gnomonie wyznaczyć płaszczyznę południkową. Sposoby do tego są znaiome i podają się już w początkowéj Astronomii i miernictwie praktycznem. Jeden z dokładniejszych sposobów wynika z rozważania dwóch gwiazd na iednymże planie pionowem znajdujących się, to jest takim iaki czynią dwa zawieszone piony, gdy te gwiazdy różnią się o 180° albo o 12° w wznoszeniu się prostem (*ascensio recta*)

B

Takie-

Takiemi gwiazdami byłyby n. p. gwiazda biegunowa i końcowa Niedzwiedzia W. albo Capella i β Smoka i wiele innych. (*)

Obserwacje by też najdokładniey wykonane, nie są prawdziwemi tylko pozornymi. Dla przywiedzenia ich do prawdziwych wypadków, potrzebuja poprawek dla Refrakcyi która podwyższa punkta na niebie, i Paralaxy która one zniża. Same zaś obserwacje dokładnie się odprawiają za pomocą kwadransu astronomicznego, Lunety południkowey i zegaru astronomicznego, i te umieszczają się w protokołach pod osobnemi rubrykami iako to:

Czas Obserwacji.	Oddalenie zenitowe	Pozorny Promień	Zbaczanie	Czas upłynięty między górowaniem i α Lyae.
	☉	☉	☉	

Przy-

(*) Obacz obraz Konstellacyi u Maja i Mateckiego.

Przybliżone wypadki do tych które się z takowych rubryk wyprowadzają, wystawione są zmysłowem sposobem na fig 4. mianowicie zważając na kierunek i długość cieniów przez ciąg całego roku mierząc odcinki i przystawy, czyli współrzędne linii krzywey poprowadzoney przez końce cieniów odkrylibyśmy naturę téż krzywey. Lecz z prostego przypuszczenia sprawdzonego i innemi dowodami przekonywamy się że taż krzywa jest Hyperbolą.

Jakoż linia prowadzona przez wierzchołek skazówki i przez środek słońca, z drugiey strony do poziomemu przedłużona dla kołowego obrotu słonecznego będzie tworzącą podwoyny ostrokąg, przecięty po obu stronach poziomem, które to przecięcie, iak wia domo z teoryi przecięć ostrokągowych jest Hyperbolą mającą za równanie

$$y^2 = p(x + \frac{x^2}{a})$$

Wymierzone po parze przystawy i do nich należące odcinki dają

B 2

y'^2

$$\frac{y'^2}{y^2} = \frac{x^2(1 + \frac{x^2}{a})}{x(1 + \frac{x}{a})}$$

ostatni stosunek musi bardziéj przybywać iak pierwszy, jeżeli to przecięcie ostrokręgowe ma być Hyperbolą, co się zgadza z obserwacją. Łatwo się ztąd wyprowadza

$$a = \frac{x'^2 y^2 - x^2 y'^2}{2xy'^2 - x'y^2}$$

$$p = \frac{ay^2}{ax + x^2}$$

Można więc wykreślić tę Hyperbolę i zastosować inne do niéy znaiome własności i równanie, iako to dla promieni wodzących, równanie biegunowe i t. d. (*) Azymutami południkowemi będą kąty przy A , długościami cieniów AE , AM , AD . Przy wschodzie i zachodzie słońca będą cienie nieskończenie długimi; utworzą więc

(*) Można by jeszcze wykreślić Hyperbolę przez trzy kąty ABD w którym $AB=a$ $AD=b$ $BD=c$ jest bowiem w nim ogółem $c = a \sec ABD$ w czém $\cos ABD = \sin \lambda \cos \alpha \cos \delta \cos P + \sin \alpha \cos \delta \sin P$
 $- \cos \lambda \cos \alpha \sin \delta$

Asymptoty Hyperboli, daley coraz skracając się, staną się naykrótszym cieniem AM w samo południe; kierunkiem więc osi Hyperboli będzie oraz linia południkowa.

Wynika ztąd wiadomy sposób prowadzenia linii południkowéy na poziomie, za pomocą łuczków południkowych zatoczonych od spodka A skazówki AB , zakończonych równemi cieniami po obu stronach południka, i podzieleniem ich na równe części w punktach m , m' . Lecz ma to tylko miejsce cztery razy do roku, to jest około 22 Czerwca i 22 Grudnia 15 Kwietnia i 2 Sierpnia. Są tu poprawy potrzebne dla innych miesięcy, o czém niżej mówić będziemy.

Spuszczając się słońce na zimę co raz niżej zaczawszy od Września, kąt między asymptotami zawarty, ścieśniać się będzie coraz bardziéj, a z nim i odnogi Hyperboli: gdy słońce 25 Grudnia będzie nayniżéj to jest w znaku Koziorozca (♋) stanie się ta naywęższą, poczem znowu rozszerzając się, zamieni się 22 Marca na linią prostą równonocą. Gdy słońce będzie

dzie w znaku Barana (♈) czyli w płaszczyźnie równika: będzie więc taż linia wspólnym przecięciem z poziomem i prostopadłą do osi Hyperboli idąc zupełnie w kierunku od wschodu do zachodu. Po czém znowu zamieni się na Hyperbolę coraz ścieśniającą się iak w półroczu zimowym aż do granicy, gdy słońce będzie najwyżey, to jest w znaku Raka (♋)

Położenie takowe słońca wyjaśnia nam (fig. 5.) znaioma z pierwszych początków Jeografii i Astronomii. W nię są HR poziomem, ZN linią wierzchołkową, Z zenith, N nadir, Pp oś świata, P biegun północny, p południowy, EQ równik, $PZHZ$ południk, tr , ko , zwrotniki raka i koziorozca, których oddalenia od równika mierzone łukami równemi. Et , Ek , mierzą oraz największe zboczenie słońca północne i południowe i pochyłość ekliptyki ϵ do równika.

Jak wiadomo dzieli się ekliptyka na 12 znaków $\text{♈} \text{♉} \text{♊} \text{♋} \text{♌} \text{♍} \text{♎} \text{♏} \text{♐} \text{♑} \text{♒} \text{♓}$ każdy po 30 stopni stanowiących długość słońca i odpowiadających każdej chwili roczne-

rocznego iego biegu. Ścisłe biorąc nie jest więc pozorna droga słońca kołem, lecz nieiako krzywą linią śrubową powstającą z odwiniecia iey na powierzchni kulistey w oddaleniach nierównych. — Gdy tu o przybliżeniu jest tylko mowa, będziemy brać drogę dziową słońca iak koło.

Równik dzieli się także na 360° zaczynając one liczyć od tegoż punktu równonocnego wiosiennego V co i na ekliptyce: łuki te nazywają się wznoszeniem prostym (ascensio recta). Koła do równika prostopadłe przechodzące przez biegun P są kołami Zboczenia (Declinatio), nazywają się także kołami godzinowymi, bo stanowią kąty przy biegunie P mierzone łukami równika czyli wznoszenia się prostego, które służy do mierzenia czasu.

W téjże piątęj figurze wystawione są koła w liniach prostych, które są ich rzutami pionowymi. Takowe rzuty są bardzo wygodnemi do rozwiązań graficznych i używane są w geometryi wykreślnęj. Tymto fortelem można rozwiązywać przypadki trygonometrii kulistey: takowa

kowa zaś figura nazywała się u starożytnych *Analemma*. (*). Jéy użycie okażemy niżej.

Do wstępnych ćwiczeń Astronomii należy także oswoienie się z użyciem kul sztucznych ziemi i nieba. Łatwym bowiem i zmysłowym sposobem można nimi rozwiązywać przedniejsze zadania Astronomii praktycznéj, porównywać one z rozwiązaniami trygonometrii kulistéj i geometrii rozbiorowéj. Naypierwsze w tym względzie pismo wydał Rivard. (**).

Nayistotniejszą jest tu wyznaczyć początkowy punkt *V* od którego się liczą długość słońca i wznoszenie się proste (**).

Często

(*) Obacz rozprawę o Zaśmiesiaczach tab. I. fig. 1. T. IV. Rocznik: T. K.

(**) *Traité de la sphère et du Calendrier*, którego ósmé wydanie z dodatkiem P. Puissant wyszło w Paryżu r. 1816.

(***) Formułami temi są:

$$\operatorname{tang} \frac{(a'+a)}{2} = \frac{\sin (d'+d)}{\sin (d'-d)} \operatorname{tang} \frac{(a'-a)}{2}$$

$$\text{czyli } \operatorname{tang} \frac{s}{2} = \frac{\sin (d'+d)}{\sin (d'-d)} \operatorname{tang} \frac{r}{2}$$

Często wypada zamieniać wznoszenie się proste i zboczenie na długość i szerokość, to jest zrzucać one z planu równikowego na ekliptykę i wzajemnie: służą do tego formuły zamiany współrzędnych; o których będzie mowa niżej.

Takie wstępne wyobrażenia potrzebne są dla tych, którzyby nieprzestając na samych oschłych i niezrozumiałych mechanicznych przepisach, chcieliby poznać

$$\operatorname{ztąd} a = \frac{s}{2} - \frac{r}{2}; \quad a' = \frac{s}{2} + \frac{r}{2}$$

$$\alpha = \frac{r}{a} = a-r'; \quad \operatorname{tang} d' = \sin a' \operatorname{tang} \varepsilon$$

$$\operatorname{tang} \varepsilon = \frac{\operatorname{tang} d}{\sin a} = \frac{\operatorname{tang} d'}{\sin a'}$$

W tych formułach są a, a' , wznoszenie się proste słońca w dwóch po sobie następujących datach, albo epokach bliskich punktów równonocnych lub przesileni; δ, δ' są zboczenia słońca im odpowiadające: a, a' jest wznoszeniem się prostém gwiazdy stałéj wziętéj za punkt porównania. W Krakowskich obserwacyach bierze się do tego α *Lyrae* czyli *Lucida Lyrae* albo *Vega*, gwiazda pierwszéj wielkości, którą teleskopem i we dnie widzieć można.

poznać choć w krótkości przyczyny praktycznego postępowania w wykreśleniu Kompasów. Po tym wstępie możemy już przedsięwziąć

Robienie wszelkiego rodzaju Kompasów.

Niech AB (fig. 6.) wyraża nam skazówkę pionową do poziomu, AM długość cienia skazówki od słońca gdy jest na równiku i w chwili południa; będzie więc trójkąt ABM wyrażać plan południkowy i w nim kąt AMB pochyłość równika do poziomu, która będąc dopełnieniem szerokości geograficznój jest dla Krakowa $39^{\circ} 56' 8''$. Aby wyrazić plan równikowy poprowadźmy na poziomie linią HR prostopadłą do AM , będzie tym planem BHR . Na tymże planie nakreślone koło jakimkolwiek promieniem BM , wyrażać będzie równik na niebie, gdyby było do jego sklepienia przedłużonem. Podzieliwszy toż koło na 24 części, każda miałaby $\frac{360}{24} = 15^{\circ}$, i każdy kąt takowy wyrażałby jedną godzinę dziennego biegu słonecznego, jeżeli ten jest kołowym. — Dosyćby na ten koniec było w środku B wystawić skazów-

skazówkę do niego pionową BP ; iakoż ziemia będąc nieskończenie oddaloną od bieguna, punkt B może być uważany iak ięć środek, wtedy skazówka BP będzie miała kierunek do bieguna, czyli wyrażać będzie oś świata; służą do tego następujące objaśnienia.

Widzieliśmy wyżej, że droga słońca ściśle biorąc nie jest zupełnie kołową; do tego bieg słońca i jego oddalenia od ziemi nie są równe: w zimie jest najbliższe ziemi i bieg jego prędszym od letniego; co się już dorazu wywodzi z obserwacyi średnic słońca i czasów jego dziennego obrotu. Lecz w Gnomonice nierówności te nie mają znacznego wpływu. Dla przekonania się o tem, urządzmy sobie zegar podług iednostajnego obrotu gwiazd stałych, to jest żeby na nim upłynęło zupełnie 24 godzin, między porównaniem gwiazdy iakiego dnia i onęj górowaniem nazajutrz; znajdziemy, że skoro sobie zapiszemy każdego dnia godzinę iaką nam wskazuje zegar gdy słońce góruje, przeciągi takowe różnią się między grani-

granicami $24^h 3^m$ i $24^h 5^m$ tegoż gwiazdowego czasu. Więc obrót dzienny słońca nie jest iednostayny, i przewyższa równy bieg gwiazdowy 4 minutami. Uważając dwie chwile równonocne w roku, odpowiadające zupełnie równym ceniom skazówkowym, znajdziemy że takowy rok zwrotnikowy zawiera w sobie 365 dni 5 god: 48 min: 52 sek: = 365, 242264.

Gdyby więc słońce miało bieg iednostayny, wypadłoby na ieden dzień średni słoneczny $\frac{365}{365} = 0,9856$ i nadmiar dnia średniego nad gwiazdowy 3 m. 56 s.

Bawienie się słońca nad poziomem pada między $23^h 59' 40''$ i $24^h 0^m 30''$ takiego średniego czasu. Różnica ta granic już i tak mała, czyniłaby tylko kilka dziesiątych sekundy dla dwóch dni następnych po sobie. Można więc uważać w Kompasie równikowym, zaczęm i w innych Kompasach na nich zasadzonych, bieg dzienny iako iednostayny; każda godzina średnia albo prawdziwa zawiera 15' i może służyć dla każdéj godziny równikowéj ogólne wyrażenie

$$E =$$

$$E = n 15^\circ = P$$

W trójkącie *BMP* jest kąt przy *M* kątem zboczenia dla niego więc będzie ogólne wyrażenie

$$\cotg \delta = \frac{\rho}{a}$$

w czém δ znaczy zboczenie, a wielkość skazówki zaś ρ długość cienia podczas południa. Wyrażenie to stałoby się ujemném dla półrocza zimowego, w którem zboczenie jest ujemne, bo jest południowém. Lecz skazówka téżże co i wprzód wielkości, padając z drugiéj strony na przedłużeniu, stałaby się także ujemną, i wyrażenia dla długości cienia odpowiadające równym zboczeniom czyli dniom w równych oddaleniach od równonocy, będą sobie równe, a tak Kompas równikowy musi mieć dwie strony górną i dolną z równemi podziałami.

Kierunek linii godzinowych może być jeszcze wygodniéj i ogólniéj wyznaczonym na jakimkolwiek Kompasie, gdy się ma raz na nim linią południkową, za pomocą zegarka mającego bieg czasu średniego.

dniego. Jeżeli ma bieg gwiazdowy, mieć będzie każda godzina

$$\frac{3' 56''}{24^h} = 10^s \text{ więcej.}$$

Mogą jeszcze też liniie godzinowe być wyrażone za pomocą stycznych kątów godzinowych; dosyć jest na ten koniec przeniść na poziomą HR prostopadłą do BM styczne dla kątów $E = n 15^\circ$ z tablic trygonometrycznych wzięwszy $BM = 1$ (*)

Wziąwszy skazówkę BC i zachowując styczne kątów godzinowych równikowych

(*) Styczne takowe po przechodzie 45° stałyby się zbyt długimi, wygodniéj więc do tegoż zamiaru użyć cięciw łuków od 45° do 90° wzięwszy linią na 5000 millimetrów czyli tysiącznych części metra podzieloną, tak jak jest w rozmiarach Kadastrowych we Francyi używaną; służyć może takową linią do dokładnego wykreślenia iakichkolwiek kątów: liczby dla cięciw tych kątów będą wyrażone ich wstawami z tablic trygonometrycznych wziętemi.

Wspomniane millimetry są połowami linii łokcia Warszawskiego (Ob. Colberg porównanie teraźniejszych i dawniejszych miar i wag w Królestwie Polskiem używanych in. 4to w Warszawie 1818.)

wych a od C do dwóch punktów podziałowych poprowadziwszy liniie iak CD , te będą kierunkami linii godzinowych na poziomie. Ponieważ $MD = BA \tan P$

$$= CM \tan H \text{ więc}$$

$$\tan H = \frac{BM}{CM} \tan s = \sin \lambda \tan P$$

Takiem byłoby wyrażenie dla każdego kąta godzinowego na poziomie.

Dla praktycznego użycia dosyć mieć trójkąt z suchego drzewa ABC prostokątny przy A , którego by bok $AB = a$ wyrażał skazówkę przybraną (style faux ou style droit) $AC = b$ pod skazówkową (sousty-laie) $BC = c$, skazówkę (style) pewną daną długości, mającą mieć zawsze kierunek do bieguna. W tymże trójkącie wyraża kąt przy C szerokość geograficzną miejsca $= \lambda$, zaś przy B iéj dopełnienie $= e$. Za pomocą takowego trójkąta (équerre) czyli gnomonu, można wszelkiego rodzaju robić Kompaszy poziome i pionowe: idzie tu tylko o przyzwoite iego umieszczenie na danym planie Kompaszu, aby mieć kierunek iego przeciwprostokątney BC ,

BC , zawsze w położeniu osi świata; i tak na Kompasie poziomym jest Kateta AC podskazówkową. Na Kompasie pionowym czyli ścianie murowej pionowej, idący zupełnie od wschodu do zachodu stałaby się Kateta AB podskazówkową, i wyrażenie na niej kątów godzinowych stałoby się.

$$\text{tang } H' = \cos \lambda \text{ tang } P$$

$$\text{iaż } MD = CM \text{ tg } H' = MB \text{ tang } P$$

$$\text{z tąd } \text{tg } H' = \frac{MB \text{ tang } P}{MC'} = \cos \lambda \text{ tg } P$$

Na ścianie zupełnie wschodniej i zachodniej stałby się ten trójkąt równoległym i takimiż linie godzinowe.

Dla Kompasów na takowych ścianach nakreślonych, czyli dla Kompasów regularnych jest więc trygonometria prostokreślna dostateczną.

Jeżeli ściana pionowa zbacza ku północy albo południowi jakim kątem α wyrażonym na poziomie przez $\pm HMH'$ od powiadającym azymutowi wschodniemu (amplitudo ortiva), otrzymują się dla godzin punkta jak D'' z przecięć linii godzinowych planu poziomego z nową linią pozio-

łą $H'R'$, lecz wtedy trójkąt ABC leżący bokiem AB na pionie ściany musi do niego być pochylonym pod azymutem $= 90^\circ + \alpha$

Nayogólniejsze do tych wszystkich przypadków podaie nam

I. Rozwiązanie za pomocą Trygonometrii Kulistej.

Fig. 7. Niech $HZPR$ wyraża południk, HOR poziom, P biegun, $HO = OR = 90^\circ$, Punkt O będzie punktem wschodnim równonocnym, ZO pierwszym kołem wierzchołkowym. Niechby ZT był planem naszego muru pionowego, $OT = OZT = \alpha$, będzie zboczeniem (deviatio) tego muru, od pierwszego koła wierzchołkowego: Niech PSV wyraża koło godzinowe iakiekolwiek; linia CS wyrażać będzie przecięcie koła godzinowego z planem muru czyli Kompas.

Niech $HROB'$ (fig. 8.) wyraża ścianę naszego muru, na którym chcemy zrobić Kompas. $HR = B'O$ dwie linie poziome, zas HB' i RO dwie pionowe ograniczające Kompas. Poprowadźmy pionową CM dzielącą prostokąt na dwie równe części.

Możemy wziąć CM za linią południkową, bo ta będąc wspólnym przecięciem dwóch planów pionowych, jest także koniecznie pionową.

Punkt C jest środkiem Kompas: jest to punkt w którym skazówka jest wetkniętą; jest on wspólnym dla wszystkich linii godzinowych, bo należy razem do skazówki i do wszystkich tén cieniów. Linia HR jest w poziomie umysłowym, punkt C jest środkiem poziomu i kuli nieba.

Niechby CD była iakakolwiek linią godzinową, aby ją wyznaczyć, trzeba znać kąt MCD , który czyni z linią południkową, albo jego dopełnienie HCD , który czyni z linią poziomą HR .

Przedłużmy MC do nieba, przypadnie ta linia na Zenit Z ; przedłużmy także DC , przedłużenie padnie na punkt S , który będzie wspólnym przecięciem linii godzinowój z planem muru: linia ta przedłużona do nieba, będzie na niém wyrażać punkt S (fig. 7).

Jdzie

Jdzie więc tu tylko o wyznaczenie boku ZS .

Trójkąt ZPS , którego wiadomemi są bok ZP równy dopełnieniu szerokości λ , kąt godzinowy P i Z , daie wiadomą formułą

$$\cotg ZS = \frac{\cotg P \sin Z}{\sin ZP} + \cotg ZP \cos Z$$

$$\tang TS = \frac{\cotg P \cos \alpha}{\cos \lambda} + \tang \lambda \sin \alpha$$

Dla naszcý (fig 8) staie się

$$\cotg ZS = \tang RS$$

$$\text{ogółem } HD = \frac{\cotg P \cos \alpha}{\cos \lambda} + \tang \lambda \sin \alpha$$

Wszystko jest stałém w tén formu-
le wyjąwszy $\cotg P$ który się co chwila
odmienia,

Niech będzie $P = 90^\circ$ to jest zakładamy sobie poprowadzić linią 6 godziny.
Jest tu $\cotg P = 0$ zacząm

$$HD = + \tang \lambda \sin \alpha$$

Weźmy Ch za 1, n.p. ieden Centimetr: weźmy $\alpha = 32^\circ 40'$ zboczenie ściany Obserwatorium krakowskiego od wschodu ku północy: stanie się $h 6 = 0,64$ millimetrów. Można tym sposobem ułożyć so-

C ?

bie

bie tabliczkę stycznych dla godzin rannych i wieczornych. W naszym przykładzie (*) pochyłość ściany jest od wschodu ku północy czyli przydayną. Słońce o 6^g będzie na kole PO prostopadłym do PZ ; każde przecięcie S' będzie wywyższonem nad poziom, ZS' będzie mniejszem od 90° , więc punkt D pada pod poziomem HR i dla tego wzięliśmy $h.6$ pod poziomem.

Przedłużmy CD na drugą stronę, będzie CS linią 6^g wieczorną, bo obydwie koła sześciogodzinowe, są połowami jednego koła wielkiego, które jedno tylko ma przecięcie z planem południkowym.

Już same wypadki rachunku i wykreślenia wskazują nam niektóre pożyteczne wnioski. I tak dla 9 godziny ranney jest kąt

(*) Przykłady liczebne, lubo nieco przerywają pasmo rozumowania, bardzo jednak objaśniają teorię: nazywane one są w elementach niemieckich, co jest naśladowaniem godaem.

Jedną takowe przykłady wiele praktycznych korzyści przez zwrócenie uwagi do szczegółów, do których sama teoria często nie daje powodu.

kąt godzinowy $12^h - 9^h = 3^h = 45^\circ$

cotang $45^\circ = 1$ zaczęm

$$h.9 = \frac{\cos \alpha}{\cos \lambda} + \sin \alpha \tan \lambda$$

$$h.6 = \frac{\sin \alpha \tan \lambda \text{ więc}}{\cos \lambda}$$

$$h.9 - h.6 = 6g = \frac{\cos \alpha}{\cos \lambda}$$

Podobnież dla trzeciej godziny wieczorney, która będąc dopełnieniem 9 godziny do południa, jest kąt P także 45° , tylko padając z drugiej strony południka jest ujemnym: staie się więc po odciągnięciu równych wielkości $6g = 6g$ Miałszy więc raz godziny ranne, łatwem staie się wyznaczenie godzin wieczornych, dosyć jest prowadzić przez koniec pierwszych stycznych linie równoległe od sześciogodzinowey aż do zeyścia się z kierunkiem stycznych prowadzonych po drugiej stronie południka, iak tu 9, 3'

Braliśmy tu zboczenie α północnem dla południowego byłoby wykreślenie przeciwnem; to jest brałyby się styczne i godziny nad poziomem HR , które się tu pod

nim wzięły; wreszcie wszystko toż samo. A tak połowa Kompas wykreślona, daie drugą przez równe oddalenia od linii 6ciogodzinowéy, czyli przez linie do niéy równoległe.

Między pojedynczemi godzinami rannemi i onym odpowiadającemi wieczornemi, czyli dopełnieniami pierwszych do dwunastu, będą więc oddalenia także sobie równe.

Wszystkie linie wznoszące się nad poziomem są niepotrzebnemi, ponieważ przypuszczają słońce pod poziomem i należą przeto do nocy.

Mogą jeszcze być niektóre linie niepotrzebnemi, gdy słońce jest za planem.

Skoro się wie oddalenie biegunowe słońca PS dla pewnego dnia, można wynaleść, o której godzinie będzie ściana przez niego oświetloną; wiadomemi bowiem są do tego w trójkącie ZPS , boki PS , PZ i kąt przy Z , idzie więc tu o wynalezienie kąta P , do czego służą formuły:

tang

$$\text{tang } i = \frac{\text{tang } \alpha}{\sin \lambda}$$

$$\cos(P-i) = \frac{\text{tang } \delta \cos i}{\text{tang } \lambda}$$

Zmienném tu jest tylko zboczenie $\pm \delta$ górny znak należy do miesięcy letnich; dolny do zimowych, stałym jest kąt przybrany i ; rozwiązanie ściągać się może do jakiegokolwiek dnia w roku. Wiadomém tylko powinno być zboczenie słońca na dzień wyznaczony, co się zasięga z Efemerydów astronomicznych.

Chcemy n.p. wiedzieć o iakiéy godzinie ściana Obserwatorium krakowskiego jest najpierwéy oświetlona i kiedy z niéy zchodzi słońce w chwili przesilenia letnich, jest tu

$$\delta = \varepsilon = 23^{\circ} 27' 56'' \quad \phi = 50^{\circ} 3' 52''$$

$$\text{rano jest } P = 4^{\text{h}} 24^{\text{m}}$$

$$\text{z południa } P' = 2 \quad 9$$

ażé podług formuły dla łuku dziennego jest

$$\cos P = -\text{tg } \delta \text{tg } \phi = 3^{\text{h}} 55^{\text{m}}$$

więc w chwilach letniego przesilenia dnia z nocą jest ściana Obserwatorium w pół godziny po wschodzie słońca oświetloną.

Te wy-

Te wyrażenia rozumiejąc i miawszy w pamięci co się wyłuszczyło pod fig 4 i 6, łatwo będzie wykonać wynikające do-razu z poprzedzających objaśnień grafi-czne, czyli

H. Rozwiązanie rysunkowe ogólnego zadania Gnomoniki.

Fig. 8. Niech $HROB'$ wyraża nam ścianę Kompasową. Wetknijmy w nią skazówkę pionową przybraną AB , za-czém równoodległą od poziomu; nazna-czmy koniec ięcy cienia x w chwili same-go południa. Przez ten punkt popro-wadźmy pionową xZ , a do téj spuścmy prostopadłą AM i ściągamy BM . O-bróćmy ten trójkąt ABM , wokoło AM , tak żeby padł na naszą ścianę iak widać na figurze; od M promieniem MB zato-czmy łuk BB' , przecinający poziomą AM w punkcie B' przy tym ostatnim punkcie zróbmy na linii $B'M$ kąt $MB'C = \lambda$, przecięcie iego ramienia w C , da mieysce w którym skazówka prawdzi-wa musi być wetknięta, aby opierając się

się na wierzchołku B skazówki przybra-néy miała kierunek osi świata.

Na linii CB' wystawmy prostopadłą $B'\gamma$. Punkt γ ięcy wspólnego przecięcia z południkową pionową CM da punkt rów-nonocny wiosienny. Kierunkiem osi Hy-perboli jest linia CB'' przez spodek A skazówki przybranéy poprowadzona; aby więc mieć kierunek linii równonocnéy, dosyć jest od punktu γ spuścić do nięy prostopadłą γE . Jeżeli nakoniec z punktu γ promieniem $\gamma B'$ zatoczmy łuk $B'B''$ prze-cinający w B'' przedłużenie CA , otrzymamy do razu środek B'' i promień $B''E$ koła wyra-żającego równik. — Kierunkiem 12 godzi-ny będzie na nięy $B''\gamma$ od tego więc za-czawszy, brane łuki po 15° , i onych sty-czne dadzą zgodnie z pierwszym sposobem kierunek linii godzinowych $C6, C7, C8...$ Gdybyśmy na tym Kompasie chcieli do razu wyznaczyć:

Południk średniego czasu

to jest wyznaczyć na nim równanie czasu, iakie zachodzi między czasem średnim i prawdziwym, poszukajmy naprzód czterech

czterech punktów wspólnych dla obydwóch czasów. Muszą się te znajdować razem na linii południkowej prawdziwej CM i na kierunku cieniów w przesileniach; Po obu więc stronach linii $B\gamma$ zrobimy kąty $\varepsilon = 23^\circ 27' 55''$ kierunki ich ramion dadzą żądane punkta $\mathbb{Z}$ i $\mathbb{G}$. Podobnież znaiome zboczenie z Efemerydów astronomicznych 15 Kwietnia i 1 Września, to jest $0^\circ 43' B (*)$ i $8^\circ 31' B$, dadzą dwa inne wspólne punkta $m. n.$ przez które przechodzić będzie żądana południkowa średniego czasu.

Od początkowego punktu C licząc wyrażają $C\mathbb{Z}$, Cm , Cn , $C\mathbb{G}$: odcinkitę krzywey wyznaczone wiadomemi zboczeniami słońca. Przystawy dla nich są zera równie iak równania czasu, lecz dla największego tego równania przypadającego 1. Listopada i 16 Lutego, są te równania $-16' 15''$, i $+14' 40''$: odpowiadające im zboczenia są $14^\circ 15' A$ i $14^\circ 36' A$. Te dadzą nam punkta $p. q.$ od których wyprowadziwszy prostopadłe przystawy, dosyć jest one przeciąć kierunkiem $16'$ i $14'$, a tak o-

(*) B znaczy zboczenie słońca północne (Borealis), zaś A południowe (Australis).

trzymamy punkta r i s należące do krzywey żądanej.

Podobnież dla miesięcy letnich mamy 15 Maja równanie czasu $= -4'$ i zboczenie $18^\circ 43' B$. zaś 27 Lipca równanie czasu $= +6' 7''$ zboczenie $19^\circ 23' B$. temi wynayduią się iak wprzód punkta krzywey $s'r'$, a tak iuż będzie można poprowadzić żadaną krzywą wyrażającą południk średniego czasu. Ma się przez się rozumieć, że więcęć ięć punktów tymże sposobem szukać potrzeba, aby była dokładniejszą. Na niektórych Kompasach wykreśla się

Droga Cienia.

Ta iakośmy widzieli iest Hyperbolą, i wyznacza się także przez punkta; krzywe te nazywają się łukami znaków niebieskich: ponieważ wiedząc w iakim znaku iest słońce, można wyznaczyć iego zboczenie znaiomą formułą

$$\sin \delta = \sin \varepsilon \sin l$$

w czém l wyraża długość słońca, zaś ε pochyłość ekliptyki. Z temi zboczeniami rachuje się droga cienia i w iakiem oddale-

daleniu od środka C znajduje się na każdej linii godzinowej punkcik światły rzucany od pierścienia skazówki, albo od ięć końca.

Weźmy Tp (fig. 7.) równe 90° będzie p biegunem naszej ściany murowej; odpowiada on wierzchołkowi B naszej przybraney skazówki. Poprowadzmy Pp ; PA będzie wysokością bieguna nad ścianą, Ap będzie 90° . Niech S' wyraża miejsce słońca będzie pS' oddaleniem słońca od bieguna ściany; Trójkąt $S'Pp$ da

$$\begin{aligned}\cos pS' &= \cos Pp \cos PS' \\ &+ \sin Pp \sin PS' \cos P \\ &= -\sin PA \sin \delta \\ &+ \cos PA \cos \delta \cos(ZPS' - ZPA) \\ &= -\sin PA \sin \delta \\ &+ \cos PA \cos \delta (\cos ZPS' \cos ZPA \\ &\quad + \sin ZPS' \sin ZPA)\end{aligned}$$

$$\text{lecz } \sin PA = \cos \alpha \cos \lambda$$

$$\text{zaś } \cos PA = \frac{\sin \alpha}{\sin ZPA} \quad \text{te wartości}$$

włożywszy do formuły i przerobiwszy ją, otrzymamy:

$$\begin{aligned}\cos pS' &= -\sin \delta \cos \alpha \cos \lambda \\ &+ \sin \lambda \cos \alpha \cos \delta \cos P + \sin \alpha \cos \delta \sin P\end{aligned}$$

znac więc będziemy

$$\sec pS' = \frac{1}{\cos pS'} = BD \text{ (fig. 4)}$$

to jest oddalenie wierzchołka skazówki do końca cienia, biorąc za jedność długość przybraney skazówki. Niech a będzie tą długością, $a \tan pS' = b$, będzie oddalenie spodku prostopadłej od końca cienia, albo też wzięwszy długość drutu równą $\frac{a}{\cos pS'} = BD$ otrzymamy na linii godzinowej, punkt należący do punktów Hyperboli, czyli do znaku, w którym się znajduje słońce; tymże sposobem wyznaczają się i inne punkta Hyperboli dla każdej godziny. Zboczenia zaś ścian dojść można z trójkąta HPp formułą:

$$\tan \alpha = \sin PH \sin HPp = \sin \lambda \tan P (*)$$

Nowsze Rozwiązanie rozbiorowe

Zaprowadzi nas do tychże samych wypadków. Droga, którą postępować będziemy w użyciu nowszego rachunku,

$$(*) \text{ Mniejszą } \alpha \text{ wynayduie się kąt } C\gamma E = c$$

$$(\text{const.}) \text{ formułą } \tan c = \frac{\tan \lambda}{\sin \alpha} \text{ bo } \triangle C\gamma E \sim \triangle CAM$$

stanie się zrozumiałszą za pomocą poprzedzających wyjaśnień i rozumowań, gdy jest oraz pięknym zastosowaniem zasad analitycznych, téyto ważnéj części Matematyki, która iéy w naszych czasach nową dała postać; zaprzatniemy się niém w szczególności, a naprzód wyłożmy w krótkości

Najgłówniejsze zasady Jeometryi robiorowéy.

Do tych prowadzi ogólne wyrażenie dla położenia punktu w przestrzeni, stosując go do trzech planów wzajemnie do siebie prostopadłych.

Nic prostszego nad tę zasadę, która po prostu wyrażona wymaga wyznaczenia położenia i końca przekątnej równoległościannu prostokątnego, którego się zna długość, szerokość i wysokość.

Trzy te wymiary dowolne i zmianie podlegające, a przeto należące do wielkości zmiennych, nazywają się w ięzyku analitycznym *współrzednymi*, równie iak i plany przez nie przechodzące.

Pierwsze znaczyć będziemy przez x, y, z ,
drugie

drugie przez xy, xz, zy . Można dać współrzednym x, y, z , iakąkolwiek wartość wyznaczoną a, b, c albo x', y', z' a wtedy za ich pomocą da się z łącznością wyznaczyć punkt w przestrzeni, dla którego stanie się równanie:

$$x = x'$$

$$y = y' \quad (I)$$

$$z = z'$$

Mogą te trzy wielkości być razem, albo po parze, albo pojedynczo dodaynemi, albo ujemnemi, i mieć ośmiorakie położenie. Co zaś do wielkości, te mogą nie mieć granic, równie iak i plany współrzedne i sam Równoległościann.

Rozważanie Równoległościannu

staie się więc z tego względu bardzo interessującym, ponieważ może posłużyć tak do wyznaczenia punktów będących w przestrzeni nieba, iak i w przedmiotach ziemskich mających rozciągłość. Rozważmy iego części z osobna.

Równanie pierwsze iest ogólném, i może wyrażać iakikolwiek punkt w przestrzeni, albo będący na iednym z planów

nów lub osi współrzędnych, albo wcale oznaczyć może początkowy punkt tychże osi, podług tego jak weźmiemy iedne, dwie, lub wszystkie z tych współrzędnych za zero.

Pomniąc na znaczenie i wartość trygonometryczną katet trójkątów prostokątnych, nazwawszy R przekątną równoległościannu zaś R' ię rzut na plan xy , do tego α kąt zawarty, między x i R' zaś δ między R i R' otrzymamy ieszcze drugie ważne równanie dla punktu w przestrzeni

$$\begin{aligned}x &= R \cos \alpha \cos \delta \\y &= R \sin \alpha \cos \delta \quad (I)' \\z &= R \sin \delta\end{aligned}$$

wynika ztąd

$$\operatorname{tang} \alpha = \frac{y}{x} \quad (II)$$

$$\operatorname{tang} \delta = \frac{z}{x} \cos \alpha \quad (III)$$

Równanie (II) daie pochyłość planu przekątnego RR' do planu zx , zaś równanie (III) pochyłość linii przekątnę do planu xy , z równania (II) wynika ieszcze

$$y = x \operatorname{tang} \alpha$$

i ogól-

i ogólniey nazwawszy a, b , styczne trygonometryczne kątów, które czynią Rzuty R'', R''' z osią z , otrzymamy nowe dla współrzędnych wyrażenia

$$\begin{aligned}x &= a z \\y &= b z \quad (I)'' \\z &= z\end{aligned}$$

Nazwawszy X, Y, Z kąty, który czyni przekątna R z osiami x, y, z , będą ieszcze

$$\begin{aligned}x &= R \cos X \\y &= R \cos Y \quad (I)''' \\z &= R \cos Z\end{aligned}$$

Szukaymy równania dla R to iest dla oddalenia punktu w przestrzeni od początkowego punktu współrzędnych,

Jest tu $R^2 = R'^2 + z^2$ zaczęm

$$R^2 = x^2 + y^2 + z^2 \quad (IV)$$

Równanie to służyłoby i dla powierzchni kuli mającę za promień R , a za środek S początkowy punkt współrzędnych. Podobnież zasadzając się na własności kwadratu, z przeciwprostokątnę łatwo dowieść, że dla oddalenia D dwóch iakich-

D kolwiek

kolwiek punktów M, N w przestrzeni wyznaczonych jest:

$D^2 = (x' - x'')^2 + (y' - y'')^2 + (z' - z'')^2$ (V)
równanie (II) dało nam

$$y = x \tan \alpha$$

albo jeżeli dla skrócenia weźmiemy $\tan \alpha = a$ i nazwiemy b oddalenie początkowego punktu linii od osi x będzie:

$$y = ax + b \quad (\text{VI})$$

ogólném równaniem linii leżącém na jakimkolwiek planie. Wyraża one związek między x i y dla linii daney, i wzajemnie linia nazywa się *miejsce* geometryczném równania do nięj należącego. (*) Dwie linie

(*) Jak buyną jest ta zasada wyrażenia rozciągłości przez równania, obacz między innemi Sarad: Algebrę T. II.

Dla ćwiczenia pierwiastkowego dobrze jest sobie wziąć do rozwiązania równanie

$$\frac{(x-1)^2}{x-\sqrt{y-2}} - x = \sqrt{y-2} \quad \text{z którego wynika}$$

$y = 2x + 1$ wzięwszy coraz $x = 0, 1, 2, 3, 4, 5,$

wynika $y = 1, 3, 5, 7, 9, 11,$

podobnie biorąc coraz x przydajacym, ujemnym, ułamkowym, wykreślić się dała rozmaite linie proste wyrażające miejsce geometryczne.

linie zchodzące się robią kąt płaski i wyznaczają razem plan.

Zbiór równań ramion kąta da wyrażenie dla planu:

Śladami planu nazywają się jego wspólne przecięcia z planami współrzędnymi; takimi są tu R', R'', R''' . Weźmy plan mający ślady R'', R''' i nazwiemy a, b , styczne trygonometryczne kątów, które czynią z osiami x i y

$$z = ax \quad \text{równanie dla } R''$$

$$z = by \quad \text{równanie dla } R'''$$

zaczęć ich zbiór

$$z = ax + by$$

równaniem dla planu przechodzącego przez początek S współrzędnych: dla oddalenia od niego c , stałoby się

$$z = ax + by + c \quad (\text{VII})$$

dla przydania więcej symetrii temu równaniu, rozmnożmy wszystkie jego wyrazy przez dowolną wielkość C , a przenioszmy drugą jego stronę na pierwszą, otrzymamy:

$$Cz - Cax - Cby - Cc = 0$$

weźmy $Ca = A, CB = B, Cc = D$
 stanie się $Ax + By + Cz + D = 0$ (VII)
 ogólném równaniem planu, w którym do
 razu widać iaki zachodzi związek między
 współczynnikami dla planów i linii w prze-
 strzeni.

Jużesmy doszli wyrażen dla kątów bę-
 dących w Równoległoscianie. — Poszukay-
 my ogólniejszego wyrażenia dla iakiego-
 kolwiek kąta w przestrzeni. — Przez po-
 czątek S współrzędnych wystawmy sobie
 dwie równoodległe od ramion iego, kąt
 między niemi zawarty, będzie ieszcze ró-
 wny kątowi w przestrzeni.

Nazwiemy ten kąt V , zaś ramiona iego R, r
 oddalenie iego końców D w trójkacie
 RrD iest

$$D^2 = R^2 + r^2 - 2Rr \cos V \text{ (z trygon:) także}$$

$$D^2 = (x' - x'')^2 + (y' - y'')^2 + (z' - z'')^2 \quad (V)$$

w dwóch tych równych wyrażeniach dla
 D^2 , oswobodziwszy $\cos V$ wzięwszy $R = r = 1$
 i przerobiwszy one, otrzymamy:

$$\cos V = x'x'' + y'y'' + z'z''$$

wzięwszy współrzędne w funkcji kątów,
 które czynią z ramionami kąta, otrzymamy:

$$\cos V$$

$\cos V = \cos X' \cos X'' + \cos Y' \cos Y'' + \cos Z' \cos Z''$
 wzięwszy nakoniec współrzędne $x'y'z', x''y''z''$
 w funkcji stycznych trygonometrycznych
 $aa' + bb'$ kątów, które czynią rzuty ramion
 kąta z osią z , i przerobiwszy, otrzymamy:

$$\cos V = \frac{1 + aa' + bb'}{\sqrt{(1+a^2+b^2)} \sqrt{(1+a'^2+b'^2)}} \quad (VIII) (*)$$

ięszcze iest $\cos V = \frac{1}{\sec V} = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 V}}$ zaczął

$$\tan^2 V = \frac{(a-a')^2 + (b-b')^2 + (ab - b'a)}{1 + aa' + bb'}$$

Z równania (VIII) można wyprowa-
 dzić szczególne położenia kąta na planach
 rzutowych Równoległoscianu i wewnątrz
 iego, iakiemi są n.p. α i δ (fig: 1.) wy-
 rażające pochyłość linii i planów do sie-
 bie. Okazane dla nich będą niżej wyra-
 żenia rozbiorowe. — Jeżeli plan iaki iest
 do linii prostopadłym, będą iego pochy-
 łości do planów rzutowych dopełnieniami
 kątów pochyłości linii do tychże planów;
 tak

(*) Równanie Planów da się także i z tego równania
 wynaleść.

tak że jeżeli nazwiemy ostatnie $\delta, \delta', \delta''$ zaś pierwsze v, v'', v''' będzie ogółem

$$\cos \delta = \sin v'$$

$$\cos \delta' = \sin v''$$

$$\cos \delta'' = \sin v'''$$

Widać to dorazu na *fig.* 9. również że $v' = Z$; $v'' = F$, $v''' = X$; to jest, że pochyłości linii do planów rzutowych, są dopełnieniami kątów, jakie czyni też linia z współrzędnymi do tych planów prostopadłemi.

Formuły więc I. II. III. IV. V. VI. VII. VIII. dają nam ogólne wyrażenia dla punktów, linii, planów i kątów w przestrzeni. Wyrażenia takowe są fundamentem całej Jeometrii rozbiorowey i wykreślney i rozwiązań zadań do nich należących.

Cała tajemnica fortelów w nich używanych polega na przyzwoitej kombinacyi ośmiu tych równań pojedynczych i na rugowaniu wielkości niepotrzebnych do zadania. — Końcowym zaś wypadkiem dochodzeń związków, jakie mieć mogą wszelkie wielkości do zadania wchodzące, jest

równa

równanie zawierające w sobie wszystkie te wielkości.

Objasniemy sobie ogólny ten, a niedosyć zalecony w Elementach przepis w następujących zadaniach, które nam oraz posłużą do Gnomoniki rozbiorowey.

Trzeba tu mieć na doręczu i nieiało w pamięci utkwione zasadnicze te formuły, aby one dorazu użyć we wszelkich rachunkach, gdy idzie o położenie punktów, linii i planów wzajemnie, iedne względem drugich. Umieściliśmy one w tym celu pod figurami 1. 2. 3. 4. zachowując dla nich iak najprostsze znaczenie, przybierając one z liter początkowych nazwisk łacińskich, które wyrażają.

I tak S początek współrzędnych, jest oraz wierzchołkiem (*sommet*) ostrosłupa trójkątnego, którego rozwiązanie rozbiorowe i rysunkowe, podają formuły trygonometrii kulistey, również jak starożytne *Analemma*.

W astronomicznym względzie może jeszcze S wyrażać środek słońca albo ziemi. Kierunek x może zmierzać do znaku wiosienne-

siennego czyli barana, a tak α , δ wyrażać mogą wznoszenie się proste (ascensio recta) i zboczenie (declinatio) iakiego punktu lub planety P na niebie stósowanego do planu równikowego x, y .

We względzie Mechaniki wyrażać będzie R siłę wypadkową (resultante) przy składaniu sił i t. d. ztąd widać obszerne pole zastosowań do użycia w Matematyce aplikowaney.

Gdyby ostatni plan był poziomem zaś zx planem południkowym, byłby α azymutem, δ wysokością słońca albo planety. — Gdyby x, y był planem ekliptyki zamieniłyby się α i δ na l i λ , długość i szerokość (longitudo et latitudo) punktu na niebie i t. d.

Po takim wstępie, łatwo nam będzie analitycznie i graficznie rozwiązać następujące

Zadania Geometrii rozbiorowey i wykręślney.

Zadanie I. Wynaieść wszelkie położenia, iakie mieć może punkt w przestrzeni.

Rozwią-

Rozwiązanie rozbiorowe iuz było na samym początku okazane, i znajduje się w formułach (1) pod figurą 1.

Tab. II. fig. 2. Rozwiązanie rysunkowe tegoż zadania jest także fundamentalnem *Jeometrii wykręślney*, która słusznie nazywać się może dopełnieniem jeometrii Euklidesowey, bo do ostatniy wchodzi tylko zadania ściągające się do rozciągłości wzdłuż i wszérz.

Jasne i zmysłowe wyobrażenie fig. 1. 2. Tabl: II. wyrażających treść znanych początkowych tłumaczeń, wskazuje dorazutosałość wypadków rozbiorowych i rysunkowych. Dowcipnym sposobem bardzo ułatwiającym wykręślenie jest obrót planu zx , w około osi x , tak żeby przypadł na przedłużenie planu xy . — Tym bowiem sposobem linia $P'P''$ stanie się iednąz linią do osi x prostopadłą. — Resztę wykręślenia widać dorazu z fig: 2, mianowicie dawszy sobie trzy wielkości linearne, albo w liczbach wyrażone dla x, y, z można samém wykręśleniem, albo gdy się użycie powyższych formuł analitycznych, wywieść

wywieść w liczbach wszelkie wielkości pozostałe tu wchodzące, jako to rzuty punktów, linii i kątów, i same te wielkości będące w przestrzeni.

Nie wchodzi tu trzeci plan współrzędny, obeyść się więc bez niego można. — Nieprzestający na tém tłómaczeniu, równie jak i następujących zadań, znajdzie dalsze ich rozwinięcie w dziele *La Croix Complement de Geometrie*, i onego przełożeniu przez *P. Poulin*.

Dobrze zaś iest objaśnić sobie zrazu takowe wykreślenia na dwóch tabliczkach do siebie pionowych (n. p. blaszanych papierem pokrytych, i węglikiem rysunkowym). Nazywać będziemy wielkości w przestrzeni wielkimi literami alfabetu, zamkniętymi w nawiasach. Same takie wielkie litery będą znaczyć rzuty tych wielkości na planie poziomym x, y , zaś małe, ich rzuty na planie pionowym x, z , n. p. punkt (A), A, a , oddalenie dwóch linii (D), D, d , kąt (V), V, v ,

Zaga-

Zadanie 2. Wynaleść wszelkie położenie jakie mieć może iedna linia względem drugiey na planie i onych wspólne przecięcie.

Rozwiązanie rozbiorowe: 1) Równaniami tych dwóch linii podług (VI) są

$$y = ax + b \text{ dla pierwszey}$$

$$y = a'x + b' \text{ dla drugiey}$$

2) Niechby iedna linia czyniła z osią x kąt p zaś druga z tąż osią kąt q , będzie kąt między temi liniami zawarty

$$V = p - q \text{ lecz } \operatorname{tg} V = \frac{\operatorname{tg} p \operatorname{tg} q}{1 + \operatorname{tg} p \operatorname{tg} q} \text{ (z Tryg.)}$$

$$\text{albo skracając } \operatorname{tg} V = \frac{a - a'}{1 + aa'} \quad (1)$$

Jeżeli te linie mają być do siebie prostopadłemi będzie

$$\operatorname{cotg} V = \frac{1 + aa'}{a - a'} = 0; \text{ zaczęm}$$

$$a' = - \frac{1}{a} \quad (2)$$

jest ona zawartą w nocie do formuły (VI.) i iedna z nich zniatoma daie drugą.

Jeżeli dwie linie mają być do siebie równoległemi, musi być:

tang

$\text{tang } V = 0$ zaczém

$$a = a' \quad (3)$$

Rugowanie w dwóch najpierwszych równaniach dla danych linii daie dla ich wspólnego przecięcia współrzędne

$$x = \frac{b' - b}{a' - a} \quad (4)$$

$$y = \frac{a'b - ab'}{a' - a}$$

jeżeli te. linie mają być równoległemi stanie się znowu $a - a' = 0$, zaczém

$$x = \frac{b - b'}{0} = \infty$$

$$y = \frac{a(b - b')}{0} = \infty$$

jak być powinno dla punktu ich zez-
scia się.

Rozwiązanie graficzne tego zadania, należy do Planimetrii, i może być wykonaném za pomocą przenośnika zwy-
czaynego, albo prostokreślnego; zawartem
oraz one iest w następującem:

Zadanie 3. Wynaleść równanie linii na planie albo w przestrzeni, gdy ma prze-
chodzić przez dwa dane punkta.

Rozwiązanie rozbirowe. 1) Jest tu
 $y = ax + b$ ogólne równanie linii prostéj
 $y' = ax' + b$ — dla iednego punktu danego,

$y'' = ax'' + b$ — dla drugiego punktu da-
nego

odciagnąwszy drugie równanie raz od
pierwszego, drugi raz od trzeciego, będzie

$$y - y' = a(x - x')$$

$$y'' - y' = a(x'' - x')$$

będzie więc żadaném równaniem

$$y - y' = a(x - x')$$

$$a = \frac{y - y'}{x - x'}$$

w którym gdyby linia miała przechodzić
przez ieden punkt dany, stałyby się $x'' = p$
 $y'' = 0$ zaczém $a = \frac{y'}{x'}$

2) Równanie to ściąga się do linii na
planie n.p. linii R' na planie $x y$. Dla li-
nii R w przestrzeni, gdy ta wyznacza się
przez rzuty $R' R''$ trzeba ieszcze równania
dla R'' które iest

$$z' - z'' = b(x' - x'') \quad (2)$$

$$b = \frac{z' - z''}{x' - x''}$$

Podobnie gdybyśmy stosowali rzuty $R'' R'''$ do osi z , byłyby równania wyznaczonej linii R w przestrzeni

$$x - x' = a(z - z') \quad (2')$$

$$y - y' = b(z - z')$$

a i b byłyby tu stycznymi trygonometrycznymi kątów między $R''z$ i $R'''z$

3) Równania te ściągały się do linii w przestrzeni mającý jeden swój koniec w początku współrzędnych; dla iakiékolwiek innéj D trzeba jeszcze wynaleść iéy punkta spotkania się $L' L''$ z planami rzutowymi. Równaniami téj linii stosowaney do osi z , są:

$$x = az + a \quad y = bz + \beta$$

Jeżeli się ma zcyść z planem xy weźmiemy $z = 0$ i otrzymamy $x = a$, $y = \beta$ na współrzędne tego punktu. Toż postępowanie ściągałoby się i do drugiego planu.

4) Ogólniejsze równanie dla iakiékolwiek linii w przestrzeni tak się dochodzi.

Niechby MN (fig 1.) była tą linią. Jakikolwiek punkt P wyznacza się przez x, y, z . Rzutowe iégo punkta są $P' P'' P'''$ z któ-

z których każdy wyznacza się przez dwie współrzędne, będące na planie rzutowym i należące do rzutów linii w przestrzeni. Równaniami tych rzutów są:

$$\text{dla } P'' \text{ jest } x = az + a$$

$$\text{dla } P''' \text{ . . } y = bz + \beta$$

Podobnie wyznaczylibyśmy równanie dla rzutu P' , lecz dwa z ostatnich równań są dostatecznymi do wyznaczenia tego punktu; iakoż wyrugowawszy z nich z , otrzymamy

$$y = \frac{a}{b}x + \frac{a - \beta}{b}$$

Równanie to pierwszego stopnia; wyraża związek iaki zachodzi między x i y , zaczęm jest równaniem rzutu linii w przestrzeni na planie xy .

5) Rozwiązanie graficzne pierwszy części tego zadania już jest zawartém na (fig: 2) dla ostatniéy jest następującém:

Niechby część (D) téj linii łączyła dwa iakiekolwiek iéy punkta (M) (N) wyznaczone w przestrzeni przez ich rzuty MN , mn , łatwo jest wyznaczyć żądane punkta

akta $L'L''$. Dostyc na ten koniec poprzedzić linie rzutowe MN, mn , do linii ziemskiej SA i od ich punktów przecięcia $l'l''$ z tą ostatnią, poprowadzić do niej prostopadłe aż do zejścia się z pomienionymi przedłużeniami. Otrzymaia się tym sposobem żądane punkta $L' L''$

Rzutem poziomym całej linii będzie $L' l'$ zaś pionowym $L'' l''$

Do tego zadania można przydać następujące zapytania:

1) Jaki jest warunek, żeby dwie linie przecięły się w przestrzeni.

Takie dwie linie mają wspólne współrzędne, lecz rozmaite położenia, muszą więc być ich równania:

$$y = ax + b$$

$$y = a'x + b'$$

odosobniwszy te współrzędne, wypadnie na ich wartość w danych rzeczach

$$x = \frac{b - b'}{a' - a}$$

$$y = \frac{a'b - ab'}{a' - a}$$

2) Przy-

2) Przydatnem jest także wiedzieć, jak wielką jest prostopadła p spuszczone od danego punktu na daną linię. Równaniem jednéj linii jest

$$y = ax + b$$

drugiey przez dany punkt przechodzącey do pierwszéj prostopadłéj

$$y - y' = -\frac{1}{a}(x - x')$$

$$\text{nakoniec } p = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}$$

trzeba w ostatniem równaniu podstawić zamiast x i y wartości znaiome, na ten koniec wystawmy pierwsze równanie pod taką postacią:

$$y - y' = ax + b - y'$$

a wtedy porównawszy go z drugiem równaniem i przyzwolicie przerobiwszy, otrzymamy:

$$p = \frac{y' - ax' - b}{\sqrt{1 + a^2}}$$

Za pomocą tego równania z łatwością wynaydzie się wartość kąta V fig. 3. iuż innym sposobem wynaleziona, (*) bo

E

ta p

(*) Z téj uwagi wynika, że podania Geometrii mogą być tłumaczone dwoma rozmaitemi sposobami:

ta p będzie styczną danego kąta

3) Mając daną linią przez dwa dane punkta przechodzącą, wyznaleść współrzędne punktu na nię, któryby od danego punktu była w pewną daną odległość.

Równaniem linii daney jest:

$$y - y' = a(x - x') \quad (1)$$

oddalenie dane $d = (x - x')^2 + (y - y')^2 \quad (2)$ podniosłszy (1) do kwadratu i włożywszy wartość $(y - y')$ do (2) otrzymamy

$$d^2 = (x - x')^2 + a^2 (x - x')^2 = (x - x')^2 \text{ ztąd}$$

$$x - x' = \pm \frac{z}{\sqrt{1 + a^2}} \text{ a te wartości wło-}$$

żywszy do (1) będzie

$$y - y' = \pm \frac{az}{\sqrt{1 + a^2}}$$

$$x = \pm \frac{z}{\sqrt{1 + a^2}} + x' \quad (3)$$

$$y =$$

Jedne do razu wynikać z równań linii, które zawierają w sobie żądane punkta, zaś drugie powstają z rozważania trójkątów podobnych i prostokątnych. Pierwszy sposób jest ogólniejszy i wyborniejszy, zaś drugi często prostszy. Wiele takowych zastosowań zawiera P. Puissant *Recueil des diverses propositions de géométrie* 2. Edition.

$$y = \pm \frac{z}{\sqrt{1 + a^2}} + y' \quad (4)$$

za pomocą równań (3) i (4) z równaniem dla koła $r^2 = x^2 + y^2 \quad (5)$ zachowując powyższy przepis dla rozwiązania zadań rozbiorowych, to jest składając trzy ostatnie równania, i przyzwolcie odprawiawszy przerobienie, odkrylibyśmy wiadome już z początkowey geometryi własności siecznych i cięciw przecinających się w kole, iakoż włożywszy x, y z równań (3) (4) (5), tracą one swą zmienność, dla wspólnego przecięcia linii daney z kołem, tak że z , stanie się odhaleniem między punktem danym i przecięciem na kole; podstawienie to wykazane da:

$$\frac{d^2}{1 + a^2} + \frac{2x'd}{1 + a^2} + x'^2 + \frac{a^2 z^2}{1 + a^2} + \frac{2ay'z}{1 + a^2} + y'^2 = r^2 \quad (6)$$

co przerobiwszy będzie:

$$d^2 + \frac{2(x'ay')z}{\sqrt{1 + a^2}} + x'^2 + y'^2 = 0$$

równanie drugiego stopnia wskazujące, że

linia prosta. tylko we dwóch punktach przecinać może koło, które to oddalenia są oraz dwoma pierwiastkami równania, ale przez siebie rozmnożone nie zawierają w sobie ani x ani y , będzie więc

$$dd' = x'^2 + \beta'^2 + r^2$$

podobnie dla drugiego sieczny od tegoż danego punktu poprowadzony byłoby

$$\delta\delta' = x'^2 + \beta'^2 - r^2 \text{ zaczęm } \delta\delta' = d'\delta'$$

$$d:\delta = \delta':d' \quad (7)$$

Przystąpmy do Planów:

Zadanie 4. Wynaleść równanie dla wspólnego przecięcia dwóch planów i o nich pochyłości.

Rozwiązanie rozbiorowe: 1) Równaniami tych dwóch planów są:

$$Ax + By + Cz = 0$$

$$A'x + B'y + C'z = 0$$

wziąwszy raz y drugi raz x za zero otrzymamy dla ich śladów:

$$Ax + Cz = 0 \text{ na planie } zx$$

$$By + Cz = 0 \text{ na planie } zy$$

lecz tychże śladów równaniami są:

$$x = az$$

$$y = bz$$

podsta-

podstawiając więc te ostatnie wartości z poprzedzających, otrzymamy:

$$\left. \begin{aligned} A &= -\frac{1}{a}C \\ B &= -\frac{1}{b}C \end{aligned} \right\} \text{ dla pierwszego planu.}$$

podobnież:

$$\left. \begin{aligned} A' &= -\frac{1}{a'}C \\ B' &= -\frac{1}{b'}C \end{aligned} \right\} \text{ dla drugiego planu}$$

takim jest warunek, iakiego wymaga nasze Zadanie.

2) Kąt zawarty między prostopadłemi spuszczonemi do obydwóch planów wyrażonych jest tenże sam, co i pochyłość planów.

Aby rzuty tych prostopadłych i ślady planów były do siebie prostopadłemi, trzeba żeby z Zad: 1 i 3 było

$$\left. \begin{aligned} A &= aC \\ L &= bC \end{aligned} \right\} \text{ i podobnież } \left. \begin{aligned} A' &= a'C \\ B' &= b'C \end{aligned} \right\}$$

Dla kąta zawartego między prostopadłemi do dwóch danych planów jest

cos

$$\cos V = \frac{1 + aa' + bb'}{\sqrt{1+a^2+b^2} \sqrt{1+a'^2+b'^2}}$$

Do tego równania włożywszy wartości $a' b'$ dopiero co wynalezione i przero-
biwszy, otrzymamy dla kąta pochyłości
dwóch planów $= \phi$

$$\cos \phi = \frac{AA' + BB' + CC'}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2}}$$

jeżeli te dwa plany mają być do siebie
prostopadłymi musi być:

$$AA' + BB' + CC' = 0$$

Jeżeli jeden z tych planów jest sa-
mymże planem xy dla którego jest

$$z = 0, \text{ będzie } A' = 0, B' = 0, C' = 1$$

nazwawszy ϕ' wartość, którą wtedy przy-
biera ϕ , będzie:

$$\cos \phi' = \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \quad \text{podobnie}$$

$$\cos \phi'' = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

$$\cos \phi''' = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Są to

Są to, oraz wartości kątów, które ro-
bi przekątna R z osiami z, y, x , i które
są dopełnieniami kątów pochyłości $\delta, \delta'', \delta'''$
które czyni linia R z iędy rzutami $R'R''R'''$
albo z planami xy, zx, zy .

Naykrócię otrzymalibyśmy te wyra-
żenia w wartościach x, y, z , któreśmy pod
fig: 1. umieścili, i które są w funkcyach
tychże kątów.

Rozwiązanie graficzne wyrażonem jest
na figurze.

Niech $R'R'', r'r''$ będą śladami dwóch
danych planów; przedłużywszy one aż do
zeyścia się w punktach $L'L''$, będą te o-
statnie punktami zey'cia się wspólnego
przecięcia planów z planami rzutowemi.

Spuściwszy prostopadłą $L'l'$ i ściągną-
wszy $L'l''$ jest ta śladem poziomym wspól-
nego planów przecięcia. Do téy przez
punkt M' poprowadziwszy prostopadłą $R'r'$
ta będzie podstawą trójkąta, do którego-
by wspólne przecięcie planów było pro-
stopadłem. — Idzie więc jeszcze o wykreśle-
nie tego trójkąta.

Na ten

Na ten koniec weźmy $l'n$ równą $L'l'$, i ściągniemy $L'n$; ta będzie nam wyrażać prawdziwą wielkość wspólnego przecięcia planów i jego pochyłość do $L'l'$.

Od punktu l' spuścimy $l'p$ prostopadłą do $L'n$ i przenieśmy ją na MP a ściągawszy PR' i Rr otrzymamy trójkąt i żądany kąt pochyłości $R'Pr'$.

Zadanie 5. Wynaaleść pochyłość linii do planu i wszelkie położenia, iakie mieć mogą linie i plany iedne względem drugich.

1) Niech będą

$$\begin{aligned} x &= az + \alpha \\ y &= bz + \beta \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} x &= az + \alpha \\ y &= bz + \beta \end{aligned}} \right\} \text{równania linii prostéy}$$

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad \text{równanie planu.}$$

Kąt pochyłości linii do planu iest tenże sam, co czyni taż linia z iéy rzutem na tymże planie (δ fig. 1). Jeżeli więc od iakiego iéy punktu spuścimy prostopadłą na plan rzutowy; kąt między nią i daną linią będzie dopełnieniem kąta szukanego. — Niech więc, będzie:

$$x =$$

$x = a'z + \alpha$) równaniami prostopadłéy
 $y = b'z + \beta$)
 będziemy mieli z (Zad. 4.)

$$A = aC, \quad B = bC$$

Kąt, który czyni z linią daną będąc dopełnieniem szukanego, mamy:

$$\sin \delta = \frac{1 + aa' + bb'}{\sqrt{(1+a^2+b^2)(A^2+B^2+C^2)}}$$

a położywszy wartości a' i b' otrzymamy

$$\sin \delta = \frac{Aa + Bb + C}{\sqrt{(1+a^2+b^2)(A^2+B^2+C^2)}}$$

dla $\delta = 0$, stałby się licznik

$$Aa + Bb + C = 0$$

za warunek, aby linia była od planu równoległą

Rozwiązanie graficzne iest toż samo, które wchodziło do początku zadania 4go, mianowicie żądanym kątem pochyłości iest kąt $l'nL''$.

Druga część zadania wyciąga równań dla wzajemnego położenia linii i planów względem siebie, które tu razem zbierzemy:

1) Plan prostopadły do iednego z planów współrzędnych; takim byłby każdy

z na-

z naszych planów przekątnych $RR' \cap R''$
 RR''' wyznaczonych przez kąty α, α, α''
 które czynią $R'R''R'''$ z osiami x, y, z .

2) *Linia prostopadła do planu.*

Niechby MN (fig. 1.) wyrażała linią
 w przestrzeni prostopadłą do $SP = p$ w ia-
 kimkolwiek punkcie; utworzy ona swym
 obrotem w około P plan prosto-
 padły do p . — Śladami tego planu prze-
 dłużonego do planów rzutowych niech bę-
 dą R', R'', R''' zaś $p' p'' p'''$ śladami pro-
 stopadły p . Z własności wspólnego przecię-
 cia dwóch planów prostopadłych do trze-
 ciego (Eucl: I. XI. p. 19) łatwo dowieść, że śla-
 dy dopiero co wyrażone linii i planów na
 jednymże planie rzutowym są do siebie
 także prostopadłe, to jest p' do R' p'' do
 R'' i p''' do R''' co wyiednywa korzyści w
 wykreśleniu.

Jdź tu jeszcze o wynalezienie wyra-
 żenia analitycznego dla tego warunku.
 Na ten koniec niech będą

$$\left. \begin{aligned} x &= az + \alpha \\ y &= bz + \beta \end{aligned} \right\} \text{równanie linii (1)}$$

Ax

$$Ax + By + Cz + D = 0 \text{ równaniem planu (2)}$$

wziąwszy $y = 0$ otrzymamy dla śladu R''
 $Ax + Cz + D = 0$; z kąd $z = -\frac{Ax + D}{C}$ (3)

lecz z (1) jest $z = \frac{x}{a} - \frac{\alpha}{a}$

trzeba więc z (Zad: 2), aby współczyn-
 nik iednego x był równy do iedności po-
 dzielony przez współczynnika drugiego
 x , ze znakiem przeciwnym, to jest musi
 być warunek $\frac{A}{C} = a$ czyli $A = aC$ podo-

bnież, wzięwszy drugie równanie z (1)
 musi być $B = bC$

3) *Warunek, aby linią do planu by-
 ła równoodległą musi być:*

$$Aa + Bb + C = 0$$

co do razu wynika z wyrażenia dla cos δ
 (Zad: 5 n. 1.)

4) *Warunek dla dwóch planów rów-
 noległych. — Niech będą:*

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

$$A'x + B'y + C'z + D' = 0$$

równaniami dwóch planów.

Ślady

Ślady ich muszą także być równoległymi na jednymże planie rzutowym. — Na planie zx byłyby te z ostatnich równań:

$$z = -\frac{A}{C}x - \frac{D}{C}; \quad z = -\frac{A'}{C'}x - \frac{D'}{C'}$$

aby te ślady były równoległymi, trzeba znowu z Zad. 2. żeby

$$\frac{A}{C} = \frac{A'}{C'}$$

podobnie $\frac{B}{C} = \frac{B'}{C'}; \quad \frac{A}{B} = \frac{A'}{B'}$

5) *Warunek, aby dwie linie zeszły się w przestrzeni*

Równaniami tych dwóch linii są:

$$x = az + \alpha \quad y = bz + \beta \quad (1)$$

$$x = a'z + \alpha' \quad y = b'z + \beta' \quad (2)$$

Współrzędne powinny być też same w punkcie przecięcia, wyrugowawszy zmienne x, y, z , po odciagnieniu (2) od (1) znajdziemy:

$$(a - a')z + \alpha - \alpha' = 0 \quad (3)$$

$$(b - b')z + \beta - \beta' = 0 \quad (4)$$

gdy wyrugowawszy z w równaniach (3) i (4) otrzymamy:

(4)

$(\alpha - \alpha')(b' - b) - (\beta - \beta')(a' - a) = 0$ na żądany warunek.

Podstawiając wartość z (3) do pierwszego z równań (1) i podobnie z (4) do (2) wyznaczemy współrzędne punktu wspólnego przecięcia, temi będą:

$$x = \frac{a\alpha' - a'\alpha}{a - a'}$$

$$y = \frac{b\beta' - b'\beta}{b - b'}$$

$$z = \frac{\alpha' - \alpha}{a - a'}$$

Skoro $a' = a$ i $b' = b$ staną się te wartości nieskończonemi; to jest dwie te linie schodzą się w punkcie nieskończenia dalekim, czyli są równoległymi.

Zadanie 6. Poprowadzić plan przez trzy punkta dane.

Rozwiązanie rozbiórowe. Współrzędnymi tych trzech punktów są:

$$x', y', z; \quad x'', y'', z''; \quad x''', y''', z'''$$

położąwszy te coraz zamiast x, y, z , w równaniu planu, otrzymamy trzy następujące równania:

Ax'

$$\begin{aligned} Ax' + By' + Cz' + D &= 0 \\ Ax'' + By'' + Cz'' + D &= 0 \\ Ax''' + By''' + Cz''' + D &= 0 \end{aligned}$$

za pomocą których zwyczajnym rugowaniem wyznaczają się wielkości:

$$\begin{aligned} A &= y'(z'' - z''') - y'''(z' - z'') + y'''(z' - z'') \\ B &= z'(x'' - x''') - z'''(x' - x'') + z'''(x' - x'') \\ C &= x'(y'' - y''') - x'''(y' - y'') + x'''(y' - y'') \\ D &= x'(y'z'' - y'''z') - x'''(y'z'' - y'''z') \\ &\quad + x'''(y''z''' - y'''z'') \end{aligned}$$

Rozwiązanie graficzne zasada się na Zadaniu 3: to jest idzie tu tylko o wyznaczenie wspólnego przecięcia z planami rzutowymi linii przez dane punkta w przestrzeni poprowadzonych, co się łatwo za pomocą ich punktów rzutowych odbywa. — Przedłużenie odpowiadających boków do linii ziemi da wierzchołki śladów żądanego planu.

Z tém zadaniem jest w związku inne ogólniejsze: poprowadzić linię krzywą przez punkta dane. — Niechby temi punktami były $M' M'' M''' M''''$ i onych współrzędne

$$\begin{matrix} x' & x'' & x''' & x'''' \\ y' & y'' & y''' & y'''' \end{matrix}$$

śluszném

Śluszném jest zdanie *La Granza*, że uważać można linie krzywe najprościęjsze takie, które są wyrażone funkcją całkowitą i współmierną odcinka, iak:

$$y = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \dots$$

Krzywe takowe nazywają się w ogólności parabolicznymi. — Można ich użyć do teoryi składania równań i stopniowania linii krzywych. — Jakoż między punktami krzywych i onych współrzędnymi taki zachodzi związek:

$$y' = A + Bx' + Cx'^2 + Dx'^3 + \dots$$

$$y'' = A + Bx'' + Cx''^2 + Dx''^3 + \dots \quad (1)$$

$$y''' = A + Bx''' + Cx'''^2 + Dx'''^3 + \dots$$

$$y'''' = A + Bx'''' + Cx''''^2 + Dx''''^3 + \dots$$

z których zwyczajnym rugowaniem dla pierwszego stopnia otrzymałyby się współczynniki A, B, C, D . Współczynniki te otrzymałyby się ieszcze prostszym sposobem, iakoż odciągawszy równania te iednie od drugich, podzieliwszy one przez $x'' - x'$; $x''' - x''$, $x'''' - x'''$, a dla skrócenia nazwawszy

$$\frac{y'' - y'}{x'' - x'} = y'; \quad \frac{y''' - y''}{x''' - x''} = y''; \quad \frac{y'''' - y'''}{x'''' - x'''} = y'''$$

otrzymamy:

$$y' =$$

$$\begin{aligned}\gamma' &= B + C(x'' - x') + D(x''^2 + x''x' + x'^2) + \dots \\ \gamma'' &= B + C(x''' - x'') + D(x'''^2 + x'''x'' + x''^2) + \dots \quad (2) \\ \gamma''' &= B + C(x'''' - x''') + D(x''''^2 + x''''x''' + x'''^2) + \dots\end{aligned}$$

Odciągnąwszy te równania tak iak wprzód i nazwawszy dla skrócenia

$$\frac{\gamma'' - \gamma'}{x''' - x'} = \delta; \quad \frac{\gamma''' - \gamma''}{x'''' - x''} = \delta' \quad \text{będzie}$$

$$\begin{aligned}\delta C &= D(x''' + x'' + x') \\ \delta' C &= D(x'''' + x''' + x'')\end{aligned} \text{ i znajdziemy}$$

$$D = \frac{\delta' - \delta}{x'' - x'} \text{ i tak dalej}$$

Widziemy ztąd, że wartości A, B, C, D , otrzymują się, zaczynając od ostatniej. — Niechby n.p. ostatnią była

$$C = \frac{\gamma'' - \gamma'}{x''' - x'} \text{ albo co na iedno}$$

wychodzi; dajmy na to, że mamy tylko do wyznaczenia trzy punkta $M'M''M'''$ dla których iest równanie

$$\gamma = A + Bx + Cx^2$$

włożywszy wartość C do równań (2), w których nie będzie wyrazów gdzie wchodzi D , otrzymamy:

$$B = \gamma' - \delta = x'' - \delta x'$$

Podsta-

Podstawiawszy podobnie wartości C i B w równania (1)

$\gamma' = A + Bx' + Cx'^2$ otrzymamy po przerobieniu:

$$A = \gamma' - \gamma'x - \delta'x'x''$$

a umieściwszy wartości A, B, C , w daném równaniu wypadnie:

$$\gamma = \gamma' + \gamma'(x - x') + \delta'(x - x')(x - x'') \quad (4)$$

dla czwartego punktu byłby czwarty wyraz: $\varepsilon(x - x')(x - x'')(x - x''')$ i t. d. — Le Grange, który przytacza toż rozwiązanie podług Newtona (Cahiers de l'Ecole Normale) otrzymuje ieszcze większy stopień prostoty, służący oraz do Interpolacji.

Ponieważ mówi ten sławny miernik musi γ stać się $\gamma', \gamma'', \gamma'''$ skoro x staie się x', x'', x''' musi więc γ otrzymać kształt:

$$\gamma = A'\gamma' + B'\gamma'' + C'\gamma''' \quad (5)$$

w czém wielkości A', B', C' muszą zawierać w sobie x , tak że skoro stanie się $x = x'$ musi być $A' = 1; B' = 0, C' = 0$;

podobnie wzięwszy $x = x''$ musi być $A' = 0; B' = 1; C' = 0$ wzięwszy $x = x'''$ musi być $A' = 0; B' = 0; C' = 1$; ztąd łatwo wniesć można, że wartości A', B', C' muszą mieć

F

A'

$$A' = \frac{(x-x'')(x-x''')(x-x''')}{(x'-x'')(x'-x''')(x'-x''')}$$

$$B' = \frac{(x-x'')(x-x''')(x-x''')}{(x'-x'')(x'-x''')(x'-x''')}$$

$$C' = \frac{(x-x'')(x-x''')(x-x''')}{(x'''-x'')(x'''-x'')(x'''-x''')}$$

biorąc tyleż czynników w licznikach i w mianownikach ile będzie punktów danych linii krzywey mniéy iednym.

Ostatnie to wyrażenie (5) dla γ (mówi daley La Grange) chociaż w kształcie odmiennym od pierwszego, na iedno wszelako wychodzi, iak się o tém rachunkiem przekonać można, rozwiaiając wartości γ, δ, ϵ , i szukając wyrazu podług wielkości $\gamma', \gamma'', \gamma'''$, lecz przekłada się dla prostoty rozbioru, na którym się zasada, i iuż samym swym kształtem daleko wygodniéjszym iest do rachunku. Wynika ztąd, że można wykreślić geometrycznie tyle pośrednich wyrazów iakiegokolwiek szeregu, ile się podobać będzie: co iest bardzo pożyteczném do wypełnienia luk, mogących się znajdować w ciągu obserwacyi, a. b. doświadczeń, albo w tablicach

each wyrachowanych za pomocą formuł, lub danych wykreśleń. Na tém polega metod interpolacyi.

Zadanie 7. Wynaieść naykrótsze oddalenie dwóch linii w przestrzeni i onych pochyłość.

fig: 1. Rozwiązanie. Niech temi dwoma liniami będą SA i CP'

1) Poprowadźmy przez C i SA plan, i drugi przez SA do niego prostopadły i przecinający drugą linią w P' dokończmy prostokąt $SAP'B$, i ściagniemy CB do téy ostatniéy, spuścimy od S prostopadłą p ; ta będzie żądanem oddaleniem linii SA i CP' . — Jakoż skracając nasze wyrażenia, i przywódcząc one do tosamości, mamy $CP = R, CB = R''$; niech do tego będzie $SA = a, SB = b, SC = c$.

Ponieważ a iest prostopadłą do b i c , więc iest także prostopadłą do p ; poprowadźmy w planie CBP' przez spodek p równoległą p' do BP' aż do zeyścia się z CP' i dokończmy prostokąt z pp' ; będzie ieszcze p' równoległą od SA i piéty oddaleniem odpomienionego punktu przecięcia na CP'

Będzie zaś to oddalenie najkrótszém gdyż każda inna linia od S do CB po prowadzona byłaby przeciwprostokątną w trójkącie prostokątnym, w którym p jest katetą.

$$\text{Trójkąt } CSB = \frac{R'''p}{2} bc \text{ zaczęm}$$

$$p = \frac{bc^2}{\sqrt{b^2+c^2}}$$

1) Nazwiemy kąt $CP'B = A$ jest

$$\cos A = \frac{a}{R\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \quad \text{albo}$$

$$\sin A = \frac{R'''}{R} = \frac{\sqrt{b^2+c^2}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \quad \text{z tąd}$$

$$\cotg A = \frac{a}{\sqrt{b^2+c^2}}$$

Toż Zadanie można ieszcze rozwiązać za pomocą rachunku różnicowego (Ob.) *Puissant Rec: 2. Ed. p. 427. i l' Appl. de l' Al. à la Géom. des surfaces par MM. Monge et Hachette prob. IV.*

Roz-

Rozwiązanie graficzne tego zadania zawiera w sobie wszystkie poprzedzające zadania geometryi wykreślnéj, i łatwo z wyrażonych dopiero równań wykonaném bydź może; takie zaś jest do niego przygotowane:

fig: 8. Niech będą dwie iakiekolwiek nie-schodzące się w przestrzeni linie AB i CD które dla krotkości nazwiemy pierwszą (D) drugą (D')

Jakiémkolwiek bądź jest ich położenie, można przez iaki punkt A pierwszy poprowadzić równoległą AL' do CD' , czém się wyznaczy plan BAL' równoległy od CD' , nazwiemy go L' . Do tego spuścimy drugi plan prostopadły $CD'EF$, który nazwiemy L'' , musi wspólne obydwóch przecięcie EF przeciąć pierwszą linią AB w jakim punkcie D , od którego wyprowadzona prostopadła DH do AB w trzecim planie L''' przechodzącym przez AB i prostopadłym do L' , będzie oraz wspólném przecięciem planów L'' L''' , i wyznaczy

czy żądane najkrótsze oddalenie p dwóch linii danych. Niezostało teraz tylko wykonać w rzutach te działania iedno po drugim.

Niech będą rzutami pierwszhey linii AB, ab , drugiey CD, cd . Używszy wykreślenia zadania należącego do fig. 4tęy i 5tęy otrzymamy ślady $hk, h'k'$ planu L' przechodzącego przez punkt A , w których przecina plany xy , i zx ; taki oraz że plan L' będzie równoodległym od (D') . Trzeba teraz przez (D') poprowadzić plan L'' prostopadły do L' . Że ślady tych dwóch planów muszą być także do siebie prostopadłemi; spuścimy więc od dwóch odpowiadających sobie punktów rzutowych C i c drugiey linii (D') prostopadłe CK, ck' , te będą rzutami najkrótszego oddalenia linii (D') od planu L' czyli linii p .

Trzeba nakoniec wyznaleść N i n rzuty spodku prostopadłey p i onę długość co do sazu widać z figu: 8 i 6.

Jeżeli przetniemy Równoległoscian prostokątny planem prostokątnym $R'R''R'''$ czyli przechodzącym przez końce współrzędnych x, y, z , otrzymamy:

Ostrosłup trójkątny.

którego szczególne rozwiązanie, równie iak Równoległoscianiu prostokątnego, do ważnych zaprowadzi nas odkryć.

fig. 9. 1) Spuścimy od S prostopadłą $SM=P$ na ścianę przeciwprostokątną ABC . Przez SM i SC poprowadźmy plan; będą SR' i CR' iego wspólnemi przecięciami z planami xy i ABC . Wysokość MN w trójkącie prostokątnym SMR' podzieli go na dwa inne prostokątne podobne. W nich będzie kąt Z czyli dopełnienie pochyłości linii P do planu xy , równym pochyłości p' planu do niey prostopadłego, z tymże planem rzutowym; toż i o innych planach rzutowych mówić można: tak że jeżeli nazwiemy $\delta, \delta', \delta''$ kąty pochyłości linii P do planów rzutowych, X, Y, Z , kąty zawarte między P i współrzędnymi, będą ostatnie dopełnieniem pierwszych i równemi kątom pochyłości, które czyni plan przeciwprostokątny z ścianami rzutowemi.

2) Wynika ztąd dalej, że spuściwszy
od

od końców współrzędnych x, y, z , prostopadłe na P stanie się:

$$\begin{aligned} P &= x \cos X + y \cos Y + z \cos Z \\ &= x \cos p' + y \cos p'' + z \cos p''' \\ r &= \cos^2 p' + \cos^2 p'' + \cos^2 p''' \end{aligned}$$

Gdybyśmy od środka P wyprowadzili plan do niego prostopadły, byłoby jego położenie zupełnie wyznaczonem, i byłby oraz miejscem jeometrycznem, którego każdy punkt stałby się zarówno oddalonym od obydwóch końców SM linii P (Geometr: *Lhuillier* St. 20.)

Taką jest definicya planu przez *Le Français* z którego także piękne wnioski wywodzi się dorazu.

3) Nazwawszy S trójkąt przeciwprostokątny ABC , zaś S' S'' S''' jego trójkąty rzutowe mamy:

$$S : S' = CR' : SR' = 1 : \cos p' \text{ ztąd}$$

$$S' = S \cos p' \quad \text{podobnież.}$$

$$S'' = S \cos p''$$

$$S''' = S \cos p'''$$

tych wzięwszy kwadraty i dodawszy wypada S

S^2

$$S^2 = S'^2 + S''^2 + S'''^2$$

Podane to równanie tak jest wzorowem dla teoryi powierzchni krzywych, iak twierdzenie Pytagoresa dla linii krzywych.

Na wzmiance nowych tych własności figur przestać tu musimy, stanowią one nowy nabytek Matematyki znany pod nazwiskiem *Poliedrometryi*, która wiele pięknych twierdzeń winna jest PP. *Carnot* i *Lhuillier* autorowi wybornych oyczy-stych elementów Matematyki.

P. De Gua w rocznikach Akademii Paryzkiej na rok 1783. był już dowiodł szczególny przypadek umieszczony pod fig: 9, lecz PP. *Lhuillier* i *Carnot* są najpierwsi, którzy go pod nayogólniejszą wystawili postacią; pierwszy w swęy *Poliedrometryi* (podanęy Instytutowi Francuzkiemu w T. 1. Róczników) drugi w swęy *Géometrie de position*.

Winniśmy ieszcze *P. Lhuillier* piękna własność środka ciężkości w wielościanie, którą także za pomocą *Poliedrometryi* dowieść można. (Ob Pamiętniki Berlińskie na r. 1786.)

4) Gdybyśmy od wierzchołka S zato czyli promieniami równymi łuki na trzech ścianach $S'S''S'''$ kończące się na ich krawędziach te utworzyłyby trójkąt kulisty ABC , którego by kąty A, B, C , były równymi kątom p', p'', p''' , zaś boki przeciwległe a, b, c , czyli nakręślone boki miałyby każdy po 90° równie jak kąty p', p'', p''' .

Gdyby więc krawędzie x, y, z , nie były do siebie prostopadłymi, zaczęłby ostrosłup trójkątny iakikolwiek, podałby ten powód do następującego fundamentalnego Trygonometrii kulistey

Zadania 8: Mając cztery linie a, b, c, ρ wychodzące od iednegoż punktu S w przestrzeni, i przypuśćmy, że trzy pierwsze a, b, c , tworzą iakikolwiek kąt bryłowy, szukaymy związku iaki mają między sobą kąty, którą czyni czwarta ρ z każdą z pierwszych.

Naprzód łatwo dowieść, że jeżeli przez iakikolwiek punkt M linii ρ poprowadzimy plan prostopadły do ρ ; plan ten przecinie trzy inne linie a, b, c , w punktach A, B, C , które mogą być uważane iak wierz-

wierzchołki kątów podstawy ostrosłupa trójkątnego $SABC$.

Niech będą M, N, P, Q powierzchnie czterech trójkątów, które są ścianami ostrosłupa trójkątnego; m kąt ścian NiP , n kąt ścian MiP , p kąt ścian MiN będzie.

$$Q^2 = M^2 + N^2 + P^2 - 2PN \cos m - 2PM \cos n - 2MN \cos p \quad (*)$$

Niech do tego (ρ, a) wyraża kąt, który czyni linia ρ z krawędzią a ostrosłupa (ρ, ab) kąt téyże linii z planem ab ac niech znaczy kąt pochyłości tych ścian mających wspólne krawędzi a , i t. d. nakoniec nazwawszy σ powierzchnią podstawy ABC i pomniąc na to, że powierzchnia trójkąta równa połowie wieloczynu z dwóch boków iegoorozmnożonemu przez wsta-

(*) Wyrażenie to ściągą się do iakiegokolwiek ostrosłupa czyli iakiéykolwiek figury służący za podstawę iego, iak to okazał Carnot w swoim dziele *Géométrie de positi* n p. 420.

wstawę kąta między niemi zawartego otrzymamy:

$$c = \frac{\cos^2(\rho, a) + \cos^2(\rho, b) + \frac{c}{\sin^2(c, ab)} \cos^2(\rho, c)}{\sin^2(a, bc) \sin^2(b, ac) \sin^2(c, ab)} \\ + \frac{2 \cos(\rho, a) \cos(\rho, b) \cos(ac, bc)}{\sin(a, bc) \sin(b, ac)} \\ - \frac{2 \cos(\rho, a) \cos(\rho, c) \cos(ab, bc)}{\sin(a, bc) \sin(c, ab)} \\ - \frac{\cos(\rho, b) \cos(\rho, c) \cos(ab, ac)}{\sin(b, ac) \sin(c, ab)}$$

Takim jest ogólny związek, jaki zachodzi między czterema liniami naszego zadania.

Dowodzenie P. Puissant tego ważnego równania znajduje się w 2. Tomie *Corresp. sur l'école polytechnique* p. 406. — Inne. P. Français, T. 1. p. 338.

Użyć go można do rozwiązania rozbiorem sposobem zadania; Wyznaczyć kulę, któraby się dotykała czterech kul danych.

Połą-

Połączając korzyści znanego (*) rysunkowego rozwiązania z teorią i przedmiotami naszymi astronomicznymi, okażemy one razem w krótkości na starożytnym

Annalemm

które zaprowadzi jeszcze nas do wynalezienia fundamentalnego równania całej Trygonometrii Kulistej. — Fig: 11. jest nie- iako powtórzeniem fig. 5. Tab. I.

Przyłączmy do niej półkole na FG czyli *równoleżnik*; półkole na KL czyli *półkole wysokości* (almucantarath). Pościągawszy linie wyrażone na figurze, i nazwawszy dla skrócenia w trójkącie kulistym ZPS (fig. 7. Tab. I.)

$D = PZ =$ dopełnienia szerokości geograficznej ($PN = \Phi$)

$\Delta = PG$. . zboczenia gwiazdy ($FE = \delta$)

$Z = ZK$. . wysokości gwiazdy ($KH = h$)

P kąt godzinowy, A azymut, S , kąt odmiaru; będzie RQS wyrażać kąt godzinowy; szukamy dla niego wyrażenia:

$$\text{w } \Delta \text{ cie } RrW \text{ jest } RW = \frac{\sin h}{\cos \Phi}$$

(*) Ob. Rzecz: F. Jarockiego z powtórzeniem tu fig. 10 i inne przypadki *Corr. de l'école polyt.* T. 1. p. 41.

w Δ cie CQW iest $QW = CQ \operatorname{tg} \phi = \frac{\sin \delta \sin \phi}{\cos \phi}$

zaczém $RW - QW = RQ = \frac{\sin h - \sin \delta \sin \phi}{\cos \phi}$

$$\frac{\cos Z - \cos \Delta \cos D}{\sin D}$$

lecz $RQ = SQ \cos P \sin \Delta \cos P$ więc

$$\cos P = \frac{\cos Z - \cos D \cos \Delta}{\sin D \sin \Delta} \quad (1) \text{ a ztąd}$$

$$\cos Z = \cos D \cos \Delta + \sin D \sin \Delta \cos P \quad (2)$$

Takiem jest fundamentalne cały trygonometrii kulistey równanie, wyrażone w rzeczach bezśrednie danych miałyby taką postać:

$$\sin h = \sin \phi \sin \delta + \cos \phi \cos \delta \cos P \quad (3)$$

elementarne zaś jego wyrażenie stósowane do trójkąta kulistego, którego by kąty były A, B, C , zaś boki a, b, c , takim byłoby:

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$$

formuła (1) może mieć jeszcze taką postać

$$\cos P = \frac{\sin h - \sin \phi \sin \delta}{\cos \phi \cos \delta}$$

położywszy tu $h = 0$ dla gwiazdy na poziomie otrzymamy:

cos

$\cos P = -\operatorname{tg} \phi \operatorname{tg} \delta = -\operatorname{tg} \phi \cotg \Delta \quad (4)$
dla wyrażenia łuku półdniowego FSF' .
Będzie ten zawsze większym od 90° skoro $\Delta < 90^\circ$

Nadmiar ten albo niedomiar do 90° lub do 6^h iak tu $P'F'$ stanowi różnicę wznieszenia się prostego (differentio ascensionalis): dla téy więc będzie

$$\sin \text{diff: ascens:} = \operatorname{tang} \phi \cotg \Delta \quad (5)$$

Dla kąta azymutowego byłoby iak dla kąta godzinowego

$$\begin{aligned} \cos A &= \frac{\cos \Delta - \cos D \cos Z}{\sin D \sin Z} \\ &= \frac{\cos \Delta - \sin \phi \sin h}{\cos \phi \cos h} \end{aligned}$$

dla $h = 0$ stanie się

$$\cos A = \frac{\cos \Delta}{\cos \phi}$$

jest tu A azymutem dla chwili wschodu albo zachodu gwiazdy, a jego dopełnieniem OF' obszerność wschodnia (*amplitudo ortiva*); dla niego jest

$$\sin \text{ampl: ortivæ vel occiduae} = \frac{\cos \Delta}{\cos \phi} \quad (6)$$

w for-

w formule (3) wzięwszy $\cos P = 1 - 2 \sin^2 \frac{1}{2} P$
i przerobiwszy ją stanie się

$$\sin h = \cos (D + \Delta) - 2 \sin D \sin \Delta \sin^2 \frac{1}{2} P \quad (7)$$

wzięwszy tu $P = 0$, stanie się wtedy h największą, to jest w czasie górowania gwiazdy: — najmniejszą stałaby się ta wysokość dla $P = 180$ czyli dla przechodu północnego, bo wtedy jest $\sin \frac{1}{2} P = \sin 90^\circ = 1$

W górnym zaś przechodzie są dwa przypadki; może bowiem przechód ten być w półkuli północnej albo południowej —

w pierwszym jest $h = \phi + \Delta$

w drugim — $h = 180 - (\phi + \Delta)$

podług tego iak $\phi + \Delta > < 90^\circ$

dla przechodu północnego jest

$$\sin h \sin (\phi - \Delta)$$

zaczem wysokość pod biegunem staie się ujemną, czyli pada pod poziomem skoro $\Delta > \phi$

Dla wprawy i większego interessu tak w rozwiązaniach rysunkowych iako też rachunkowych, dobrze jest czynić zastósowania rzeczywiste, zwłaszcza na przykładach oyczystych, których dostarczą wspomnio-

mnio-

mnione wyżej *Observationes biduae* i *Rozprawa o Zaćmieniach*.

Dostarczają też obserwacje oraz przykłady użycia skróceń rachunkowych w użyciu Tablic logarytmowych do rachunku trójkątów kulistych, tudzież tablic astronomicznych, bez których w Astronomii kulisto - rachunkowej obeyść się nie można.

Mamy więc dwoiaki sposób wyznaczenia punktów na ziemi, to jest *trygonometryczny* i *rozbiorowy*. Lecz często wypada stósować te punkta do rozmaitych planów; ztąd widać iak jest potrzebną.

Zamiana Współrzędnych.

Jest ona wielkiego oraz użytku w całej Matematyce, zaś szczególniej w teorii linii krzywych.

Najczęścię zdarzającym się przypadkiem w Astronomii jest ten, gdy jest zachowany system współrzędnych prostokątnych, wychodzących od wspólnego punktu początkowego.

(fig. 12.) Niech SAP' wyraża plan równika, $PP' = A$ plan do niego prostopadły.

G

dł. Do tego niech Sy będzie kierunkiem osi x do znaku równonocnego wiosennego, $SA = x$, $AP' = y$, $PP' = z$, $SC = x'$, $P'C = y'$, $PP' = z' = z$

Nazwiemy pierwsze współrzędne x, y, z dawnymi; zaś drugie x', y', z' nowymi i niech α będzie kąt między nimi zawarty stanie się

$$1) x = BS \cos \alpha = (CS - BC) \cos \alpha \\ = (x' - y' \operatorname{tg} \alpha) \cos \alpha = x' \cos \alpha - y' \sin \alpha \quad (1)$$

$$y = P'B + BA = \frac{y}{\cos \alpha} + x \operatorname{tang} \alpha \\ = y' \cos \alpha + x' \sin \alpha$$

Gdybyśmy wzajemnie chcieli mieć wartości nowych współrzędnych w funkcji tegoż kąta α między x i x' zawartego, otrzymalibyśmy te znanym sposobem rugowania, to jest rozmnożywszy pierwsze równanie przez $\cos \alpha$ zaś drugie przez $\sin \alpha$ i dodawszy potem obydwa, stanie się tak:

$$\left. \begin{aligned} x' &= x \cos \alpha + y \sin \alpha \\ y' &= y \cos \alpha - x \sin \alpha \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

2) Wystawmy sobie dany plan obracający się wokół x tak żeby był do pier-

wszego położenia nachylonym pod kątem ε (jak jest n.p. Ekliptyka do Równika).

Spuszczona prostopadła od tegoż samego punktu w przestrzeni P , będzie teraz $PP'' = z$; nowymi zaś współrzędnymi prostopadłymi są teraz $SA, AP'', PP'' = x', y', z'$ w czym $x = x'$. Dla podobieństwa trójkątów $PP''D$ i $DP'A$ jest $P = A = \varepsilon$, wzięwszy więc znowu jak wprzód wartości części nowych i dawnych współrzędnych i przerobiwszy otrzymamy:

$$\left. \begin{aligned} y &= y' \cos \varepsilon - z' \sin \varepsilon \\ z &= z' \cos \varepsilon + y' \sin \varepsilon \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

i odwrotnie używszy zwyczajnego rugowania będzie:

$$\left. \begin{aligned} y' &= y \cos \varepsilon + z \sin \varepsilon \\ z' &= z \cos \varepsilon - y \sin \varepsilon \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

(Takiem jest dowodzenie formuł użytych w Rozprawie o Zaćmieniach.)

Najprostsza odmiana, którą można zrobić z systemem współrzędnych, jest to przenieść ich początek na inny punkt i zostawić nowe osie równoległymi do dawnych.

Nazwawszy więc x', y', z' współrzędne przydatne punktu drugiego systemu, zaś a, b, c , te które należą do nowego początku będziemy mieli

$$x = x' + a; y = y' + b; z = z' + c \quad (I)$$

Lecz aby objąć w całej swęj ogólności zadanie zamiany współrzędnych weźmy na pierwszy system współrzędnych ukośnokątnych x, y, z , i dla drugiego systemu t, u, v , szukamy pierwszych współrzędnych w wartościach ostatnich, uważając obydwa systemy jako ściągające się do jednego punktu w przestrzeni i do jednego początku.

Na ten koniec wystawmy sobie, że przez końce współrzędnych x', y', z' są poprowadzone płany równoległe od y, z , tych planów będzie cztery, a oddalenie ich od planu yz będzie oczywiście $x' \sin(x', yz)$; (*) $y' \sin(y', yz)$; $z' \sin(z', yz)$; $x \sin(x, yz)$. —

Lecz ostatnie to oddalenie składa się z sum-

(*) Notacya takowa kątów pochyłości linii do planów i między sobą, podaną jest naysprawniej do Carnota (Géom: de position.)

summy trzech innych, iakieśmy to widzieli na fig: 1. szukając równania planu za pomocą R , więc

$$\begin{aligned} x \sin(x, yz) &= x' \sin(x', yz) \\ &+ y' \sin(y', yz) + z' \sin(z', yz) \text{ podobnież} \\ y \sin(y, xz) &= x' \sin(x', xz) \\ &+ y' \sin(y', xz) + z' \sin(z', xz). \quad (II) \\ z \sin(z, xy) &= x' \sin(x', xy) \\ &+ y' \sin(y', xy) + z' \sin(z', xy). \end{aligned}$$

Formuły te bardzo proste i symetryczne, służą skoro znamy kąty iakie czynią nowe osie z planami współrzędnymi pierwiastkowemi.

Gdyby tylko pierwiastkowe osie były do siebie prostopadłemi, mielibyśmy:

$$\left. \begin{aligned} x &= x' \cos(x', x) + y' \cos(y', x) + z' \cos(z', x) \\ y &= x' \cos(x', y) + y' \cos(y', y) + z' \cos(z', y) \\ z &= x' \cos(x', z) + y' \cos(y', z) + z' \cos(z', z) \end{aligned} \right\} \quad (III)$$

Dalsze rozwinięcie pięknych tych formuł, i szczególnych przypadków znajdzie czytelnik w drugiem wydaniu dzieła P. Puissant (Recueil de diverses propositions de Géometrie.)

Używa się ieszcze bardzo często współrzędnych biegunowych. Nazwawszy pro-

mień

mień wodzący r zaś ϕ kąt, który czyni z osią x mamy:

$$x = r \cos \phi; y = r \sin \phi$$

i wzajemnie przyjdziemy do równania między x i y podstawiając w równaniu krzy-

wéy $\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ zamiast $\sin \phi$

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \text{ zamiast } \cos \phi$$

Użycie zamiany współrzędnych jest bardzo przydatnem w dochodzeniu własności krzywych linii i powierzchni ich obrotom utworzonych. Rozważania takowe są dopełnieniem Geometrii rozbirowej. Za pomocą téj odmiany przerobione

Ogólne równanie drugiego stopnia o dwóch zmiennych.

$$ay^2 + bxy + cx^2 + dy + ex + f = 0 \quad (A)$$

daie powód i nieiako klucz do nowych odkryć tyczących się linii krzywych, równie iak równanie algebraiczne pierwszego stopnia o dwóch zmiennych podało nam sposoby do odkrycia własności linii prostych i planów, w przestrzeni. — O.

swobo.

swobodziwszy y w równaniu (A) otrzymalibyśmy:

$$y = -\frac{1}{2a}(bx + d) \quad (B)$$

$+\frac{1}{2a}\sqrt{(b^2-4ac)x^2+2(bd-2ae)x+d^2-4af}$
Już sam kształt tego równania przedstawia buyność źródła do rozważania i wniosków rozlicznych.

Zajmuje one rozmaite kształty krzywych w siebie wchodzących i rozchodzących się w odnogach nieskończonych, iakimi są krzywe ze środkiem czyli elliptyczne, Parabole, Hyperbole. — Cechowane są te podług tego znamienia iak $4ac$ iest $> = <$ od b^2 . Lecz za użyciem zamiany współrzędnych przywodzi się równanie (A) do bardzo prostego kształtu

$$y^2 = mx + nx^2 \quad (C)$$

służącego dla Paraboli, Ellipsy albo Hyperboli, podług tego iak weźmiemy $n = 0$, n ujemnym albo n przydałym.

Równanie drugiego stopnia o trzech zmiennych

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fxy + Gz + Hy + Kx + L = 0 \quad (D)$$

albo skracaiać

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dz + Ey + Fx + G = 0 \quad (D')$$

Zajmuie ieszcze wyższe stanowisko i ogólniejsze względy, bo te ściągaia się do trzech wymiarów.

Zazwyczaj kładą się równania (A) (D) na wstępie, bez okazania wprzód początku zkąd się wzięły; któremu zarzutowi szkodliwé dla poczynaiącego dowolności, nie podlega dzieło naszego rodaka. (*)

Dobrze nawet iest tu przypomnieć sobie równoległobok Newtona, który z Teoryą szeregów nieskończonych, posłużył mu do uczynienia najpierwéj postępu w téj materyi, którą wydał w swém dziele:

(*) *J. Sniadeckiego. Rachunku algebraicznego Teorya przystosowana do linii krzywych* T. II. w Krakowie 1783. i

Antoniego Wyrwiczka. Początki geometryi analityczney zastosowaney do linii krzywych P. Biot z 5go wydania na polski ięzyk przełożone. w Wilnie 1819 r. 8vo.

Dwa te dzieła oszczędzają nam rozwodzenie się w tym przedmiocie.

le: *Enumeratio linearum tertii ordinis*. Skrócony ten wzór czyli tak nazwany trójkąt analityczny *Paskala*, taki ma kształt:

A	b.						B
	1	x	x ²	x ³	x ⁴	x ⁵	x ⁶
	y	yx	y ² x ²	y ³ x ³	y ⁴ x ⁴	y ⁵ x ⁵	
	y ²	y ² x	y ² x ²	y ² x ³	y ² x ⁴		
c	y ³	y ³ x	y ³ x ²	y ³ x ³			
	y ⁴	y ⁴ x	y ⁴ x ²				
	y ⁵	y ⁵ x					
	y ⁶						

widac z niego dorazu, że wyrazy n.p. równania ogólnego drugiego rzędu, wynajduia się łącząc potęgi $x^2 y^2$ linią prostą, i otrzymamy w trójkacie A, b, c , następujące wyrazy:

$$1 + y + x + y^2 + x^2 + xy$$

które rozmnożywszy przez współczynniki stałe, otrzymamy wzór (A) .

Pronty wznawia użycie tego trójkąta analitycznego. (*).

L' Euler.

(*) *Exposition d'une methode pour construire les equations indeterminées, qui se rapportent aux sections.*

L. Euler dalej rozwinął też teorię w swém dziele. (**)

I to jest źródło, z którego nowsi czerpali i do którego *La Grange* słusznie po naukę odsyła początkowych. Jakoż pierwsiastkowe źródła mają tę nieocenioną własność, że podają uczącemu się zmysłowe nieiako nasiona naukowe, których dalsze rozwinięcia rokoszą się staia dla głów myślących.

Takim to sposobem przywyka uczeń już w pierwszych swych krokach, zwracać swe wyobrażenia do tosamości, do prędkiego pojęcia i porównania stosunków, i utworzenia z rozmaitych odnóg naszych wiadomości, systemu ciągłego i związkowego, równie pożytecznego do zastosowań bezśrednich ku naszym potrzebom, iak zdolnego do wydoskonalenia sztuki rozumowania.

Takim

Sections coniques, à l'usage de l'école des ponts et chaussées. Paris 1791.

(**) L. Euler *Introductio ad analysin Infinitorum.*

Takim też usilnościom, po dobrém przygotowaniu winien iest wiek nasz dalsze nauk doskonalenia, i dzieła *La Granzów*, *La Placów*, *Monżów* i t. p.

Widzieliśmy już na fig. 6. Tab. I. że linia prosta prowadzona od wierzchołka skazówki do końca cienia, iest tworzącą (generatrice) powierzchnią krzywą ostrokągu. Linie krzywe zrobione na takię powierzchnię skoro przetniemy ią planem, nazywają się *przecięciami ostrokągowemi* (Sectiones conicæ).

Rozważanie ich iest więc na przechodzie z Geometrii elementarnę do wyższę;

Weźmy naprzód:

[*Równanie powierzchni Ostrokągu prostego*, będącego w iakimkolwiek położeniu ze względu na plan przecinaiający go, bo iego użycie wchodzi do Gnomoniki. Może one równie iak planu być łatwo z wyrażenia dla kąta i linii w przestrzeni wy prowadzoném. — Jakoż gdy ostrokąg prosty iest utworzony obrotem linii prostę w około drugię, w stateczném do nię nachyleniu

nachyleniu, nazwawszy $x'y'z'$ współrzędne wierzchołka jego znajduącego się na osi ostrokągu, będą równania:

$$\left. \begin{aligned} x-x' &= a(z-z') \\ y-y' &= b(z-z') \end{aligned} \right\} \text{ dla rzutów jego osi (1)}$$

$$\left. \begin{aligned} x-x' &= a'(z-z') \\ y-y' &= b'(z-z') \end{aligned} \right\} \text{ dla rzutów jego tworczy (2)}$$

zaś dla kąta między niemi zawartość

$$\cos V = \frac{1+aa'+bb'}{\sqrt{1+a^2+b^2}\sqrt{1+a'^2+b'^2}} = c \quad (3)$$

używszy zgłoski c dla wyrażenia, że jest statecznym (constans); w tém wyrażeniu, podstawivszy wartości $a'b'$ wzięte z poprzedzających równań i przerobiwszy, a dla skrócenia wzięwszy

$$m = \sqrt{1+a^2+b^2} \sqrt{1+a'^2+b'^2} \quad \text{będzie}$$

$$c = \frac{a(x-x') + b(y-y') + (z-z')}{m\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}} \quad (4)$$

Jeżeli wierzchołek ostrokągu umieścimy na początku współrzędnych, stanie się $x'=0, y'=0, z'=0$ ztąd

$$c = \frac{ax+by+z}{m\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \quad (5)$$

jeżeli oś ostrokągu pada razem na z stać się $a=0, b=0$ zaczęm

$$c = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \quad (6)$$

a to podniosłszy do Kwadratu i wzięwszy $z=z'$ otrzymamy:

$$x^2+y^2 = z'^2 \tan^2 V \quad (7)$$

w Gnomonie jest V dopełnieniem zboczenia, zaczęm

$$x^2+y^2 = z'^2 \cotg^2 \delta$$

takiem jest równanie dla powierzchni ostrokągowych. Z kolei wypada rozważać

Ciała obrotowe czyli toczono

to jest takie, których powierzchnie powstają z obrotów podług pewnego prawidła linii prostych albo krzywych, które się zowią ich tworzącymi (génératrices; z tych

1) *Kule, onych przecięcia i plany styczne.* będą nam pierwszym przedmiotem.

1) Jużśmy widzieli na fig. 9. tab. II. że linie rzutowe, odpowiadające bokom, figury w przestrzeni, są do nich w stosunku stałym dostaw kątów pochyłości planów, na których się znajdują. Łatwo się ztąd dowodzi, że rzutem koła pochyłego jest Ellipsa. — Niech będzie S rzutem pozio-

poziomem środka kuli w przestrzeni; AC wspólnym przecięciem planu przecinającego zplanem xy , i oraz przechodzącego przez środek kuli (S). Wtedy wspólne przecięcie danego planu z planem zx będzie miało za rzut $CE = Ae'$ na linii ziemi AB , dla wyraźności nieco w oddaleniu i równolegle od CE poprowadzonéy. — Podobnież wynayduie się na niéy $d'e' = DE$ mniejszéy osi, zaś HG większéy osi ellipsy rzutowéy, na którą się zamieni koło zdf rzeczywistego przecięcia kuli z planem. Koło zdf jest tedy *rzeczywistém przecięciem planu z kulą*; sama de iego *rzutem pionowym*, nakoniec ellipsa $DHEG$ *rzutem poziomym* tegoż koła. (*)

2) Przez punkt uważany na powierzchni kulistéy albo iakiéykolwiek obrotowej

2)

(*) Rzuty takowe nazywają się inaczéy *proiekcjami ortograficznymi* i są często w Astronomii używane. Uważa się tu oko iako nieskończenie oddalone od planu rzutowego, zaczęm linie widzenia, iako równoodległe i do planu rzutowego prostopadłe. — O innych rzutach będzie niżej.

wéy w około osi pionowéy, i wyznaczonéy na rzucie poziomym, poprowadzić plan styczny do powierzchni.

(fig: 13.) Niech będzie A rzutem poziomym, danéy osi aa' ; rzut pionowy $BCDEF$ koła, albo krzywa tworząca dana, uważana w planie poprowadzonym przez oś; i P rzut poziomy dany punktu dotknięcia (P).

To założywszy, jeżeli przez ten punkt dotknięcia (P) i przez oś wystawimy sobie plan pionowy, którego rzutem będzie pozioma nieograniczona AP , plan ten przetnie powierzchnię obrotową podług krzywéy linii, która będzie tworzącą przechodzącą przez punkt dotknięcia; wystawiwszy sobie przez punkt (P) linią pionową, spotka się ta z tworzącą w jednym lub więcéy punktach, które będą punktami dotknięcia, i których P będzie wspólnym rzutem poziomym. Wynaydziemy wszystkie te punkta dotknięcia, uważane w planie tworzącéy, przeniosłszy AP na linią ziemską od a do e i poprowadziwszy przez punkt e równoodległą do aa' ;
wszyst-

kie punkta EC , w których ta linia przecinie krzywą $BCDEF$, będą przecięciami; krzywéy tworzącéy z pionową poprowadzoną przez punkt P ; i wskażę wysokości tyluż punktów dotknięcia nad planem poziomym. Aby mieć rzuty pionowe tych punktów dotknięcia, poprowadziemy przez punkta EC styczne nieskończone, które w sobie będą zawierać te rzuty; lecz muszą się także znajdować na prostopadłej do linii ziemskiej SM poprowadzonej przez punkt P ; zaczęm przecięcia pp' téj linii z poziomnemi, będą rzutami tych punktów dotknięcia.

Teraz jeżeli przez każdy punkt dotknięcia wystawimy sobie przecięcie zrobione przez plan poziomy, przecięcie to które będzie można uważać iako drugą tworzącą, będzie okręgiem koła, którego środek będzie na osi, i którego styczna musi być prostopadłą do promienia w jego końcu; taż styczna będzie także prostopadłą do planu pionowego poprowadzonego przez (A) (P), i w którym znajdować się będzie wspomniony promień: więc

więc plan styczny, który ma przechodzić przez tę styczną będzie także prostopadłym do tegoż planu pionowego i będzie miał na planie poziomym swój ślad prostopadły do AP , nie zostaje więc dla mierzenia śladów każdego z tych planów stycznych tylko szukać ich oddalenia od punktu A : lecz jeżeli przez punkta E, C , poprowadziemy do pierwszój tworzącój styczne EG, CH , przedłużone aż do zejścia się z linią ziemną w punktach J, H , linie aT, aH , równać się będą tém oddaleniom; jeżeli więc przeniesiemy te linie od A do e' , i od A do h , a przez punkta i, h poprowadziemy do AP prostopadłe $i=Q, hG$, przedłużone aż do linii ziemskiej, otrzymamy na planie poziomym ślady planów stycznych.

Dla wynalezienia na planie pionowym śladów tychże planów, trzeba sobie wystawić dla każdego punktu dotknięcia i w planie stycznym odpowiadającym, linią poziomą, przedłużoną do planu pionowego rzutowego; linia ta prosta, która

H

jest

jest oraz styczną koła wyznaczy na tym planie punkt należący do śladu.

Lecz dla wszystkich punktów dotknięcia, te linie mają iedenże rzut poziomy, i taką jest linia PK poprowadzona przez punkt P prostopadle do AP , i zakończona na linii ziemskiej. Jeżeli więc przez punkt K poprowadzimy do LM prostopadłą nieskończoną Kkk' ta zawierać w sobie będzie wszystkie punkta zéyscia się poziomych z planem pionowym rzutowym; lecz punkta te zéyscia się, muszą się także znajdować na odpowiadających liniach poziomych poprowadzonych przez punkta EC ; więc przecięcia Kk' téy poziomey z pionową Kk' będą każdy punktem śladu iednego z planów stycznych. Zaczém linia Qk będzie na planie pionowym, śladem iednego z planów stycznych, linia Mk' będzie śladem drugiego, i t. d. gdyby ich było więcej, wreszcie jest ta część wykreslenia tą samą która się sciągała do fig. 6.

Gdyby punkt dany był zewnątrz do prowadzenia przezeń planu stycznego zku-

lą,

lą, byłoby zadanie niewyznaczonym, przeciwnie zaś wyznaczoném, gdyby zamiast niego, była dana linia, lecz granice nasze niedozwalaia nam zapuszczać się w te szczeguły.]

Przypadki te i ciekawe zadania tyczące się kul, znajdzie czytelnik w dziełach P. Monge *Géométrie descriptive*. i P. Hachette *Supplément de la Géométrie descriptive*.

II. Powierzchnie obrotowe walcowe

Zadanie Mając dany walec wyznaeść

- 1) rzuty iego przecięć przez daną płaszczyznę
- 2) same to przecięcie
- 3) rozwinięcie tego przecięcia
- 4) ślady planu stycznego przez dany punkt na powierzchni walca.

(fig. 15) Dla nabycia łatwości w rozwiązywaniu rysunkowych na których tu dla krótkości przestać musimy, dobrze jest do razu zrobić sobie figurę w perspektywie, i akéśmy to na fig. 1. tab. II. okazali, bo tym sposobem zaraz w oczy wpada co iedno po drugim wykonać nale-

H 2

zy?

ży; i tak w obecnym naszym przykładzie widać, że do planu przecinającego dobrze jest dobrać plan pionowy, a wtedy będzie wspólne przecięcie FG prostopadłym do linii ziemskiej; a tak punkta przecięcia danego planu z powierzchnią krzywą, wyznaczone będą przez odcinki dowolnie obrane i onym odpowiadające przystawy.

1) Niech więc będzie A rzutem poziomym osi walca pionowego, koło $BCDE$ jego podstawą i razem krzywą, z której tworząca walec nieschodzi, zachowując zawsze swe położenie równoległe od osi walca. (*) Będzie toż koło oraz rzutem poziomym przecięcia planu danego.

Śladami planu przecinającego się Gd i GF . Poprowadźmy AF równoległą do linii ziemnej, będzie ta rzutem poziomym wspólnego przecięcia planu danego z planem rzutowym poprowadzonym przez

os

(*) Tworzące się powierzchnie walcowe, biorą się tuż w ogólniejszym znaczeniu jak w Geometrii początkowej; może bowiem być jego podstawą i dowolnie krzywą.

os walca prostopadle do FG ; ec , jest tegoż wspólnego przecięcia rzutem pionowym.

2) Łatwo ztąd wykreślić samo przecięcie. Dostyc na ten koniec dla otrzymania odcinków, podzielić ec na równe części w punktach 1, 2, 3, ... wyprowadzone prostopadle i wzięte równe przystawom z rzutu poziomego, dadzą punkta 1', 2', 3' ... elipsy, która wyraża przecięcie walca z planem danym.

3) Plan styczny przez punkt T poprowadzony, będzie przechodzić przez tworzącą przez tenże punkt przechodzącą, i przez styczną poprowadzoną przez tenże punkt (T) do przecięcia. Poprowadźmy więc przez T styczną TF do krzywej $BCDE$; przedłużmy ją do zeyścia się w F ze śladem planu siecznego; punkt ten F będzie oraz śladem styczney przez (T) przechodzący: która ostatnia staie się tym sposobem wspólnym przecięciem dwóch planów siecznego i stycznego. — Aby wyznaczyć tę styczną w rzucie pionowym, pomniemy że drugi punkt N jest

jest końcem podstycznę, leżącym na przedłużeniu linii AB .

Wyznaczy się więc rzut tego punktu podobnym sposobem, jak się wyznaczył rzut punktów B, C, D ; to jest bierze się an równa do AN i prowadzi się przez t żądana styczna nt .

4) Aby mieć rozwiniętą powierzchnię krzywą walca, trzeba naprzód wynaleść linią równą do obwodu jego podstawy, stanie się to tém dokładnię, im więcej weźmie się punktów $1, 2, 3, 4, \dots$ na téj podstawie i im one będą bliższemi. Od końców téj linii wystawmy prostopadłe i weźmy one równe do wysokości walca, dokończony prostokąt da nam rozwinięcie jego powierzchni krzywę; przez punkta podziałowe poprowadźmy równoległe od boków jego, będą te przechodzić przez obwód planu siecznego: gdy do tego oddalenia punktów tego obwodu są równie oddaleniem punktów jego rzutowych padających na linii eo ; przenieśmy więc co raz te oddalenia $oo', 11', 22'$, na odpowiadających prostopadłych rozwinięcia, a tak

linia

linia poprowadzona przez te punkta będzie żądaném rozwinięciem krzywę przecięcia. (*)

Dla wielu punktów wygodnie jest użyć znaków liczebnych. Styczna w rozwinięciu poprowadzona przez punkt odpowiadający punktowi (T) będzie miała za podstyczną BN i łatwo się tym sposobem wyznaczy.

III. Powierzchnie obrotowe ostrokątowe.

Tych przecięcia z planem jakimkolwiek, ich kształt rzeczywisty, rzuty poziome i pionowe, iako też styczne i rozwinięcie, wszystko to na podobnych poprzedzającym polega zasadach.

Zamiast iednak planów pionowych równoległych, które nam służyły do wyznaczenia współrzędnych krzywę przecięcia, wygodnię tu jest użyć planów piono-

(*) I wzajemnie miewszy taką rozwiniętą przecięcia, można nią obwinąć walec dla otrzymania na nim rzeczywistego kształtu krzywę przecięcia. Posłuży nam ta własność do prowadzenia krzywę eliptycznych wyrażających godziny na słupie walcowym.

pionowych przechodzących przez oś ostrokągu przez które przechodzi tworząca powierzchnią krzywą ostrokągu, nieschodząc z wierzchołka ostrokągu. (*)

Linia tworząca w rozmaitych swych położeniach z punktami obranemi na podstawie, da odpowiadające punkta na wspólnych iéy przecięciach z planem przecinającym.

Mogą więc te punkta być wyznaczone, przez do nich należące współrzędne, albo na planie przecinającym, albo na planach rzutowych, co wyznaczy prawdziwy kształt przecięcia i rzut poziomy. Pionowym zaś rzutem będzie linia prosta; okazuje to wszystko wyraźnie fig. 15.

Daliśmy tylko rozwiązanie rysunkowe zadania tyżącego się powierzchni obrotowych ciał kulistych walcowych i ostrokągowych. Dała nam się także uczuć potrzeba prowadzenia stycznych do jakiegokol

(*) Bierze się i tu twierdzenie się ostrokągu w ogólniejszym znaczeniu jak w Geometrii początkowej; bo podstawa może być linią krzywą ią, jakkolwiek.

kolwiek linii krzywéy. — Do rozwiązania wielu zapytań krótkim sposobem, które się rodzą gdy idzie o dochodzenie stycznych, podstycznych, normalnych, podnormalnych, promieni zakrzywienia, największości, najmniejszości i t. d. do tego wszystkiego służy.

Rozbiór wyższy.

Którego pierwsze początki, choć tylko w krótkości, tu przytoczymy.

Wyższy rozbiór zajmuje w sobie wszelkiego rodzaju krzywe linie powierzchnie i ciała z ich obrotów powstające.

Rozważają się w tym Rozbiorze funkcye w nayogólniejszym ich znaczeniu.

Każda zmienna wielkość y , która tak zależy od iednéy lub więcej zmiennych wielkości $x, z \dots$ że się razem z niemi odmienia, nazywa się *funkcją* ostatnich, i tak:

$a+x; ax^m; \sqrt{x}; bx; a \log x; c \sin x$
są funkcjami zmiennéy wielkości x .

Ogólnie naznaczają się funkcye przez $Fx, fx, \phi x$, w czém F, f, ϕ nie wyrażają czynni-

czynników, lecz podobne mają znaczenie iak $\sqrt{\quad}$; tag, sin....

Uważaia się w funkcyach wielkości stałe i zmienne; pierwsze naznaczaia się początkowymi literami alfabetu, drugie końcowymi. I tak w kole iest promień jego a wielkością stałą, zaś przystawy x, y łuku z do nich należącego wielkościami zmiennymi.

Do wyrażenia wzrostu wielkości zmiennych, ieżeli ten iest skończony, używa się znaku Δ , ieżeli zaś nieskończenie mały, znaku d .

Może zaś być ten wzrost przydającym albo ujemnym, do czego używa się znaków $\pm$ przed temi wzrostami położonych

Wzrost ten iest różnicą między pierwszym i drugim stanem wielkości odmianie podległej. — I tak ieżeli iest dana funkcyja $y = a + x$ drugi iey stan będzie

$$y' = a + x + \Delta x \quad \text{zaczém}$$

$$y' - y = a + x + \Delta x - a - x \quad \text{czyli}$$

$$\Delta y = \Delta x$$

zniknę-

zniknęła tu stała a , ponieważ iey wzrost iest zero.

Podobnież w równaniu

$$y = x^3 \quad \text{iest}$$

$$y' = (x + \Delta x)^3 = x^3 + 3x^2\Delta x + 3x\Delta^2x + \Delta^3x \quad \text{czyli}$$

$$\Delta y = 3x^2\Delta x + 3x\Delta^2x + \Delta^3x$$

podzieliwszy obydwie strony równania przez Δx otrzymamy:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 3x^2 + 3x\Delta x + \Delta^2x$$

wypadek ten iest bardzo ważnym: wskazuje nam bowiem, że stosunek wzrostu funkcyi do wzrostu iey zmiennéy, równa się szeregowi, którego pierwszy wyraz iest funkcyą, nienależącą od iey wzrostu; pozostałe zaś wyrazy formułą szeregu potęg z wzrostu wielkości zmiennéy.

O téy prawdzie przekonać się można, biorąc wyższe potęgi, a ogólnie przez rozwinięcie binomu, i tak w równaniu:

$$y = ax^m$$

$$y + \Delta y = (x + \Delta x)^m$$

$$= ax^m + m ax^{m-1} \Delta x + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} ax^{m-2} \Delta^2 x + \dots$$

zaczém

Δy

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \max^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} ax^{m-2} \Delta x + \dots$$

Nazwawszy pierwszy wyraz drugiey strony równania ogółem p , zaś pozostałe wyrazy złożone z samych potęg wzrostu zmiennego p' będziemy mieli

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = p + p'$$

jeżeli wzrost zmiennéy jest nieskończenie mały, stanie się p' równe zero i powyższe równanie będzie

$$\frac{dy}{dx} = p \quad (A)$$

$$dy = \frac{dy}{dx} p \quad (B)$$

Ostatnie to wyrażenie jest dyferencyalna czyli różniczką y czyli ax^m ; zaś wyrażenie (A) pokazuje granice stosunku odmiann jednoczesnych funkcyi i iéy zmiennéy, i nazywa się *współczynnikiem różniczkowym* (coefficient différentiel), ponieważ wielkość którą wystawia, jest mnożącą różniczki dx w wyrażeniu różniczki dy . (*)

(*) Zdaje się, że właściwiey nazywaćby się powinno to wyrażenie *wykładnikiem różniczkowym*, takie przynajmniej nazwisko bezśrednie wynika z jego znaczenia.

Wynika ztąd, że granice stosunku wzrostów, czyli współczynnik różniczkowy, otrzymuje się przez podzielenie różniczki funkcyi przez różniczki zmiennéy; i wzajemnie otrzyma się różniczka funkcyi przez rozmnożenie granicy stosunku wzrostów, czyli współczynnik różniczkowy, przez różniczkę zmiennéy.

Uwaga ta jest ważną, ponieważ są funkcyje, których współczynnik różniczkowy łatwiey się wynayduie iak różniczka funkcyi. Widzieliśmy to już w przytoczonych przykładach. Celem więc rachunku różniczkowego czyli dyferencyalnego, będzie wyszukiwanie granicy stosunku wzrostów jednoczesnych funkcyi i zmiennéy od której zależy.

Zanim przystąpimy do użycia współczynnika różniczkowego, w wynaydowaniu nowych podań, pokażmy wprzód

Różniczkowanie wielkości algebraicznych.

Jużeśmy wyżéy okazali w najpierwszym przykładzie, że biorąc różnicę dwóch stanów funkcyi i iéy zmiennéy przed i po iéy wzroście n. p. w równaniu

$y =$

$$y = a + x \text{ wypada}$$

$$\Delta y = + \Delta x \quad (1)$$

$$dy = + dx$$

Łatwo sobie ztąd można wyprowadzić słowną regułę dla różniczkowania wielkości algebraicznych, mianowicie, *kładą się tylko ich różnice albo różniczki ze znakami do nich należącemi. Wielkości zaś stałe uważają się iak zera*

$$\Delta(xy) = (x + \Delta x)(y + \Delta y) - xy = y\Delta x + x\Delta y + \Delta x\Delta y \text{ i}$$

$$dxy = ydx + xdy \quad (2)$$

w drugiem wyrażeniu opuszcza się $dx dy$ ponieważ jest nieskończenie małą drugiego rzędu, i prawidło dla różniczkowania wieloczynów dorazu w oczy wpada.

dla $y = x^2$ byłoby

$$dy = 2x dx$$

dla $y = x^3$

$$dy = 3x^2 dx \text{ i ogółem}$$

dla $y = x^m$

$$dy = mx^{m-1} dx \quad (3)$$

a ztąd $d \frac{x}{y} = xy^{-1} = \frac{ydx - xdy}{y^2} \quad (4)$

wszy-

wszystkie te prawidła łatwo sobie wyrazić można słownie uia wzór (1)

Różniczki ciągłe.

Jeżeli y jest funkcją x , różnikując one, znajdziemy z (B) wypadek kształtu pdx , w czém p jest wielkością zawierającą w sobie x ; zaczęm może się znowu różniczkować. Tak sobie coraż postępując otrzymamy

Równania.

$$dy = p dx$$

$$dp = y dx$$

$$dq = r dx$$

Współczynniki różniczkowe

$$\frac{dy}{dx} = p = \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dp}{dx} = q = \frac{d^2 y}{dx^2}$$

$$\frac{dq}{dx} = r = \frac{d^3 y}{dx^3}$$

Jeżeli y jest funkcją x może więc być wyrażoną podług powyżey wyrażeney iey własności przez

$$y = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \dots \quad (5)$$

różniczkując one i dzieląc przez dx otrzymamy:

dy

$$\frac{dy}{dx} = B + 2Cx + 3Dx^2 + 4Ex^3 + \dots$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2C + 2 \cdot 3Dx + 3 \cdot 4Ex^2 + \dots$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = 2 \cdot 3 \cdot D + 2 \cdot 3 \cdot 4Ex + \dots$$

Twierdzenie Maclaurina.

$$y = (y) + \left(\frac{dy}{dx}\right)x + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)x^2 + \frac{1}{2 \cdot 3}\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)x^3 + \dots \quad (6)$$

dla pierwszego przykładu weźmy

$$y = \frac{1}{a+x}$$

zrózniczkowawszy to równanie podług wzorów poprzedzających i biorąc dalsze różniczki dla otrzymania wyrazów wzoru (6) będziemy mieli

$$\frac{1}{a+x} = \frac{1}{a} - \frac{x}{a^2} + \frac{x^2}{a^3} - \frac{x^3}{a^4} + \dots$$

co już prostym dzieleniem 1 przez $a+x$ otrzymuje się (*)

Dla

(*) Fizyko oswoileniem się z redukcjami rozbirowa. mł. dobrze sobie zazu sprawoznać takowe wypadki prostymi sposobami, wyszukiwanie przyczy po.

Dla drugiego, weźmy $y = (a^2+bx)^{\frac{1}{2}}$ postępując sobie podobnie otrzymamy

$$\sqrt{a^2+bx} = a + \frac{bx}{2a} - \frac{b^2x^2}{8a^3} + \frac{b^3x^3}{16a^5} - \dots$$

Dla trzeciego weźmy $y = (a+x)^m$ jest

Twierdzenie Newtona.

$$(a+x)^m = a^m + ma^{m-1}x + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2}a^{m-2}x^2 + \dots$$

$$+ \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}a^{m-3}x^3 + \dots$$

gdy $a=1$ stanie się

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2}x^2 + \dots$$

$$+ \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^3 + \dots$$

$$= 1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + \dots$$

z kolei wypada wziąć

Różniczkowanie wielkości przestępnych to jest takich, które mają za wykładniki wielkości zmienne: takimi są wielkości

I wykład-

stępowania analitycznego dla zupełnego przekonania się, zabiera czego poczytniałym wiele czasu, którego lepiej użyć mogą. — „Avancez et la se, vous viendra, — mawiał był Dambze.

wykładnicze logarytmowe i łukowe czyli kątowe.

1) Różniczki wykładnicze.

Carnot najkróciy i najjaśniey wystawia nam ich tłómaczenie, równie iak i całą Metafizykę rachunku infinytezymalnego; weźmiemy go więc za przewodnika.

Chcemy różniczkować a^x w którymto wyrażeniu jest a wielkością stałą zaś x zmienną.

Stósownie do ogólnéy zasady jest

$$a^{x+dx} - a^x = a^x a^{dx} - a^x = a^x (a^{dx} - 1) \text{ to jest}$$

$$da^x = (a^{dx} - 1) \quad (A)$$

Lecz aby to równanie uczynić użytelnym, trzeba żeby wielkość nieskończenie mała dx niebyła użytą iako wykładnik. Na ten koniec weźmy

$$a^{dx} = (1 + b)^{dx}$$

a rozwinąwszy formułą Binomu Newtona

$$a^{dx} = 1 + dx b + \frac{dx b (dx - 1)}{2} + \frac{dx b (dx - 1)(dx - 2)}{2 \cdot 3} + \dots$$

a iako wielkość nieskończenie mała dx
 niknie

niknie przy liczbach 1, 2, 3, ... zamieni się więc równanie

$$a^{dx} - 1 = dx \left(b - \frac{b^2}{2} + \frac{b^3}{3} - \frac{b^4}{4} + \dots \right)$$

podstawivszy więc tę wartość $a^{dx} - 1$ w formule (A) i przywróciwszy zamiast b iey wartości $(a-1)$ otrzymamy

$$da^x = a^x dx \left[(a-1) - \frac{1}{2}(a-1)^2 + \frac{1}{3}(a-1)^3 - \dots \right] (B)$$

2) Różniczki logarytmowe

otrzymuią się za pomocą dopiero wyznaczonych różniczek wykładniczych.

Jakoż z ogólnego znaczenia logarytmów mamy

$$x = \log a^x \text{ zaczęm}$$

$$dx = d \log a^x$$

bierze się tu a za podstawę iakiegokolwiek bądź systemu logarytmów.

Te wartości dx podstawivszy w równaniu (B) będziemy mieli

$$da^x = a^x d \log a^x \left[(a-1) - \frac{1}{2}(a-1)^2 + \frac{1}{3}(a-1)^3 - \dots \right]$$

a wzięwszy $a^x = y$ wywodzi się ztąd

$$d \log y = \frac{dy}{y} \left[\frac{1}{(a-1) - \frac{1}{2}(a-1)^2 + \frac{1}{3}(a-1)^3 - \dots} \right]$$

wziawszy ostatni czynnik stały $= m$, otrzymamy dla jakiegokolwiek systemu logarytmowego

$$d \log y = \frac{m dy}{y} \quad (C)$$

liczba m która jak widzimy jest znaną funkcją podstawy a systemu logarytmowego, nazywa się *modelem* czyli *foremnikiem* tego systemu.

Najprostszym przypadkiem jest ten, w którym się przypuszcza $m=1$ co przywodzi formułę (C) do

$$d \log y = \frac{dy}{y} \quad (C')$$

dla tego też logarytmy tego systemu nazywają logarytmami *naturalnymi* czyli *Neperowskiemi* od nazwiska sławnego ich wynalazcy Barona *Nepera*; zowią one jeszcze logarytmami *Hyperbolicznemi* dla ich związku z kwadraturą części powierzchni między Hyperbolą równoboczną i onęj *Asymptotami*.

Ponieważ mieliśmy ogółem

$$m = \frac{1}{(a-1) - \frac{1}{2}(a-1)^2 + \frac{1}{3}(a-1)^3 - \dots}$$

będzie-

będziemy mieli dla logarytmów *Neperowskich*, to jest dla przypadku, w którym $m=1$

$$(a-1) - \frac{1}{2}(a-1)^2 + \frac{1}{3}(a-1)^3 - \dots = 1$$

co da z przybliżeniem

$$a = 2,718281828459045 \dots$$

to jest, że podstawa logarytmów *naturalnych*, czyli liczba której logarytmem jest 1 w tym systemie, jest tą liczbą poprzedzającą, którą w ogólności zgodzoną się wyrażać przez literę e w rachunkach *algebraicznych*.

I tak w tym systemie mamy $x = \log e$;

$$e = 2,718281828459045 \dots$$

Lecz zwyczajne nasze tablice logarytmowe, zrobione szczególnie dla użycia *arytmetycznego*, są wyrachowane podług innej podstawy. Ponieważ nasze liczenie jest *dziesiątkowem*, przypuszcza się w nich $a=10$, to jest przypuszcza się w nich $x = \log 10^x$; przypuszcza się więc coraz

$$10^x = 1, 10^x = 2, 10^x = 3, 10^x = 4 \dots$$

A wartości x dogadzające tym równaniom są logarytmami liczb *naturalnych* 1 2 3 4 ...

Podsta.

Podstawiając tę wartość podstawy 10 w równaniu wynalezioném wyżej

$$m = \frac{1}{(a-1) - \frac{1}{2}(a-1)^2 + \frac{1}{3}(a-1)^3 - \dots}$$

otrzymamy z przybliżeniem

$$m = 0,43429448 \dots$$

to jest, że liczba ta jest foremnikiem tabel zwyczajnych

Wszystkie systemata logarytmowe iakie tylko być mogą, mają ścisły związek między sobą, tak gdy raz są wyrachowane dla pewnego systemu dosyć jest rozmnożyć one przez iedną liczbę dla przejścia do innego stanu.

Jak zaś w szczególności takowe logarytmy rachują się dla liczb naturalnych? Formuła (D) dała nam związek między foremnikiem i podstawą systemu iakiegokolwiek, więc w ogólności mamy

$$\log a = (a-1) - \frac{1}{2}(a-1)^2 + \frac{1}{3}(a-1)^3 - \dots (E)$$

w czém logarytm a wyraża zawsze logarytm Neperowski z a , a to daie formułę ogólną do rachowania logarytmów tego systemu.

Jeżeli

Jeżeli w téj formule przywróciemy zamiast a wartości $1+b$ stanie się ona

$$\log(1+b) = b - \frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{3}b^3 - \dots (F)$$

Jeżeli w tém równaniu weźmiemy b ujemną, stanie się ona

$$\log(1-b) = -b - \frac{1}{2}b^2 - \frac{1}{3}b^3 - \dots (F')$$

odciagając to równanie od pierwszego i pomniąc na to, że

$$\log(1+b) - \log(1-b) = \frac{\log(1+b)}{\log(1-b)}$$

otrzymamy

$$\frac{\log(1+b)}{\log(1-b)} = 2(b + \frac{1}{2}b^3 + \frac{1}{3}b^5 + \frac{1}{4}b^7 + \dots) (G)$$

b może mieć rozmałą wartość x ; wiawszy,

$$\frac{1+x}{1-x} = \frac{n+dn}{n} \text{ z kąd wynika } x = \frac{dn}{2n+dn}$$

ułamek bardzo mały. — Wartość tę włożwszy do równania (G) otrzymamy w szeregu raptownie ubywaącym dla iakiegokolwiek liczby n

$$d \log n = 2m \left[\left(\frac{dn}{2n+dn} \right) + \frac{1}{3} \left(\frac{dn}{2n+dn} \right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{dn}{2n+dn} \right)^5 + \dots \right] (H)$$

ieżeli

jeżeli wzrost liczby czyli dn jest ujemny, zamienia się poprzedzające równanie na następujące:

$$-d \log n = 2m \left[-\frac{dn}{2n-dn} - \frac{1}{3} \left(\frac{dn}{2n-dn} \right)^3 - \frac{1}{5} \left(\frac{dn}{2n-dn} \right)^5 - \dots \right] (I)$$

równiczkę logarytmu x możnaby i tak wyrazić $d \log x = \frac{dx}{x}$ albo prościej

$$d \log x = \frac{dx}{x} \text{ zamiast } (C)$$

fi. 17) Dokładniejsza wiadomość rachowania logarytmów i tablic logarytmowych znajduje się w Trygonometrii Cagnoli.

3. Różniczki kątowe.

fig. 17) Do tych poznania sama już Geometria podaje sposób, iakoż jeżeli $AM=x$ jest łukiem koła którego wstawia się MP zaś dostawą PR , gdy łuk x powiększy się kawałeczkiem $MN=dx$, można dokończyć trójkącik MND i wziąć podobnym do MPR a w obydwóch zrobiwszy przyzwolicie proporcją otrzymamy

$$d \sin$$

$$d \sin x = dx \cos x \text{ podobnie}$$

$$d \cos x = -dx \sin x$$

ponieważ $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ zróżniczkowawszy te wartości będziemy mieć

$$d \tan x = \frac{dx}{\cos^2 x}$$

$$d \cotg x = -\frac{dx}{\sin^2 x}$$

$$d \sec x = \frac{dx \tan x \sec x}{dy}$$

$$d \operatorname{cosec} x = dx \cotg x \operatorname{cosec} x$$

$$d \sin \operatorname{ver} x = dx \sin x$$

Różniczki cząstkowe.

(Differentielles partielles.)

Po tém co się mówiło o różniczkowaniu wielkości wszelkiego rodzaju, wiadać oczywiście, że różniczkę wielkości która jedną tylko w sobie zmienną x zawiera, musi mieć za jednego z swych czynników różniczkę dx , ponieważ ta musi się przywieść do 0 wzięwszy $dx=0$. Lecz żaden z wyrazów nie musi tu być rozmnożonym przez wyższe potęgi od dx , ponieważ te wyrazy będąc nieskoń-

czenie

czenie małemi ze względu na inne, musiały być zaniedbanemi.

Dla téż przyczyny, jeżeli funkcya zawiera w sobie wiele zmiennych x, y, z ; różniczka musi tylko w sobie zawierać same wyrazy, rozmnożone przez dx, dy, dz , wyniesione tylko do pierwszój potęgi, i niemoże w nię znajdować się żaden wyraz, któryby miał za czynnika te różniczki wyniesione do wyższych potęg, albo rozmnożone iedne przez drugich,

Summa wyrazów mających za wspólny czynnik dx , składają dyferencyą funkcyi podanę ze względu na x , to jest uważając samą x iak zmienną; toż samo ściąga się do summy wyrazów mających za wspólne czynniki dy, dz , i t. d.

Więc cała różniczka danęj funkcyi niczém inném nie jest, tylko summą różniczek cząstkowych, które się otrzymują odmieniając coraz tę funkcją ze względu na każdą ze zmiennych w nię się znajdujących. — Dla wyrażenia tych różniczek cząstkowych następującego używa się znaczenia.

Niech

Niech będzie P funkcją x, y, z , i t. d. Różniczka cząstkowa téj funkcyi x, y, z , wzięta ze względu na x , tak się wyraża $\frac{dP}{dx} dx$; podobnież $\frac{dP}{dy} dy$ wyraża różniczkę funkcyi P ze względu na y ; toż o innych, tak że otrzymujemy

$$dP = \frac{dP}{dx} dx + \frac{dP}{dy} dy + \frac{dP}{dz} dz + \dots$$

Twierdzenie Taylora

Jest nayważniészém w całym rachunku dyferencyalnym i częstego w Astronomii użycia. —

Dla dowiedzenia tego twierdzenia trzeba nam pomnieć

Naprzód że wyrażenie iak $\frac{dy}{dx}$ znaczy iż

funkcya y iednéj lub więcéj zmiennych była różniczkowaną ze względu na zmienną x i podzieloną przez dx , inne zaś zmienne uważają się iak stałe, i tak w równaniu $y = ax^3z^4$ jest

$$\frac{dy}{dx} = 3ax^2z^4$$

Powtó-

Powtórę Jeżeli w jakiejś funkcji y zmienna x zamieni się na $x+h$, mamy tenże sam współczynnik różniczkowy, gdy x jest zmienną i h stałą, albo gdy h jest zmienną zaś x stałą. n.p. jeżeli mamy $y = ax^3$, wzięwszy $x+h$ na miejsce x znajdziemy że

$$\frac{dy}{dx} = 3a(x+h)^2 = \frac{dy}{dh}$$

To założywszy, tak możemy krótko, dowieść twierdzenie *Taylora*.

Wzięwszy $y' = A + Bh + Ch^2 + Dh^3 + \dots$ i przypuściwszy, że współczynniki A, B, C, D nie zawierają w sobie h , nie będą więc zależeć tylko od zmiennej x i od wielkości stałej, które wchodzi do funkcji danej; będziemy więc mieli

$$\frac{dy'}{dh} = B + 2Ch + 3Dh^2 \dots$$

$$\frac{dy'}{dx} = \frac{dA}{dx} + \frac{dB}{dx}h + \frac{dC}{dx}h^2 + \dots$$

zrównawszy te dwa wypadki, wyraz po wyrazie otrzymamy

$$B = \frac{dA}{dx}, \quad C = \frac{1}{2} \frac{dB}{dx}, \quad D = \frac{1}{6} \frac{dC}{dx} \dots$$

lecz

lecz $A = y$ więc

$$B = \frac{dy}{dx}, \quad C = \frac{1}{1.2} \frac{d^2y}{dx^2}, \quad D = \frac{1}{1.2.3} \frac{d^3y}{dx^3} \dots$$

włożywszy te wartości do formuły założony (1) otrzymamy sławną formułę *Taylora* w następującym kształcie:

$$y' = y + \frac{dy}{dx}h + \frac{d^2y}{dx^2} \frac{h^2}{1.2} + \frac{d^3y}{dx^3} \frac{h^3}{1.2.3} \quad (2)$$

Zawiera ona w sobie dorazu i rozwinięcie *Binomu Newtona*, dosyć jest na ten koniec przypuścić $y = x^n$ bo wtedy y stanie się $(x+h)^n$, otrzymamy:

$$(x+h)^n = x^n + nx^{n-1} \frac{h}{1} + n(n-1)x^{n-2} \frac{h^2}{1.2} + n(n-1)(n-2)x^{n-3} \frac{h^3}{1.2.3} + \dots \quad (3)$$

Ważność formuły (2) już z następujących przykładów, służących za jej objaśnienie, okazuje się.

Przykład 1. Mamy rozwinąć funkcję $y' = \sqrt{x+dx}$

Jest tu $y = \sqrt{x^{\frac{1}{2}}}$ zaczęć

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

d^2y

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{4}\frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = -\frac{3}{8}x^{-\frac{5}{2}} = -\frac{3}{8}\frac{1}{\sqrt{x^5}}$$

te wartości włożywszy do formuły Taylora otrzymamy

$$\sqrt{x+dx} = \sqrt{x} + \frac{1}{2}\frac{dx}{\sqrt{x}} - \frac{1}{8}\frac{dx^2}{\sqrt{x^3}} + \frac{1}{16}\frac{dx^3}{\sqrt{x^5}} - \dots$$

Przykład 2. Dla równania.

$y = \sin(x+dx)$ w czym $y = \sin x$ otrzymamy:

$$\begin{aligned} \sin(x+dx) &= \sin x + \cos x \frac{dx}{1} - \sin x \frac{dx^2}{1 \cdot 2} \\ &\quad - \cos x \frac{dx^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots \end{aligned}$$

jeżeli tu weźmiemy $x=0$, wtedy $\sin x=0$,

$\cos x=1$ na ten czas jest

$$\sin dx = dx - \frac{dx^3}{2 \cdot 3} + \frac{dx^5}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \dots$$

Takimże sposobem postępując sobie gdy jest $y' = \cos(x+dx)$ znajdziemy że

$$\cos dx = 1 - \frac{dx^2}{1 \cdot 2} + \frac{dx^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} - \dots$$

Przy-

Przykład 3. Poszukajmy rozwinięcia $\log(x+dx)$

jest tu $y = \log x$

$$dy = \log x = \frac{dx}{x}; \text{ więc } \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \text{ a róż-}$$

niczkując ciągle i włożywszy wartości otrzymane do formuły Taylora otrzymamy

$$\log(x+dx) = \log x + \frac{dx}{x} - \frac{dx^2}{2x^2} + \frac{dx^3}{3x^3} - \dots$$

Widziemy ztąd np. że mając logarytmy liczb pierwszych, można z nich wynaleść logarytmy nowych liczb powstających z powiększania dawnych jednostkami całkowitemi lub ich ułamkami zwyczajnymi albo dziesiętkowymi.

Można jeszcze wyrazić formułę Taylora pod tym kształtem:

$$y' = y + A \Delta y + B \Delta^2 y + C \Delta^3 y + D \Delta^4 y + \dots$$

$$\text{w czym } A = \frac{n}{1}; B = \frac{A(n-1)}{2}; C = \frac{B(n-2)}{3};$$

$$D = \frac{C(n-3)}{4} - \dots \text{ zaś } n = \frac{\Delta y}{\Delta x} \text{ i } \Delta y = n \Delta x \text{ itd}$$

Przykład 4. Szukajmy prawdziwej długości xiężycy y' na rok 1820, 7go Września o 3⁸ po południu pod południkiem Berliń-

Berlińskim, albo blisko wpół do czwartę godzinie z południa w Krakowie, to jest prawie przy końcu wielkiego zaćmienia słońca wtedy przypaść mającego.

Jeżeli z Efemerydów Berlińskich tegoż roku wypiszemy długości księżyca wyrachowanych dla południka Berlińskiego dla dni 7go, 8, 9, 10, 11 Września, a potem weźmiemy z nich pierwsze drugie trzecie i czwarte różnice, następująca ztąd powstanie tablica;

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	Δ^3	$\Delta^4 y$
7	5 ^s 19° 20' 12"	+ 11° 47' 17"			
8	6 1 7 29	+ 11 49 14	+ 1' 57"		
9	6 12 56 43	+ 11 54 23	+ 5 9	+ 3' 12"	
10	6 24 51 6	+ 12 2 8	+ 7 45	+ 2 36	- 36
11	7 6 53 14				

Gdy tedy długość księżyca w 24 godzinach rośnie i od południa 7go Września aż do chwili, dla której ma być wyznaczona długość y' księżyca upłynęło 3 godziny, tak że $\Delta x = 24$ zaczęm $n = \frac{1}{8}$ wynaydziemy y' następującym sposobem:

$$y =$$

$$y = \dots \dots \dots 5^s 19^\circ 20' 12''$$

$$A\Delta y = \frac{1}{8}(11^\circ 47' 17'') \quad 1 \ 28 \ 24,6$$

$$B\Delta^2 y = \frac{1}{2}(-\frac{7}{128})(1' 57'') \quad - \quad 6,4$$

$$C\Delta^3 y = -\frac{7}{128}(\frac{-23,12}{48}) \quad \dots \quad 0,6$$

$$y' = 5^s 20^\circ 48' 30,8'' (*)$$

Takię się używa Interpolacyi dla księżyca, ponieważ iego bieg jest bardzo nieforemny. W Paryzkich Efemerydach (Connoissances des Temps) jest wyznaczony bieg Księżyca od 12 do 12 godzin.

Dla słońca dostateczną jest prosta reguła ze trzech, wiedząc wzrost we 24 godzinach i różnice południków. Gdy zaś wielkię wyciąga się dokładności, używa się wtedy tablic słonecznych i księżycowych, do czego służą oyczyste wzory umieszczone w Miscellaneach Krakowskich i w Rocznikach Tow: Krak: P. N.

Funkcye kołowe mają z funkcyami wykładniczymi i logarytmowemi związku, wprowadzie tylko rozbiorowe, lecz tém bardzię interesujące, że z nich z wielką łatwością wyprowadzić można, nay-

K

cieka-

(*) Długość ta jest 5^s 15° 32' 27" z tablic księż. Burcheta

ciekawsze i najpożyteczniejsze własności
wstaw i dostaw.

Jakoż w ich rozwinięciach.

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \dots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \dots$$

$$\sin x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \dots$$

widziemy, że wszystkie wyrazy dwóch
ostatnich rozwinięć są też same, wyją-
wszy znaki iak owe pierwszego rozwinię-
cia, jeżeli w tém zamiast x położemy
 $x\sqrt{-1}$ i odpowiadające tym wyrazom wyż-
sze potęgi, otrzymamy:

$$e^{x\sqrt{-1}} = 1 + \frac{x\sqrt{-1}}{1} - \frac{x^2}{1.2} - \frac{x^3\sqrt{-1}}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \dots$$

a odłączwszy w drugiey stronie, wyra-
zy rzeczywiste od urojonych, stanie się
to równanie.

$$e^{x\sqrt{-1}} = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{x^6}{1.2.3.4.5.6} + \dots$$

Różnica ta pochodzi z mylnie wziętego południa
zamiast północy z Efemer. Berlińskich.

$$+ \left(\frac{x}{1} - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \dots \right) \sqrt{-1}$$

w czém wychodzą znowu rozwinięcia
 $\cos x$ i $\sin x$, a ztąd

$$e^{x\sqrt{-1}} = \cos x + \sin x \sqrt{-1}$$

Możnaby również podstawić $-x\sqrt{-1}$ za-
miast x w e^x co by odmieniło znak w $\sqrt{-1}$
i dałoby

$$e^{-x\sqrt{-1}} = \cos x - \sin x \sqrt{-1}$$

dodawszy teraz dwa ostatnie równania o-
trzymalibyśmy

$$e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}} = 2 \cos x$$

$$\text{z czego } \cos x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2}$$

a odciągnawszy iedno równanie od drugiego

$$\sin x = e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}} \over 2\sqrt{-1}$$

Podobnież znajdują się wyrażenia dla in-
nych linii trygonometrycznych, i tak

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{-1}} \left(\frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}} \right)$$

a rozmnożywszy obydwa wyrazy ułamku przez $e^{x\sqrt{-1}}$ będzie

$$\operatorname{tang} x = \frac{1}{\sqrt{-1}} \left(\frac{e^{2x\sqrt{-1}} - 1}{e^{2x\sqrt{-1}} + 1} \right)$$

Sposób ten wyrażenia linii trygonometrycznych z wykładnikami urojonemi, łączy z prostotą korzyść w okazywaniu prawdziwego znaczenia tych formuł; lecz na wzmiance tego nowego widoku przestać tu musimy, odsyłając czytelnika do dzieła P. La Croix *Traité du Calcul différentiel et du Calcul Integral* T. 1. p. 70. i Geometrii P. Le Gendre.

Zastosowania Rachunku różniczkowego.

i Sposób stycznych (*Methode des Tangents*)

Objasni on nam pierwsze zasady rachunku dyferencyalnego, iego początek i ważne znaczenie współczynnika różniczkowego.

Nayjaśniéy i naykróciéy wyłożył ten przedmiot Carnot (*).

fig. 17.

(*) *Reflexions sur la Metaphysique du calcul infinitesimal* p. M. Carnot 2de Edit. Paris 1813. Prze-

fig. 17 Niechby szło o poprowadzenie przez punkt M linii stycznych do danéy krzywéy

Uważamy ją naprzód iak gdyby przecinała krzywą w punktach M i N a kończywszy trójkąty MPT , MON gdy te są podobne, mamy

$$NO : OM = MP : PT$$

za przybliżeniem się punktu N do M będzie coraz punkt T przybliżał się do T tak że skoro N padnie na M zamieni się sieczna TN na styczną TM ; i dosyć będzie wyznaczyć iéy podstyczną PT aby ją wykreślić. Są tu

$AP = x$; $PM = y$; $MO = dx$; $ON = dy$; z powyższéy więc przyczyny skoro wzrosty x i iéy funkcji y znikną, stanie się

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{PT}$$

ztaąd podstyczna $= \frac{y dx}{dy}$ (1): wyrażenie dla

iakiéy

Przełożenie oyczyste z uwagami przez D. Kryżńskiego znajduje się u niego w rękopiśmie i warte jest publicznego widoku.

iakiejkolwiek linii krzywéy n.p. Paraboli
 jest $y^2 = px$; $y = p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}}$; $2y dy = p dx$ zaczęm
 $dy = \frac{p dx}{2y}$. — Te wartości podstawivszy
 w równaniu (1) otrzymamy

$$\text{podstyczne Paraboli} = 2x,$$

Można tu było jeszcze wydobyć dy a pri-
 ori iakoż $NO = NQ - MP$ lecz

$$NQ = y' = f(x+dx) \text{ więc}$$

$$y' = y + \frac{dy}{dx} dx + \frac{d^2y}{dx^2} \frac{dx^2}{1.2} + \dots$$

z drugiey strony jest $MP = y$ różnicą
 więc dwóch stanów jest

$$dy = \frac{dy}{dx} dx + \frac{d^2y}{dx^2} \frac{dx^2}{1.2} + \dots$$

w którym to wyrażeniu uważają się dx
 w niknącym stanie iak zero, co zreduko-
 wawszy, otrzymamy iak wprzód wyraże-
 nie dla podstycznej. — Jeżeli od punktu
 M wyprowadzimy prostopadłą MR do
 MT , będzie podnormalną PR ; dla iéy a-
 przymania mamy

$$PT : PM = PM : PR$$

$$\text{albo } \frac{y dx}{dy} : y = y : PR \text{ ztąd}$$

podnor-

$$\text{podnormalna } PR = \frac{y dx}{dy} \quad (2)$$

dla styczney jest

$$MT = \sqrt{PT^2 + PM^2} = y' \sqrt{\left(\frac{dy^2}{dx^2} + 1\right)} \quad (3)$$

podobnież dla normalnéy

$$MR = \sqrt{PM^2 + PR^2} = y \sqrt{\left(\frac{dy^2}{dx^2} + 1\right)} \quad (4)$$

Możemy ieszcze wynaleść równanie
 styczney a priori.

Dla wyznaczonego punktu dotknięcia
 M , którego przystawami są x', y' jest ró-
 wnanie linii MT przez niego przechodzą-
 cey $y - y' = A(x - x')$.

w tém równaniu będąc A styczną trygo-
 nometryczną kąta MTP ; jest dla niéy
 wyrażenie

$$\frac{PM}{PT} = \frac{y}{\text{subtang}}$$

podstawivszy tu wartość podstycznej z (1)
 i poprzedzającą wartość dla A , otrzyma-
 my równanie dla styczney

$$y - y' = \frac{dy'}{dx'} (x - x') \quad (5)$$

węc równanie dla normalnéy jest

$y -$

$$y - y' = - \frac{dx'}{dy'} (x - x') \quad (6)$$

Łatwo więc można poprowadzić te wymienione linie, w krzywych liniach, skoro znamy ich równanie.

Zróźniczkowawszy równanie dla koła, które jest

$$x^2 + y^2 = r^2$$

znajdziemy dla punktu dotknięcia się x', y'

$$\frac{dy'}{dx'} = - \frac{x'}{y'}$$

z tą wartością przywiedzie się wyrażenie MT do

$$\text{tang} = \frac{ry'}{x'}$$

Asymptoty Krzywych.

Wyrażenie dla AT , łatwo się wywodzi z równania styczney, bo dla punktu dotknięcia się stycznych w A , jest $y=0$. Takie więc wzięwszy y w równaniu (5) otrzymamy

$$AT = x' - y' \frac{dx'}{dy'} \quad (7)$$

Gdy AS jest przystawą w równaniu krzywey odpowiadającą $x=0$ w równaniu styczney,

styczney, otrzymamy więc w tém przypuszczeniu

$$AS = y' - \frac{dy'}{dx'} x' \quad (8)$$

Przypuściwszy teraz, że skoro x' stanie się nieskończoną, wartości AT AS zachowują wartości skończone, wniesiemy z tego, że linia TS niespotka się z krzywą, chyba w oddaleniu nieskończoném, więc TS będzie *asymptotą* krzywey.

O największościach i najmniejszościach.

(De maximis et minimis.)

Wielkości zmienne rosnąc coraz bardziej albo ubywając, mogą przyść do najwyższego stopnia swego wzrostu albo ubycia, i przechodząc przez ∞ albo 0, zamieni się z przydajnych na ujemne i wzajemnie.

Zachodzi tu pytanie, iak wielkiemi będą w tym stanie. Oczywiście wtedy nie mogąc się ani daléy powiększać ani daléy zmniejszać, różniczka ich przydajna albo ujemna stanie się zero.

Położywszy więc różniczkę iakiéy funkeyi $=0$; wyraża to równanie przypadek w któ-

w którym funkcya jest największą albo najmniejszą, i daie zmiennę ważność, która zamiast nię położona w funkcyi, daie w obu razach cokolwiek większego lub mniejszego.

Obiaśnimy sobie to na przykładach.

1) Niech będzie sumama dwóch czynników a , szukamy ich największego produktu.

Jeżeli jeden czynnik jest x , staie się drugi $a-x$, zaś ich produkt $ax-x^2$, zaś czem jest dla największego ich produktu

$$adx - 2xdx = 0 \text{ to jest}$$

$$a - 2x = 0, x = \frac{a}{2} \text{ i największy wielo-}$$

$$\text{czyn } ax - x^2 = \frac{a^2}{4}$$

bo jeżeli $x = \frac{a}{2} + q$ staie się

$$ax - x^2 = \frac{a^2}{4} - q^2 \text{ zawsze mniejszym od } \frac{a^2}{4}$$

2) Mamy wpisać w koło największy prostokąt. Równaniem koła jest

$$y^2 = r^2 - x^2$$

zróżniczkowawszy to równanie, wziawszy różni-

różniczkę $= 0$ i podobnież iak dopiero, postąpiwszy sobie, znajdziemy

$$x^2 = \frac{r^2}{2} \text{ czyli } r : x = x : \frac{r}{2}$$

zład łatwe wykreślenie za pomocą średniy geometrycznie proporcjonalny.

Dla największego zaś prostokąta będzie wartość $= r^2$

3) Jaką jest największa współrzędna w Ellipsie; równaniem ellipsy jest

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2} (2ax - x^2)$$

to zróżniczkowawszy mamy

$$2a^2ydy = 2ab^2ax - 2b^2xdx$$

wziawszy $dy=0$ wypadnie $a=x$, co daie poznać, że dla największoy współrzędny należy odcinek kończący się w środku ellipsy.

Aby mieć wartość téy współrzędny, trzeba w równaniu Ellipsy zamiast x położyć a , a tak stanie się $y=b$ zaczęm największa współrzędna jest równa połowie mniejszoy osi.

4) Ponieważ ten sposób jest bardzo ważnym, objaśnimy go sobie iesze na linii

linii krzywéy parabolicznéy, o któręy była wzmianka wyżej.

Ogólném iéy równaniem jest

$$y = Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + \dots$$

Abyśmy téż linią mogli wykreślić przez punkta, daymy iéy taki kształt

$$y = 0,875x + 0,9375x^2 - 0,725x^3 + 0,1125x^4$$

dla $x = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$,
wypada $y = 0, 1,2 1,5 0,6 0,9 7,5 28,2 73,5$
Punkta r, t, e , wskazują wzrost i ubywanie współrzędnych.

Aby mieć ich największość, mamy dla różniczkowanego równania

$$dy = 0,8795dx + 1,875x dx - 2,175x^2 dx + 0,45x^3 dx = 0$$

$$\text{albo skracaiąc } 0,45x^3 - 2,175x^2 + 1,875x + 0,875 = 0$$

którego trzy pierwiastki są

$$x = 1,6925, \quad x = 3,472, \quad x = -3,891$$

Podstawivszy ceras te wartości do x , w równaniu pierwiastkowém krzywéy znajdziemy

$$y = 1,578; \quad y = 0,342; \quad y = 0,675.$$

Wziawszy więc $SR = 1,6925$ i $Rr = 1,578$, otrzymamy miejsce *naywiększości*.

Podobnież

$$ST = 3,472; \quad Jt = 0,342.$$

dadzą punkt *naymniejszości*.

5) Można ieszcze doysć *naywiększości* i *naymniejszości* współrzędnych następującym sposobem

Odpowiadają one punktom, w których stycznne stają się równoległemi od osi odcinków; albo co na iedno wychodzi, uważając krzywą iako wielokąt o nieskończenie wielu bokach; są to współrzędne, które odpowiadają malutkim bokom równoodległym od odcinków; z kąd wynika, że współrzędne zostają téż same w całej rozciągłości tego małego boku, to jest, że w punkcie *naywiększości* albo *naymniejszości* téy współrzędny, różniczka iéy staie się zero, chociaż to różniczka odcinka nie jest zero, więc

$$\frac{dy}{dx} = 0$$

zastówawszy tę zasadę do równania

$$y^2 + x^2 = 3ax - 2a^2 + 2by - b^2$$

różniczkowawszy go otrzymamy

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3a - 2x}{2y - 2b} = 0, \text{ co daie}$$

5a—

$$3a - 2x = 0; \text{ czyli } x = \frac{3}{2}a$$

zaczém

$$y = b + \frac{1}{2}a$$

równania które według zasady Carnota będąc oswobodzone od nieskończenia małych czyli różniczek, są ściśle dokładnymi.

Punkt zgięcia krzywéy.

fig. 17.) Niech będzie $AMNB$ dana krzywa AP i PM w spółrzednemi punktu zgięcia M . Niech MT będzie styczną w tym punkcie zgięcia. Oczywiście kąt TMP będzie *naywiększością*, to jest większym od kąta LNQ styczney punktu linii zgiętey. Lecz styczna trygonometryczna punktu M jest $\frac{dx}{dy}$ więc musi być $d\frac{dx}{dy} = 0$.

Niechby równanie krzywéy było

$$b^2y^2 = a^2x^2 - x^3 \text{ mamy}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{b^2}{2ax - 3x^2}$$

więc zaraz widać

$$d \frac{b^2}{2ax - 3x^2} = 0$$

to daje

$$x = \frac{1}{3}a$$

Które

Które będąc oswobodzone od nieskończenia małych, jest ściśle dokładném.

Promień zakrzywienia, czyli kola ścisłającego krzywą.

Niechby krzywa $abcdF$ była obwinięta nitką utworzoną jednym swym końcem w jakimkolwiek punkcie F téy krzywéy; niechby téy nitki drugi koniec był w M . Wystawmy sobie, że taż nitka będąc zawsze wyciągniętą odwiia się, i koniec M nakryła nową krzywą M, m, m' , nowa ta krzywa nazywa się *rozwiiającą pierwszą* (*développante*), a ta, *pierwszą rozwiniętą* (*développée*).

Część nitki zawarta w każdéy chwili między rozwiniętą i rozwiiającą, nazywa się *promieniem rozwiniętey*: i tak dla punktu M rozwiiającej, linia Mb jest promieniem rozwinięty, mc jest promieniem rozwinięty dla punktu m i t. d. — Uważając rozwiniętą iako wielokąt foremny o nieskończenie wielu bokach ab, bc, cd , i t. d. — małe cząstki mM, m, m' i t. d. rozwiiającej staną się małemi łuczkami kół, mających swe środki w punktach c, d , i t. d.;

t. d.; dla tego to koła mające za promienie odpowiadające mc, md i t. d. i których małe łuki zchodzą się i mieszają z łuczkami rozwijającymi, nazywają się kołami ścisłającymi też krzywą w miejscach, gdzie się mieszają; że więc promienie kół ścisłających, które z téj przyczyny nazywają się promieniami zakrzywienia, są oraz promieniami rozwinięty; idzie tu o wynalezienie promienia rozwinięty dla jakiegokolwiek punktu M rozwijającego. Lecz łuk $Mm = Mcm$, zaś promienie Mc, md , będąc prostopadłymi do małych łuczków Mm, mm' , zaczęm do ich wzajemnych stycznych w punktach M, m , kąt Mcm zawarty między temi promieniami będzie tenże sam co i między stycznymi zawarty. Lecz tenże kąt Mcm zawarty między promieniami zakrzywienia odpowiadającymi Mc, md będzie różniczką kąta zawartego między styczną krzywej i iędy przystawą, skoro styczne są bardzo bliskimi jedna przy drugiej; nazwawszy więc R promień zakrzywienia, s łuk odpowiadający; x, y , przystawy punktu krzywej

wéy nieskończenie bliskiego punktu M , otrzymamy

$$ds = R dTMP \quad (A)$$

Lecz styczną trygonometryczną kąta TMP jest $\frac{dx}{dy}$ pomniąc, że różniczka kąta jest równą różniczce styczney rozmnożonéj przez kwadrat z dostawy otrzymamy

$$dTMP = \cos TMP^2 d \frac{dx}{dy} = \frac{dy^2}{ds^2} d \frac{dx}{dy}$$

więc równanie (A) stanie się

$$ds = R \frac{dy^2}{ds^2} d \frac{dx}{dy}$$

z czego się wywodzi

$$R = \frac{ds^3}{dy^2 d \frac{dx}{dy}} \quad (B)$$

Taż formuła może bydź jeszcze wystawiona pod następującym kształtem

$$R = - \left(\frac{dx^2 + dy^2}{dx ddy} \right)^{\frac{3}{2}}$$

która się otrzymuje z podobieństwa trójkątów $M'mo$ i $M'bP$

L

Dla

Dla normalnéy każdéy krzywéy iest

$$n = \sqrt{y^2 + \frac{y^2 dy^2}{dx^2}}$$

z kąd wynika $n^3 = -\frac{y^3}{dx^3} (dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}$

to przyzwoicie przerobiwszy otrzymamy

$$R = -\frac{n^3 dx^2}{y^3 d^2 y}$$

Dla przecięć ostrokągowych iest równanie

$$y = \left(px + \frac{px^2}{a} \right)^{\frac{1}{2}}$$

co przyzwoicie zróżniczkowawszy otrzymamy

$$R = \frac{n^3}{\frac{1}{2} p^{\frac{1}{2}}}$$

Dalsze rozwinięcia teoryi promieni zakrzywienia Ob: *La Croix* p. 111.

W téy teoryi używa się z korzyścią formuły Taylora.

P. Corancez użył własności promieni zakrzywienia, do wyznaczenia wykreśleniem geometryczném, pierwiastków rzeczywistych równań wszystkich stopniów. Ob: *Journal de l'école polytechnique* Tome X. (XVII Cahier.)

Rachu-

Rachunek Integralny czyli całkowania

Jest odwrotnym względem różnicowego. Całkować więc wielkość różniczkową, iest wynaleść wielkość, która przez swe różnicowanie daie wielkość różniczkową daną. — Wielkość, która przez swe różniczkowanie daie podaną różniczkę, nazywa się *całkową* (integrale) téy różniczki. I tak widzieliśmy, że $dx^m = mx^{m-1} dx$, i wzajemnie używszy znaku $\int$ dla wyrażenia integralnéy musi bydź

$$\int mx^{m-1} dx = x^m + C$$

otrzyma się więc ogólnie integralna poiedyncza o iednéy zmiennéy, następującém prawidłem:

- 1) powiększa się wykładnik zmiennéy iednością;
- 2) dzieli się przez ten tak powiększony iednością wykładnik i przez różniczkę zmiennéy;

iakoż dane różniczkowe wyrażenie takby się dla całkowania odmieniło:

$$\frac{mx^{m-1} + 1 dx}{mdx} = x$$

L 2

przy-

przydaie się zaś wielkość stała C ponieważ w różniczkowaniu bierze się i taka za zero, a w całkowaniu na nowo odkrytą być musi; podobnież

$$\int ax^m dx = \frac{ax^{m+1}}{m+1}$$

Prawidło to ma miejsce czy to wykładnik jest przydatnym czy ujemnym, całym lub ułamkowym. — Podane to prawidło niemoże jednak być użyte w przypadku, gdy $m = -1$, bo wtedy całkowa stałaby się $\frac{a}{0}$ wielkością nieskończenie wielką. Wtedy prawdziwa całkowa jest $a \log x$ to jest, że mamy

$$\int \frac{adx}{x} = a \log x;$$

iakoż podług tego co było wyżej

$$d a \log x = \frac{adx}{x}$$

Lecz na to zawsze pamiętać należy, że dla uczynienia całkowej zupełną, trzeba do niej przyłączyć stałą C , a tak otrzymamy

$$\int \frac{adx}{x} = a \log x + C$$

Teraz

Teraz chcąc żeby całkowa zaczynała się gdy $x = 0$, to jest chcąc żeby

$$\int \frac{adx}{x} \text{ była } 0 \text{ gdy } x \text{ jest } 0$$

będziemy mieli $0 = a \log 0 + C$ w czém $C = -a \log 0$ więc zupełna całkowa będzie

$$\int \frac{adx}{x} = \log x - a \log 0 = a \log \frac{x}{0}$$

to jest, że wtedy całkowa zupełna, będzie nieskończenie wielką; iak z początku wypadła.

Toż prawidło ściąga się i do przypadków, gdzie się znajduje kilka wyrażeń różniczek dla jednéjże zmiennéj.

Skoro wielkości różniczkowe o jednéj zmiennéj nie są w przypadku prawidła wyżej przepisanego, trzeba się starać przywieść one do niego różném przerabianiem; a gdy tego dokazać niemożna, rozwijając się dane wyrażenia na szeregi, tworzące ciągi nieskończone z funkcji o-wych pojedynczych złożone, a tak będzie można całkować z przybliżeniem.

Mamy całkować $dz \cos z$, będziemy mieli

$$\int dz$$

$$\int dz \cos z = \sin z + C$$

Jakoż różnicując $\sin z + C$ podług wyżej podanych prawideł otrzymamy $dz \cos z$, więc i wzajemnie całkowa od

$$dz \cos z \text{ jest } \sin z + C$$

Podobnie będziemy mieli w ogólności

$$\int dz \cos mz = \frac{1}{m} \sin mz + C \text{ także}$$

$$\int dz \sin mz = -\frac{1}{m} \cos mz + C \text{ naresz-$$

$$\text{cie } \int dz \sin z^n = \frac{1}{n+1} \sin z^{n+1}$$

Jakoż $dz \cos z$ jest różniczką od $\sin z$, zatem to różniczkowanie podciąga się pod ogólne prawidło pojedynczych czyli jednozmiennych wielkości (monomes).

Zważmy teraz różniczki, zawierające w sobie wiele zmiennych.

Niechby przypadło całkować różniczkę

$$3x^2y dx + x^3 dy + 5xy^4 dy + y^5 dx$$

Uważam x iak samą tylko zmienną, zatem iak gdyby y była stałą, że więc $dy = 0$; otrzymuje tak $x^3y + y^5x$. A ta wielkość, różniczkując x i y daje nam

$$3x^2$$

$$3x^2y dx + y^5 dx + x^3 dy + 5xy^4 dy$$

Która jest tąż samą co i dana. Z tego wnoszę, że szukana całkowa jest rzeczywiście

$$x^3y + y^5x$$

z dodaną do nięý stałą:

Podobnie postępując sobie, znajdziemy że

$$\int (x^3 dy + 3x^2y dx + x^2 dz + 2xz dx + x dx + y^3 dy$$

$$\text{jest } = x^3y + x^2z + \frac{x^2}{2} + \frac{y^3}{3} + C$$

którą zróżniczkowawszy, otrzymamy podaną różniczkę.

Niechby daną do zintegrowania była różniczka drugiego rzędu

$$dx^2 + x d^2x + a d^2x - dy^2$$

uważamy w nięý dy iak stałą.

Trzymając się powyższego przepisu, to jest całkując iak gdyby d^2x była sama zmienną, dopełniwszy działania dodaniem stałej. Gdy tegoż rzędu co i inne wielkości formuły, otrzymamy

$$x dx + a dx - y dy + C dy$$

wielkość różniczkowa, którą na nowo zcałkowawszy daje

$$\frac{1}{2}x^2$$

$$\frac{1}{2}x^2 + ax - \frac{1}{2}y^2 + Cy + C'$$

Jak się integruje przez łuki i t. d. łatwo dożyć rozumiejąc przytoczone tu zasady. — Przykłady tego i zbiór formuł znajdujących się w obrazie Matematyki i Tablicach w nim załączonych (*). — Lecz już niektóre

Zastosowania Rachunku integralnego przeświadcza nas o wielkim jego pożytku.

Niechby szło o wynalezienie powierzchni *AMP* ograniczonej krzywą linią *AM* i przystawami *AP* i *PM*. fig. 20.

Jeżeli sobie wystawimy, że odcinek *AP* czyli *x* urośnie kawałkiem *PQ* czyli *dx*, powierzchnia szukana krzywey, urośnie czworobokiem mieszanym *MNPQ*; więc ten czworobok będzie wzrostem czyli różniczką szukanej powierzchni, będziemy więc mieli

$$AMP = \int MNPQ$$

Lecz z drugiey strony opuściwszy ma-
tki

(*) Ob: Darstellung der samlichen Theils der Mathematik ... abgef.ist von Jos. Lęski Kralau 1811

tki trójkąt *MNO*, który jest oczywiście nieskończenie małym względem czworoboku, którego powierzchnia ydx i nazwawszy *R* powierzchnią *AMP* otrzymamy $R = \int ydx + C$ (A)

co jest ogólném wyrażeniem dla kwadratury, czyli dla wynalezienia powierzchni z krzywey linii. Aby więc znaleźć wartość tego wyrażenia, dosyć jest mieć równanie krzywey.

I tak dla Paraboli jest $y^2 = px$ aże $y = p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}}$ więc równanie (A) stanie się

$$R = \int p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} dx + C = \int \frac{p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = \int yx$$

to jest powierzchnia Paraboli równa się $\frac{1}{3}$ prostokąta opisanego.

Niemasz tu stałej *C* bo przy niknięciu *x* niknie i powierzchnia *AMP*. Zróżniczkowawszy równanie Paraboli mielibyśmy $2ydy = p dx$

a z otrzymaney ztąd wartości współczynnika różniczkowego $\frac{dy}{dx}$ doszlibyśmy do tegoż przypadku.

Podobnież z równania dla krzywéy

$$y = (x+a)^{\frac{1}{m}} \text{ mielibyśmy}$$

$$dR = (x+a)^{\frac{1}{m}} dx$$

które zcałkowawszy iest

$$R = \frac{m}{m+1} (x+a)^{\frac{m+1}{m}} + C$$

to równanie będąc także oswobodzonym od różniczek, iest zupełnie doskonałym.

Niechby teraz szło o bryłowatość ciała utworzonego przez obrot krzywéy wokoło swéy osi.

Prostokącik $MPQO$ mający bydź wziętym zamiast $MPQN$ utworzy w swym obrocie walczyk, mający za wysokość dx a za podstawę koło promienia y . Wyrażenie więc dla niego iest $\pi y^2 dx$

Jest zaś wzrostem nieskończenie małym ciała utworzonego. To więc nazwawszy V mamy

$$V = \int \pi y^2 dx + C \quad (B)$$

i takiem iest ogólne wyrażenie dla ciał obrotowych

brotowych czyli utoczonych (cubatura) n.p. dla Parabolaidy iest

$$y^2 = px \text{ zacząć}$$

$$V = \int \pi p x dx + C = \frac{\pi p x^2}{2} + C = \frac{\pi y^3 x}{2}$$

$$= \frac{1}{2} \text{ walca opisanego}$$

Niemasz tu stałej C dla téż co i wyżej przyczyny.

Mamy wynaleść długość krzywéy czyli jej rektyfikować.

Nazwawszy S krzywą AM , iéy wzrost

$MN = \sqrt{MO^2 + NO^2}$ to iest

$$ds = (dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}} \text{ zacząć}$$

$$s = \int (dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}} + C \quad (C)$$

Niechby równaniem krzywéy było

$$y^3 = ax^2$$

wyprowadzamy ztąd

$$x = \frac{y^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}} \text{ a różniczkowawszy}$$

$$dx = \frac{3y^{\frac{1}{2}} dy}{2a^{\frac{1}{2}}}; \quad dx^2 = \frac{9y dy^2}{4a}$$

tę wartość włożywszy do formuły (C) otrzymamy

$$s = \int dy \left(\frac{9y}{4a} + 1 \right)^2;$$

wykonawszy to działanie wskazane i dając stałą, otrzymamy

$$s = \frac{8a}{27} \left(\frac{9y}{4a} + 1 \right)^3 + c$$

Odwrotny sposób stycznych uczy iak z danéj własności krzywéj wynaleść iéy równanie; n.p. Szukamy równania krzywéj, którémby podstyczna miała do odcinka stosunek stały, to iest że gdy x iest odcinkiem, ma bydź podstyczna mx , gdzie m przypuszcza się stałą. — Wyrażeniem podstyczném (fig. 17) iest $y \frac{dx}{dy}$

mamy więc w obecnym przypadku

$$mx = \frac{y dx}{dy} \quad \text{z kąd się wywodzi}$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{mx} \quad \text{a z całkowawszy}$$

$$\log y = \frac{1}{m} \log x + \log a$$

w czém a iest stałą.

To rozmnożywszy przez m i przero-
biwszy otrzymamy

log

$$\log y^m = \log x + \log a^m = \log a^m x \quad \text{i nakoniec}$$

$$y^m = a^m x$$

Rachunek Odmian.

(Calcul des Variations.)

Jest iednym z najsławniejszych wynalazków nieśmiertelnego *La Grange*. — Przedniéjszym przedmiotem tego rachunku iest rozwiązanie ogólne sławnych zadań *de maximis et minimis*, które tak długo zatrudniały mierników Europejskich, wkrótce po wynalazku rachunku różniczkowego.

Euler już był rozważał takowe zapytanie z zwykłym swém zgłębianiem i iasnością w osobném dziele (*), lecz dopiero *La Grange*owi winniemy Algorytm, który nadał piękny téj teorii własny charakter, iednostayne i proste postępowanie.

W zwyczajnych postępowaniach największości i najmniejszości idzie o wyznaczenie wartości wyznaczonych, które przy-

(*) *Methodus inveniendi curvas maximae minimae proprietate gaudentes.*

przysnać należy rozmaitym zmiennym, wchodzącym do iakiéy danéy funkcyi tychże zmiennych, tak aby ta funkcya otrzymała największą albo najmniejszą wartość, iaką tylko mieć może.

Przeciwnie zaś w rachunku odmian, idzie o wynalezienie związków, iakie zachodzą między zmiennemi, to jest równań, które między temi zmiennemi mieć miejsce powinny, aby dogodzić warunkom *naywiększości* i *naymniejszości*. — Do tego funkcya mająca byđź *naywiększą* albo *naymniejszą* nie jest iak w zwyczajnych zapytaniach iedynie złożoną z wielkości skończonych, lecz musi byđź wskazaną integralną funkcyi różniczkowéy, która niepodlega całkowaniu.

fig. 21. Niechby n.p. szło o prowadzenie na iakim planie między dwoma punktami AD , takiéy krzywéy linii, żeby skoro AK jest osią, zaś DK współrzedną do niéy prostopadłą punktu D , powierzchnia zawarta między tą krzywą i przystawami AK i DK , była *naywiększą* pomiędzy
wszyst-

wszystkiemi krzywemi téyże saméy długości.

Nie idzie tu iak w zwyczajnym sposobie *naywiększości* i *naymniejszości* o wyznaczenie prawdziwéy wielkości x, y , bo te są tu już dane; lecz o odkrycie własności krzywéy i wyrażenie onéy równaniem. Niechby A', M', N', R', D była krzywą nieskończenie małą się od pierwszéy różniącą, możemy uważać każdy iéy punkt M' iak punkt M drugiéy, gdyby ten przeszedł z M na M' , tak więc każdy punkt pierwszéy, ma sobie odpowiadający na drugiéy krzywéy. — To założywszy, wzrost, który nabywa w tym przechodzie każda wielkość wchodząca do systemu, nazywa się *przemianą* (variation) téy wielkości.

I tak przemianą AP jest $M'P' - MP$

$MQ \dots M'Q' - MQ$

powierzchni jest $AM'N'R'D'K$
— $AMNRDK$

Chociaż przemiana iakiéy wielkości jest także różnicą dwóch wielkości nieskończenie małą, nie trzeba iéy iednak brać za iedną z różniczką dotąd uważaną,
bo tu

bo tu nieuwzględnia się różnice dla iednój krzywój, lecz dla dwóch krzywych iednój względem drugiej.

Aby więc nie mieszać z sobą tych dwóch gatunków różnic, naznacza się nowy gatunek, to jest *przemianę* cechującym znakiem δ , zachowując dla różniczki d ; i tak jest

$PQ = dx$, gdy $PP' = dx$; $NQ - MP = dy$, gdy $M'P' - MP = dy$ it. d.

Dla $x + \delta x$ stanie się $y + \delta y$

Są więc prawidła też same dla obydwóch rachunków, wyiawszy onych znaczenie. I tak przemianą dx jest δdx .

Poznaiemy tu dorazu, że te dwie wielkości δdx i $d\delta x$ kształtem się tylko od siebie różnią, wreszcie, zupełnie są sobie równemi, czyli

$$\delta dx = d\delta x \quad (A)$$

to jest, że *przemiana różniczki iakiękolwiek wielkości równa się zawsze różniczce przemiany*; jest to iedną z fundamentalnych zasad rachunku przemian. Druga także fundamentalną i także z pierwszój wynikającą zasadą jest ta: że *przemiana*
inte-

integralnój iakiękolwiek różniczki, równa się integralnój przemiany; czyli w ogólności

$$\delta \int P = \int \delta P \quad (B)$$

w czém P wyraża funkcją iakąkolwiek różniczkową rozmaitych zmiennych, iakiemi są x, y, z i onych różniczek.

Przykład. Mamy wynaleść przemianę formuły integralnój $\int V dx$ czyli zna-

leść $\delta \int V dx$ to jest mamy dać temu wyrażeniu kształt, któryby go usposobił do pozbycia się posilkowego znaku δ

Podług (B) otrzymamy

$$\begin{aligned} \delta \int V dx &= \int \delta V dx \\ &= \int dx \delta V + \int V \delta dx \end{aligned}$$

zaś podług (A) jest

$$\delta \int V dx = \int dx \delta V + \int V d\delta x \quad (C)$$

lecz $d(V\delta x) = dV\delta x + Vd\delta x$
co zintegrowawszy i przerobiwszy mamy

M

fV

$$\int V d\delta x = V \delta x - \int dV \delta x$$

ostatnią tę wartość włożywszy do równania (C) stanie się ta

$$\delta \int V dx = V dx + \int dx \delta V - \int dV \delta x \text{ albo}$$

$$\delta \int V dx = V dx + \int (dx \delta V - dV \delta x) \dots (D)$$

jest to równanie, które podług natury funkcji V , oswobodzi się od znaku δ przemiany; a tym sposobem przywiedzie się zadanie do zwyczajnych działań rachunku infinitesimalnego.

Wyciątki te wziętemi są z 2go wydania dziełka *Karnota* (*Reflexions sur la Metaphysique du Calcul infinitesimal*. — Paris 1813.)

PRZYPISY.

I. Do teoryi zamiany współrzędnych.

Stosując się do prawidła nauki pomysłnej, to jest żeby pierwiastkowe i stanowcze wyobrażenia były ile możności zmyślowo ułatwianemi; na wzór analitycznego trójkąta Paskala dla teoryi równań, poda-

podamy tu wzory dla ważnej teoryi zamiany współrzędnych, i tak wzór załączony pokaznie

Osi	x	y	z
x'	a'	a''	a'''
y'	b'	b''	b'''
z'	c'	c''	c'''

1) Że kąty, które czyni dawna oś x z nowemi $x' y' z'$ mają za dostawy $a' a'' a'''$, a tak otrzymamy dawne współrzędne w nowych, formułami

$$\begin{aligned} x &= a'x' + b'y' + c'z' \\ y &= a''x' + b''y' + c''z' \\ z &= a'''x' + b'''y' + c'''z' \end{aligned} \quad (1)$$

i wzajemnie nowe w dawnych

$$\begin{aligned} x' &= a'x + a''y + a'''z \\ y' &= b'x + b''y + b'''z \\ z' &= c'x + c''y + c'''z \end{aligned} \quad (2)$$

Można to sobie jeszcze objaśnić i na trójkącie kulistym, utworzonym przez za-

toczenie iednymże promieniem od wierzchołka współrzędnych łuków w planach przyzwoitych i za pomocą fundamentalnego twierdzenia trygonometrii kulistey. (*)

Z załączonéy tabliczki i formuł (1) i (2) z niéy wywiedzionéy, tudzież formuły (4) fig. 1. naszego fundamentalnego równoległoscianu widać, że współczynniki stałe $a' b' c'$ są témże samém co tamte $\cos X, \cos Y, \cos Z$, skoro weźmiemy terażniéysze x, x', y', z' za dawniéysze R, x, y, z , a z tą odmianą wzięłyby formuły (1) następujący kształt

$$x = x' \cos X' + y' \cos X'' + z' \cos X'''$$

$$y = y' \cos Y' + x' \cos Y'' + z' \cos Y'''$$

$$z = x' \cos Z' + y' \cos Z'' + z' \cos Z'''$$

po tém przygotowaniu możemy przedsięwziąć,

II. Rozbiór równania drugiego stopnia o trzech zmiennych.

Ogólném tém równaniem iest

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Kz + L = 0 \quad (A)$$

(*) Obacz *Hachette Application de l'Algèbre à la Géométrie* Paris 1823. p. 123 Sq.

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Kz + L = 0 \quad (A)$$

lecz podłożywszy w nim zamiast x, y, z , wartości ich wynalezione w formule (3), otrzymamy równanie podobnegoż kształtu co i poprzedzające, które można wystawić tak:

$$A'z'^2 + B'y'^2 + C'x'^2 + D'z'y' + E'x'x' + F'x'y' + G'z' + H'y' + K'y' + L = 0 \quad (A')$$

Posiadanie wspomnionego oyczystego przełożenia Rozbioru P. Biot przez P. Wyrwicza oszczędza nam rozwodzenie się nad przerobieniem tego równania. — Dostyc tu wspomnieć, że z tego przerobienia pokazuje się, że zawsze z niego można wyrugować wyrazy zawierające w sobie prostokąty z współrzędnych, ponieważ współczynniki tych prostokątów nie zależą od tych wyrazów; a tak ogólne równanie (A) nie traci ieszcze swéy ogólności pod kształtem

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Gx + Hy + Kz + L = 0 \quad (B)$$

Który ieszcze do krótszéy następującej postaci przywieść się daie

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + P = 0 \quad (C)$$

z osta-

z ostatniego tego wyrażenia wynika

Podział powierzchni drugiego rzędu pierwszego rodzaju na trzy gatunki.

Zachowując wyraz P przydałym, muszą się odmienić współczynniki zmiennych i równanie (C) otrzyma kształt:

$$P = Lx^2 + By^2 + Cz^2 \quad (D)$$

a ztąd dla wynikających gatunków powierzchni drugiego rzędu będą równania:

$$Lx^2 + My^2 + Nz^2 = P$$

$$Lx^2 + My^2 - Nz^2 = P \quad (E)$$

$$Nz^2 - My^2 - Lx^2 = P$$

Pierwsze równanie należy do *Ellipsoidy*, drugie do *Hyperboloidy* o iednym pokryciu (*nappe*), trzecie do *Hyperboloidy* o dwóch pokryciach (*a deux nappes*), których szczególne rozważanie znajdzie czytelnik w wspomnioném oyczystém przełożeniu P. Eiot.

III. *Do powierzchni obrotowych.*

Równania (E) podały nam ich powstanie i gatunki wywiedzione z ogólnych równań algebraicznych; zaś fig. 12. 14. 15. 16. rozwiązania rysunkowe kul ellipsoid, ciał walcowych i ostokręgowych.

Zaprzę-

Zaprzętniemy się ich teorią w wyiątkach z *Puissanta*. — Jakiegokolwiek bądź rodzaju jest krzywa tworząca powierzchnią obrotową, skoro tę przetniemy płanem prostopadłym do osi obrotowéy, otrzymamy na przecięcie okrąg koła, którego środek jest na osi; zaczęm wszystkie punkta zarówno oddalone od innego punktu na téyże osi obranego.

Wystawiwszy więc oś obrotową równaniem

$$x = az + \alpha, \quad y = bz + \beta$$

równanie planu jest

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

aby plan był do linii prostopadłym, musi bydz z (8) fig. 1.

$$a = \frac{A}{C}, \quad b = \frac{B}{C}$$

zaczęm równanie planu stanie się

$$ax + by + z + \frac{D}{C} = 0 \text{ albo}$$

$$ax + by + z = \delta$$

wielkość δ wyznaczająca położenie planu jest tu stałą dla iednegoż planu prostopadłego,

długo, zaś zmienną dla planów odmiennających się.

Teraz jeżeli sobie obierzemy punkt w którym oś obrotowa spotyka się z planem $x\gamma$ za środek wspólny szeregu kul współśrodkowych; środek ten będzie miał oczywiście za współrzędne $x=\alpha, y=\beta, z=0$ a równaniem ogólnem powierzchni kulistych, których promień niewyznaczony $=\gamma$ będzie

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + z^2 = \gamma^2$$

lecz krzywe zrobione na powierzchni obrotowej, planami prostopadłymi do osi obrotowej, mogą być uważane iak gdyby były zrobione przez powierzchnie kuliste, o których tu mowa; są więc δ i γ wielkościami stałymi dla wszystkich punktów iednegoż przecięcia, zaś zmiennymi, gdy idzie o przechód z iednego na drugie; są więc wartości δ i γ^2 funkcjami iedną względem drugiey i równaniem ogólnem powierzchni obrotowych iest

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + z^2 = f(ax+by+z)$$

Niechby szło o *wynalezienie równania sferoidu utworzonego obrotem ellipsy, w o-*
koło

koło swęj osi zb. — Ponieważ krzywa tworząca iest płaską, będą iędy równania:

$$c^2\gamma^2 + b^2x^2 - a^2b^2; \quad z=0$$

do tego z poprzedzającego iest

$$\gamma = \delta; \quad x^2 + \gamma^2 + z^2 = \gamma^2$$

w czém iest $\gamma = \delta$ równaniem planu prostopadłego do osi obrotowej, zaś ostatnie, równaniem kuli, której środek iest przy początku współrzędnych. — Cztery te równania powinny mieć razem miejsce, aby podana powierzchnia była obrotową; wyrugowawszy więc z nich x, y, z otrzymamy

$$a^2b^2 - a^2\delta^2 + b^2\delta^2 = b^2\gamma^2$$

a podstawivszy tu zamiast δ i γ^2 ich wartości, wyznaczy się powierzchnia sferoidu obrotowego równaniem

$$b^2z^2 + a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2 \quad (F)$$

Formułę tę moglibyśmy do razu wyprowadzić z pierwszej formuły (E) która iest

$$Lx^2 + My^2 + Nz^2 + P = 0$$

iakoż wlożywszy

$$\frac{L}{P} = \frac{1}{a^2}; \quad \frac{M}{P} = \frac{1}{b^2}; \quad \frac{N}{P} = \frac{1}{c^2} \quad \text{mamy}$$

$$a^2b^2z^2 + a^2c^2y^2 + b^2c^2x^2 = a^2b^2c^2$$

równanie symetryczne ze względu na główne osie a, b, c , i które przeto należy do powierzchni krzywych drugiego rzędu. — Skoro $M=N$, albo co na jedno wychodzi gdy $b=c$ mamy

$$a^2z^2 + a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$$

co jest równaniem ellipsoidy obrotowej, mającój za osie $2a, 2b$.

Nazywa się zpłaszczeniem (aplatissement) ellipsoidy obrotowej, różnica α' połosiów, skoro jedna z nich jest wziętą za jedność. Jeżeli więc w równaniu poprzedzającym wprowadzimy to spłaszczenie kładąc $b = a(1 - \alpha')$ wypadnie

$$x^2 + y^2 + z^2 - 1 - 2\alpha'(x^2 + z^2 - 1) = 0$$

i w ogóle

$$x^2 + y^2 + z^2 - 1 - 2\alpha'u = 0 \quad (G)$$

w czon α' przypuszcza się iako bardzo mały współczynnik, zaś u' iako funkcja od x, y, z .

Pod takim to kształtem uważa autor *Mechaniki niebieskiej* równanie powierzchni

czni ziemi. — Znajduje się wiele ważnych zastosowań tego równania w *Geodezyi* i *Topografii* P. Puissant.

Fig. 14.) pod którą jest umieszczona ta formuła z fundamentalną, podała nam oraz rozwiązanie rysunkowe

Przecięcia Ellipsoidy.

Na tego rzuty będą równania:

$$Lx^2 + My^2 = P \text{ na planie } xy$$

$$My^2 + Nz^2 = P \text{ na planie } yz$$

$$Lx^2 + Nz^2 = P \text{ na planie } xz$$

podług tego iak weźmiemy $z=0, x=0, y=0$ (Fig. 22.) pokazuje nam ieszcze iak doysć formuły ellipsoidy (E) à priori.

Niechby x, y, z , były wyrażone przez współrzędne SP, PQ, QM , iakiego punktu M ellipsy obrotowej. Przez ten punkt M i przez SD , któraby razem była z i osią obrotową Ellipsoidy, poprowadźmy plan, który przetnie Ellipsoidę podług DME . — (Nazywa się to przecięcie południkowém, skoro M leży na planie xz)

Krzywa DME iest w planie pionowym przecięcia, stosując ią do pół osi większój $SD=a$; do pół osi mniejszój

$SE = SB = b$; wzięwszy do tego $SQ = r$,
 $SP = x$, $PQ = y$, $QM = z$ mamy

$$z^2 = \frac{a^2}{b^2} [b^2 - (x^2 + y^2)] \quad \text{z tąd}$$

$$a^2 x^2 + a^2 y^2 + b^2 z^2 = a^2 b^2$$

fig. 23. przedstawia nam podobneż użycie
 formuł drugiéj (E) i iak się oraz rozwią-
 zuie rysunkowym sposobem

Hyperboloida o iedném pokryciu (powłoce)
(à une nappe.)

lecz dla krótkości przestać tu tylko mu-
 siemy na przytoczeniu niektórych iéj
 własności, wynikających dla niéj z dru-
 giego równania formuł (E) to iest:

$$La^2 + My^2 - Nz^2 = P \quad \text{mianowicie}$$

- 1) iedna tylko z osi współrzędnych nie-
 spotyka się z iéj powierzchnią.
- 2) Wszystkie przecięcia prostopadłe od
 téj osi są kołami albo Ellipsami.
- 3) Koła te i ellipsy mają swe środki na
 téj osi i swe główne osie równole-
 głe od pozostałych dwóch drugich
 osi współrzędnych.
- 4) Główne przecięcia przechodzące przez
 oś obrotową, która się tu niespoty-

ka

ka z powierzchnią krzywą daie Hy-
 perbolę tworzącą Hyperloidę.

- 5) Obrawszy sobie iaki punkt M na po-
 wierzchni obrotowéj i spuściwszy od
 niego prostopadłą do planu xy , mo-
 żna *a priori* równie iak się uczyniło
 dla Ellipsoidy, doysć dla uiéj rów-
 nania w funkcyi trzech osi następu-
 jącego kształtu:

$$b^2 c^2 x^2 + a^2 c^2 y^2 + a^2 b^2 z^2 = a^2 b^2 c^2$$

a z niego równanie dla rzutów.

- 6) Jeżeli ieden z współczynnیکów iakiéj
 zmiennéj staie się zero, n.p. $N=0$,
 staie się wtedy równanie

$$Lx^2 + My^2 = P$$

łatwo dowieść równie iak i dla Ellipsoi-
 dy, że powierzchnia stanie się powier-
 chnią walca mającego za podstawę koło
 albo Ellipsę, którój równanie iest:

$$Lx^2 + My^2 = P$$

Jeżeli zaś L albo M iest zero, będzie
 ta powierzchnia walcowa mieć za pod-
 stawę Hyperbolę.

- 7) Skoro P iest zero, staie się równanie

$$Lx^2 + My^2 - Nz^2 = 0$$

Łatwo

Łatwo dowieść, że powierzchnia dana tym równaniem, ma tę osobliwszą własność, że każda linia poprowadzona przez początkowy punkt S do jakiegoś punktu, leży całkiem na niej; że więc taż powierzchnia jest rodzajem powierzchni ostrokągowych wchrowatych, czyli zpaczonych (*surface gauche*.) (*)

Dla Hyperlroidy o dwóch pokryciach jest trzecie wyrażenie formuł (E).

$$Nx^2 - My^2 - Lz^2 = P$$

należące do trzeciego gatunku powierzchni drugiego rzędu i pierwszego rodzaju.

O innych rodzajach, jakimi są Paraboloidy eliptyczne, hyperboliczne it.d.

niedo-

(*) Własności tej można z korzyścią użyć w sztukach nadobnych do dania pięknego kształtu naczyniom, koszykom i t. d. Dostaje na ten koniec, wzięwszy podstawy kołowe lub eliptyczne, podzielić ich obwody na równe części, i pościagać przez punkta podziału ich linie poprzeczne.

Jeżeli się do tego użyje nitki, powstanie ztąd figura pięknego kształtu; której powierzchnia krzywa złożoną będzie z samych podłużnych czworoboków w przyjemnej i symetrycznej degradacji idących. Ob, Monge i Lachette.

niedopuszcza mówić miejsce. Ciekawy czytelnik znajdzie czém sobie dogodzić w przytoczonych tylekrotnie wyżey autorach i w oyczystym przełożeniu *Biota*.

Potrzebnięszą nam jest uważać z wyższego oraz stanowiska i mówić

IV. O Planach stycznych do krzywych drugiego rzędu i onych normalnych.

I do tych jużśmy uczynili przygotowanie zmysłowe na rozwiązaniach rysunkowych, wykonanych na fig. 13. 14. 15. 16.

fig. 22.) dostarczy nam objaśnienia służące do teoryi zamkniętej w ogólnęj formule (B) — Weźmy skrócone ię równanie i wyrażmy przez $f(x, y, z) = 0$ równanie powierzchni krzywęj, zaś równanie planu

$$Ax' + By' + Cz' + D = 0$$

Jeżeli punkt dotknięcia (D) ma za współrzędne x', y', z' ; współrzędne te muszą zadosyć czynić równaniu, będziemy więc mieli:

$$Ax' + By' + Cz' + D = 0$$

Wyrugowawszy D między tym równaniem

i po-

i poprzedzającem wynaydziemy dla równania planu mającego przechodzić przez punkt $x'; y', z'$,

$$A(x-x') + B(y-y') + C(z-z') \dots \quad (1)$$

poprowadziwszy przez punkt D plan równoodległy do x, z ; plan ten przetnie powierzchnią podług krzywéy $Dm x'$ — Zaś plan styczny podług linii prostéy DL ; ta linia prosta DL musi być styczną z krzywą Dm , inaczej plan styczny przeciąłby powierzchnią krzywą. Równanie linii prostéy DE może się wywieść z równania (1); bo linia prosta DL będąc wspólnym przecięciem planu stycznego z planem równoległym do planu zx ma we wszystkich swych punktach wartości $= y$; a że punkt D jest na téj linii, mamy więc $y = y'$ czyli

$$y - y' = 0$$

Co przywodzi równanie (1) do

$$A(x-x') + C(z-z') = 0$$

równanie to wyraża związek, który zachodzi między współrzędnymi z, x iakiegokolwiek punktu wziętego na linii DL ; zaczęm będzie równaniem téjże linii. —

Można

Można ie tak wyrazić

$$z - z' = - \frac{A}{C} (x - x') \dots \quad (2)$$

Z drugiéy strony równanie krzywéy DM otrzyma się podobniez uważając y iako stałą w równaniu powierzchni krzywéy $f(z, y, x) = 0$

Chcąc teraz wyrazić warunek, że linia DL jest styczną do krzywéy DM , trzeba podług fig. 3, aby współczynnik od $x - x'$ w równaniu (2) równał się wartości $\frac{dz'}{dx'}$ wywiedzionéy z równania krzywéy DM .

Lecz równanie téy krzywéy będąc równaniem powierzchni, w którybyśmy zrobili y stałą, dosyć jest różniczkować równanie powierzchni i wyprowadzić z niéy $\frac{dz}{dx}$, bo to znaczenie przypuszcza, że w różniczkowaniu brała się y za stałą. — Wynika ztąd, że naznaczając z kreskami z', x' w odprawioném działaniu, mamy za warunek aby DL była styczną do DM ,

N

$$-\frac{A}{C} = \frac{dz'}{dx'} \text{ albo raczy } A = -C \frac{dz'}{dx'} \quad (3)$$

Jeżeli potem przez punkt D poprowadzimy plan równoległy do planu zy , plan ten przetnie powierzchnię podług krzywej DN i plan styczny podług linii prostej DK .

Dowodzi się podobnym iak wprzód sposobem, że ta linia prosta DK musi być styczną do krzywej przecięcia DN , i że dla wszystkich punktów téj linii DK , wszystkie odcinki będąc równemi wypada $x - x' = 0$, co przywodzi równanie (V) do

$$B(y - y') + C(z - z') = 0$$

z kąd się wywodzi

$$z - z' = -\frac{C}{B}(y - y')$$

To równanie będąc dla linii prostej DK , wyrazi się warunek, że ta linia jest styczną krzywej DN , a równając współczynnik $y - y'$, współczynnikowi $\frac{dz'}{dy'}$ wyciągniętemu z równania powierz-

$$\text{chni otrzymamy } z' - \frac{B}{C} = \frac{dz'}{dy'}$$

$$\text{zatem } B = -C \frac{dz'}{dy'} \quad (4)$$

Jeżeli się podstawią w równanie (1) wartości A i B dane przez równanie (3) i (4) otrzymamy

$$-C \frac{dz'}{dy'}(x - x') - C \frac{dz'}{dy'}(y - y') + C \frac{dz'}{dy'}(z - z') = 0$$

z kąd się wyciąga odmiana dla równania planu stycznego, dla punktów x', y', z'

$$x - x' = \frac{dx'}{dx'}(x - x') + \frac{dz'}{dy'}(y - y') \dots \quad (5)$$

Szukamy n.p. równania planu stycznego do kuli. Współrzędnymi środkow, będąc x', y', z' , kula będzie miała równanie

$$(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2 = r^2$$

różniczkując, mamy

$$(x - x') dx + (y - y') dy + (z - z') dz = 0$$

z kąd się wywodzi

$$\frac{dz}{dx} = \frac{x' - x}{z - z'}; \quad \frac{dz}{dy} = \frac{y' - y}{z - z'}$$

Więc równanie planu stycznego do kuli w punkcie, którego współrzędne są x'', y'', z'' będzie

$$z - z'' = \frac{x' - x''}{z'' - z'}(x - x'') + \frac{y' - y''}{z'' - z'}(y - y'')$$

N 2

Jeżeli

Jeżeli ten plan przechodzi przez wierzchołek średnicy pionowej, otrzymamy:

$$x'' = x', y'' = y', z'' = z' + r$$

Wartości te przywiodłyby równania planu stycznego do $z = z' + r$, co jest równaniem planu równoległego do planu x, y .

V. Rozwinięcie równania krzywej linii za pomocą rachunku Infinitesimalnego.

Zastąpi nam takowe roztrząsanie (discussion) za pomocą zwyczajnego rozbioru w *Biocie* umieszczonego:

fig. 24. Niech będzie daném równanie

$$y^4 - 96a^2y^2 + 100a^2x^2 - x^4 = 0$$

można to równanie rozwinąć ze względu na y albo x ; w pierwszym razie daie

$$y = \pm \sqrt[4]{48a^2 - \sqrt{2304a^4 - 100a^2x^2 + x^4}} \quad (2)$$

Rachunek różniczkowy skróci nam tu znacznie dochodzenia zwyczajnego rozbioru, tudzież jakie będą granice odnóg krzywej, czy będzie w siebie wchodząca: czy będzie miała środek, średnicę it.d. Do tego okaże nam sposoby, tak się takowe rozważenia dokonywają,

skoro

skoro nawet równanie krzywej daney jest nadto wysokiego stopnia, żeby można otrzymać ogólne wyrażenie iedney zmiennej za pomocą drugiej.

Aby wyznaczyć granice krzywej we względzie na współrzędne, albo dla odkrycia czy y ma *naywiększość* lub *naymniejszość*, trzeba nam dochodzić, w jakim przypadku współczynnik różniczkowy

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^3 - 50a^2x}{y^3 - 48a^2y} \text{ staie się zero,} \quad (3)$$

mamy $x^3 - 50a^2x = 0$ z tego

$$x = 0; \quad x = \pm 5a\sqrt[3]{2} \quad (4)$$

Pierwsza wartość od x , podstawiona w daném równaniu daie

$$y = 0; \quad \text{także } y = \pm 4a\sqrt[3]{6} \quad (5)$$

Dwie te ostatnie wartości dla y daia punkta D i D' . Zbieg obydwóch wartości $x=0, y=0$ wskazuje punkt A i

$$\text{czyni razem } \frac{dy}{dx} = \frac{0}{0} \quad (6)$$

wyrażenia takowe wskazują punkta wielokrotne; tłómaczenie tego, równie jak dalsze wnioski, przechodziłyby granice naszego pisma; znajdzie czytelnik te reguły

guły w *La Croix Traité elem: du calcul diff. p. 107. seq.* Na wypadkach tu tylko przestać musimy, i tak znaczy tu

$$\frac{dy}{dx} = \pm \frac{5}{4} \sqrt{\frac{2}{3}} \quad (7)$$

to jest że krzywa ma w punkcie *A* dwie styczne czyniące z osią odcinków kąty, których styczne trygonometryczne są wskazane formułą (7) i które zatem łatwo jest wykreślić.

Co do pierwiastków wyrażenia (4) to włożywszy do danego równania (1), sprawią, że *y* urojone, zaczęm nie dadzą dla niej ani *maximum*, ani *minimum*. — Jak wynaleść granice krzywéy w kierunku odcinków; własności iéy, odnóg iéy nieskończonych, punktu zgięcia, i asymptoty? Ob. *La Croix Traité elem. du Cal. diff. p. 109.*

Zebrawszy wszystkie wypadki tych rozmaitych dochodzeń, znajdziemy, że kształt krzywéy linii jest wyznaczony okolicznościami, które przedstawiają punkta *A, D, F, G, H, K* i odnogi nieskończone *XX'*.

VI. Zasada najmniejszych Kwadratów. (Principée des moindres carres)

Wielkiego jest ieszcze w Astronomii użytku do Interpolacyi i wynalezienia błędów obserwacyi, równie iak Analogie diferencyalne. Prowadzi do objaśnienia téy teoryi

Zadanie. Mamy wynaleść środek średnich oddaleń czyli n.p. środek ciężkości ostrosłupa.

Aby mieć oddalenie środka ciężkości wielu ciał od danego planu; wiemy z Mechaniki, że trzeba rozmnożyć masę każdego z tych ciał, przez iego oddalenie od danego planu, i wszystko podzielić przez sumę mas.

To założywszy, wystawmy sobie linię prostą, poprowadzoną od wierzchołka ostrosłupa do środka podstawy; będzie oczywiście szukany środek średnich oddaleń ostrosłupa znajdować się na téy linii: idzie więc tu tylko o to, aby wynaleść, iakie jest to oddalenie od podstawy stósownie do przyjętęy zasady.

Nazwawszy a wysokość, b podstawę ostrosłupa, zaś x oddalenie od wierzchołka iakiego przecięcia równoległego do podstawy.

Wiemy z Geometrii, że przecięcie to jest $\frac{bx^2}{a^2}$; rozmnożywszy go przez dx otrzymamy (stósownie do fig. 20) na wzrost bryłowości, wyrażenie:

$$\frac{b}{a^2} x^2 dx \quad (1)$$

więc ze względu na podstawę będzie moment statyczny tego wzrostu

$$\frac{b}{a^2} (a-x) x^2 dx \quad (2)$$

nazwawszy więc żądane oddalenie y otrzymamy

$$y = \frac{\int \frac{b}{a^2} (a-x) x^2 dx}{\int \frac{b}{a^2} x^2 dx}$$

to działan ie wykonawszy i przerobiwszy mamy

$$y = \frac{\int \frac{b}{a^2} \left(\frac{1}{3} ax^3 - \frac{1}{4} x^4 \right) + C}{\frac{b}{a^2} \cdot \frac{1}{3} x^3 + C'} \quad (3)$$

Trzeba nam ieszcze wynaleść stałe C i C' ; lecz gdy w ostrosłupie stanie się $x=0$; całkowite także się staia zero; więc musi byđż $C=0$, $C'=0$ i równanie (3) przywodzi się do

$$y = \frac{1}{4} x \quad (4)$$

wziąwszy $x=a$, otrzymamy dla całego ostrosłupa

$$y = \frac{1}{4} a$$

Które to prawidło łatwo iest słownie wyrazić. W związku z ninieyszém iest następujące

Zadanie. Maiąc danych w przestrzeni tyle punktów, ile chcemy, wynaleść taki punkt, żeby poprowadziwszy przez niego linie do każdego z pozostałych, summa kwadratów z tych linii była dana równa do danego kwadratu.

Dla

Dla skrócenia rachunku przypuśćmy, że trzy tylko są dane punkta $A' A'' A'''$; onych współrzędne

$$\begin{array}{ccc} \alpha' & \alpha'' & \alpha''' \\ \beta' & \beta'' & \beta''' \\ \gamma' & \gamma'' & \gamma''' \end{array}$$

Niech do tego będą x, y, z , współrzędne mi szukanego punktu M , wiemy z (fig. 1) że

$$A'M^2 = (x - \alpha')^2 + (y - \beta')^2 + (z - \gamma')^2$$

$$A''M^2 = (x - \alpha'')^2 + (y - \beta'')^2 + (z - \gamma'')^2 \quad (A)$$

$$A'''M^2 = (x - \alpha''')^2 + (y - \beta''')^2 + (z - \gamma''')^2$$

wziąwszy równą q^2 summe wyrazów drugiej strony tych równań rozwiniętych, podzieliwszy wszystko przez 3 i nazwawszy dla skrócenia summy pojedynczych wyrazów $\alpha' + \alpha'' + \alpha''' = s'$; $\beta' + \beta'' + \beta''' = s''$;

$$\gamma' + \gamma'' + \gamma''' = s'''$$

zaś summy z ich kwadratów $\sigma' \sigma'' \sigma'''$ otrzymamy

$$x^2 + y^2 + z^2 - \frac{2}{3} s' x - \frac{2}{3} s'' y - \frac{2}{3} s''' z$$

$$= q^2 - \frac{\sigma' + \sigma'' + \sigma'''}{3} \quad (B)$$

Widać.

Widać z tego równania, że wszystkie punkta dogadzające zadaniu, znajdując się na powierzchni kuli, której środek jest właśnie środkiem sił równoległych, w przypuszczeniu, że są sobie równe i działają na punkta A', A'', A''' , albo co na jedno wychodzi, że jest środkiem średnich oddaleń tychże punktów od trzech planów współrzędnych.

Wynika jeszcze z formuły (A) i (B) że w każdym wielokącie prostokreślnym płaskim albo wichrowatym (gauche) summa kwadratów z oddaleń wierzchołków kątów od jakiego punktu wziętego w przestrzeni równa się summie kwadratów z oddaleń tychże wierzchołków od środka średnich oddaleń, przydawszy do tego kwadrat z oddalenia tegoż środka, od pierwszego punktu wziętego w przestrzeni, rozmnożonego przez liczbę kątów wielokąta.

Teraz gdyby żądano, aby summa q^2 była minimum, widzielibyśmy, że szukany punkt x, y, z , byłby samymże środkiem średnich oddaleń wszystkich punktów danych.

Do

Do tegoż wypadku doszłoby się wzięwszy $dq^2=0$

VII. O Rzutach ortograficznych i stereograficznych.

Jeżeli między ciałem i okiem poświadymy jaką powierzchnią przeźroczystą albo plan, i wystawimy sobie poprowadzone promienia widzenia do rozmaitych punktów ciała, przecięcia tych promieni z powierzchnią, będą obrazami, czyli rzutami stereograficznymi wszystkich tych punktów.

Skoro oko przypuści się w oddaleniu nieskończenie wielkiem od planu rzutowego albo od obrazu optycznego, stażą się wszystkie linie rzucające równoległymi między sobą, a jeżeli do tego są prostopadłemi do tegoż obrazu, nazywa się wtedy rzut ortograficznym; takiego rodzaju były rzuty dotąd uważane; obydwie zaś rodzaje służą za fundament do robienia kart geograficznych. Ważne jego zastosowania w Astronomii są między innemi o Zaćmieniach, iak to widzimy w Rozprawie o Zaćmieniach. Obydwie zaś rodzaje

służą za fundament do robienia kart geograficznych; Ob. *Puissant Traité de topographie.* — T. Mayer Gründl: und ausführh: Unterr: zur prakt: Geometrie. W Miernictwie wojenném r. 1791 są do nich pierwsze podane rysy. W drugiéj części Algebry Śniadeckiego są wyrażenia kół znaczących południki i równoleżniki, których przecięcia dają punkta na ziemi przez znaiome ich długości i szerokości. Nazwawszy długość l zaś szerokość λ iakiego miejsca na ziemi, zaś r promień ziemi, iest promień południka $= r \sec l$ zaś promień równoleżnika $= r \cotg \lambda$

Nowszym sposobem rozbiorowym takby się do rozwiązania tego zadania przystąpiło:

Równanie kuli, kładąc iéy początek współrzędnych we środku, iest $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ równanie zaś planu iakiegokolwiek z iéy kół

$$z = ax + hy + c$$

zaś rzuty pionowe ortograficzne tworzące ostrokąg optyczny są w ogóle

$$(x-x') = m(z+z'), \quad y-y' = n(z+z').$$

Lecz

Lecz w przypuszczeniu, że współrzędne wierzchołka ostrokągu są

$$x'=0, y'=0, -z' \text{ mamy dorazu}$$

$$x=m(z+z'); y=n(z+z')$$

a tak równanie przeszłego planu staie się

$$z=am(z+z')+bn(z+z')+c$$

te wartości podstawivszy w równaniu dla kuli, i wyrugowawszy m, n , mamy na koniec

$$\begin{aligned} x^2+y^2+\frac{az'x+bz'y+c(z+z')^2}{(c+z')^2} \\ =\frac{r^2(z+z'-az-hy)^2}{(c+z')^2} \end{aligned} \quad (A)$$

Takiem jest równanie powierzchni ostrokągu mającego za podstawę iakiekolwiek koło kuli, i któregoby wierzchołek był na osi z nad planem xy , który przypuszczamy, że jest poziomem.

W rzucie znanym pod nazwiskiem rzutu stereograficznego Ptolemeuszowego, jest miejsce oka na powierzchni kuli na końcu promienia prostopadłego do obrazu optycznego, lecz w tym razie jest $z'=r$, mamy więc na równanie ostrokągu optycznego

$$\begin{aligned} x^2+y^2+\frac{2ar-bry+c(z+r)^2}{(c+r)^2} \\ =\frac{r^2(z+r-ax-by)^2}{(c+r)^2} \end{aligned} \quad (B)$$

a jeżeli w tém równaniu weźmiemy $z=0$, będzie rzut stereograficzny koła kuli, służącego za podstawę ostrokągu miał za równanie:

$$\begin{aligned} x^2+y^2+\frac{2ar^2x}{c+r}+\frac{2br^2y}{c+r} \\ =\frac{(r-e)^2}{c+r}r^2 \end{aligned} \quad (C)$$

Wynika ztąd, że rzuty stereograficzne kół kuli są także kołami.

Przestać musimy na wskazaniu drogi, jaką się tu postępuje, i buyność zasad analitycznych w ich zastosowaniach.

Dalsze tego rodzaju dochodzenia znajdzie czytelnik w wspomnianym tylekroćnie zbiorze P. Puissant, z którego są wzięte niniejsze wyiątki z małemi nieco odmianami co do notacyi.

Perspektywa malarska.

Na tychże polega zasadach.

(fig. 25.) Niech $ABHR$ wyraża nam obraz,

braz, na którym chcemy odrysować iaką okolicę. Idzie tu tylko o to, aby na tym obrazie umieścić w należytem położeniu obrazki punktów, zewnątrz obrazu będących. Widać oczywiście, że te obrazki znajdować się będą na wspólnych przecięciach obrazu, z liniami widzenia od oka do zewnętrznych punktów poprowadzonemi. Połączone punkta obrazkowe liniami prostemi, będą obrazkami linii zewnętrznych. Ztąd powstają obrazki iakichkolwiek figur zewnętrznych.

Cała więc rzecz na tém polega, aby przyzwóicie umieszczać punkta obrazkowe na planie rzutowym $ABHR$, dla otrzymania iak najzupełniejszego omamienia. Lecz położenie tych punktów zależy od położenia oka i jego od tablicy oddalenia, stósownie do wyraźnego widzenia i piękności malarskiéy; muszą więc nasze współrzędne być wyrażonemi w funkcyi wysokości oka nad poziomem i jego oddalenia od tablicy.

Nazwawszy więc znowu x, y, z , trzy współrzędne punktu zewnętrznego P , ich obra-

obrazki x', y', z' , oddalenie oka od tablicy obrazowéy d , za' wysokość oka nad poziomem h , i zrobiwszy przyzwoite proporcye w trójkątach podobnych, które się tu poformuią, otrzymamy:

$$x = \frac{xh}{d+x}$$

$$y = \frac{yd}{d+x}$$

$$z = \frac{zd}{d+x}$$

Z tych trzech wyrażeń wynikaia rozliczne wnioski; między innemi

- 1) Że linie w naturze równoległe odlinii ziemskiéy AB , zostaią w obrazie od niéy równoległemi.
- 2) Że linie prostopadłe do Tablicy, schodzą się na niéy w punkcie O
- 3) Że linie równoległe w naturze, ale położone ukośnie względem tablicy, schodzą się wszystkie w iakim punkcie na linii pozioméy HR i t. d.

Na tych zasadach polegaia wszystkie prawidła do robienia tak nazwanych *podziałek optycznych*, któremi się mierzą

O linie,

linie, kąty zewnątrz obrazu, i onych obrazki.

Daléy, z podobieństwa przywoicie dobranych trójkątów wyciągaia się wyrażenia i prawidła do ograniczania cieniów pełnych i półcieniów, rzuconych od ciał w iakiémkolwiek bądź położeniu punktu światłego lub słońca, malowanie się ciał w wodzie i t. d.

Na to wszystko znajdzie czytelnik obszernie wyjaśnienia z dobranymi przykładami w wyborném dziele P. Lambert Freye *Perspektive*, Zurich 1774.

Widziemy już z tych przykładów, iak buynemi są zastosowania prostych zasad Geometrii rozbiorowéy. — Wróćmy się do bliżéy nas interesującego przedmiotu astronomii i gnomoniki, a tém iest

VIII. Wyznaczenie płaszczyzny południkowéy.

Pominąwszy zwyczajny wyżéy wspomniony sposób za pomocą wysokości równych słońca, branych w godzinach rannych i wieczornych, przystąpmy do rozważa-

ważania tego zadania, także z wyższego stanowiska.

Pierwszy sposób

Za pomocą Trygonometrii Kulistéy.

Sposób ten polega na bardzo prostém działaniu mechaniczném.

Wystawmy sobie zawieszone na pręcie poziomym dwa piony w kierunku od południa ku północy, i niechby południowy pion był ruchomy w prawo i w lewo razem z poruszeniem oka.

Widać ztąd, że skoro dwie gwiazdy różniące się w AR o 12 godzin, będą zakryte obydwoma nitkami, wtedy płaszczyzna obydwóch nitek będzie zupełnie południkową. — Takiemi gwiazdami są wspomniane na karcie 18.

Tab. III. fig. 1.) Niech Z wyraża zenit, P biegun, $D'S'S'D''$ koło nakręslone od gwiazdy, $S'S''$ iéy przechód górny i dolny, gdy pada zewnątrz południka, zaś $D'D''$ gdy te przechody są w samym południku. — Czasy upłynione między temi przechodami muszą się oczywiście równać 12 godzinom w ostatnim razie; zaś w

pierwszym byłby czas mniejszym od 12 godzin, o połowę różnicy całego obrotu we 24 godzinach gwiazdowych.

W trójkącie $PS'S''$, iest kąt przy P czasem upłynionym między dwoma przechodami gwiazdy, zamienionym na łuk; znamy przeto i kąt przy S' , który iest dopełnieniem iego połowy, i razem spełnieniem kąta będącego w trójkącie ZPS , w którym kąt Z iest azymutem.

Gdy do tego są w ostatnim znaiome ZP dopełnienie szerokości, zaś PS dopełnienie zboczenia gwiazdy, także wiadomego z Katalogów, mamy więc

$$\sin Z = \frac{\sin S' \sin \Delta}{\sin D} \quad (1)$$

Jeżeli plan nitek mało co się różni od planu południkowego, staie się

$$z = \frac{S \sin \Delta}{\sin D} \quad (2)$$

Gdybyśmy uważali gwiazdę przy największym iey odstepie (digression) zamieniłaby się sieczna $ZS'S''$ na styczną, a wtedy otrzymalibyśmy

sin

$$\begin{aligned} \sin Z &= \frac{\sin \Delta}{\sin D} = \frac{\cos \phi}{\cos \delta} \\ \cos Z &= \frac{\cos D}{\cos \Delta} = \frac{\sin \phi}{\sin \delta} \\ \cos P &= \frac{\tan \Delta}{\tan D} = \frac{\cos \delta}{\cot \phi} \end{aligned} \quad (3)$$

Na tym sposobie polega ustanowienie Lunety południkowey, narzędzia równie nieodbicie potrzebnego do obserwacyi astronomicznych iak doskonały zegar.

W dwódniovych obserwacyach są wskazane formuły objaśnione oyczystemi przykładami, iak to narzędzie dokładnie w płaszczyźnie południkowey ustawić. Pięknym nam nam tu będzie do tegoż zamiaru

Drugi sposób

za pomocą Geometrii analityczney.

Wystawił go Littrow: Ob. Bode Astro: Jahrbuch na rok 1820. W treści go tu tylko przytoczyć możemy.

fig. 2.) 1) Niech Kk będzie kołem, które opisuje Luneta południkowa fałszywie położona, to iest nie będąca ani w planie południkowym PKH , ani pionową do poziomemu

ziomu BH , ani pionową do równika BA .

Niech P znaczy biegun północny równika, Z zenit: do tego niech $AK=D$ będzie zboczeniem punktu D , w którym plan narzędzia przecina południk i $Akh=B$ pochyłością obydwóch planów. Na koniec niech znaczą P' pozorne wznoszenie się proste gwiazdy S' w czasie; p' czas gwiazdowy iędy przechodu przez plan lunety, $P'-p'=a'$; i d' iędy zboczenie. Dla drugiej gwiazdy S'' niech będą te wielkości P'' , p'' , a'' i d'' .

To założywszy, przystępuje autor na-przód do wystawienia trygonometrycznym nowym sposobem poprawy położenia lunety, już nie do samego tylko poziomu, iak było dotąd w zwyczaju, lecz ze względu na równik, co jest stósowniēy i zgodniēy do obserwacyi razem się odprawu-jących, i tak mamy w trójkacie kulistym

$$\cotg PS'S'' = \frac{\tag d' \cos d' - \sin d' \cos(a'' - a')}{\sin(a'' - a')}$$

i podobnież w trójkacie PKS'

$$-\cotg PS'S'' = \frac{\tag D \cos d' - \sin d' \cos a'}{\sin a'}$$

wziąw-

wziąwszy obydwie te wartości za równe, otrzymamy

$$\tag D = \frac{\sin a'' \tag d' - \sin a' \tag d''}{\sin(a'' - a')} \quad (I)$$

i taką iest pierwsza z szukanych wielkości D .

Równie krótko otrzymuie się z trójkąta $S''PK$

$$\tag d'' = \frac{-\cotg B \sin a'' + \cos a' \sin D}{\cos D}$$

a z trójkąta $S'PK$

$$\tag d' = \frac{-\cotg B \sin a' + \cos a'' \sin D}{\cos D}$$

a wyrugowawszy D z obydwóch tych równań, będzie

$$\tag B = \frac{\sin(a'' - a')}{(\cos a'' \tag d' - \cos a' \tag d'') \cos D} \quad (II)$$

co iest druga z szukanych wielkości.

Obydwa te równania zawieraią zupełne rozwiązanie naszego zadania.

2) Chcąc z tego wywieść, iak się dotąd czynić zwykło, azymut $Hzh=A$, i pochyłość $KhH=i$ do poziomu, to nazwawszy Φ wysokość bieguna, iest w trójkacie hZK

cos

$$\cos J = \sin(\phi - D) \sin B \quad (1)$$

$$\operatorname{tag} A = \operatorname{fag} B \cos(\phi - D) \quad (2)$$

3) Równie prostém iest rozwiązanie odwrotnego zadania, iak znając położenie, wynaleść kąt godzinowy $ZPS' = a'$ dla każdej innéj obserwacyi.

$$\text{Weźm } KSP' = m, \text{ zaczém } \sin m = \frac{\sin B \cos D}{\cos d'}$$

$$\text{iest } \operatorname{tag} \frac{1}{2} a' = \frac{\cos \frac{1}{2}(D - d')}{\sin \frac{1}{2}(D + d')} \operatorname{tag} \frac{1}{2}(B - m)$$

4) Wszystko co poprzedzało, zamyka w sobie zupełnie dokładne wyrażenia, z których się daią rozmaitemi sposobami wywieść skrócone. I tak n.p. jeżeli wielkości $B, D - d', a', a''$, są bardzo małemi iak się najczęściej zdarza, będzie w § 3,

$$\text{gdy } m = \frac{B \cos D}{\cos d'}$$

$$a' = \frac{B \sin(D - d')}{\cos d'}$$

podobnież

$$a'' = \frac{B \sin(D - d'')}{\cos d''}$$

Z tych zaś dwóch równań można wyprówadzić wartości dla wielkości B, D , rozmaitemi.

rozmaitym sposobem, iak się znajduią w *Gausa Theoria mot. corp. coele.*

Nakoniec pódają ieszcze ostatnie dwa równania prosty sposób do praktycznego użycia. I tak dla krótkości nazwawszy $D - d' = \Delta'$ i $D - d'' = \Delta''$, daią one

$$da' = \frac{dB \sin \Delta' + BdD \cos \Delta'}{\cos d'} \quad (III)$$

$$da'' = \frac{dB \sin \Delta'' + BdD \cos \Delta''}{\cos d''}$$

zkuąd wynika pótwierdzenie, że do wyznaczenia czasu najlepszymi są gwiazdy przy równiku leżące. Na odwrót zaś daią dwa ostatnie wyrażenia

$$dD = \frac{da' \cos d' \sin \Delta'' - da'' \cos d'' \sin \Delta'}{\sin(\Delta'' - \Delta')} \quad (IV)$$

$$dB = \frac{da'' \cos d'' \cos \Delta' - da' \cos d' \cos \Delta''}{\sin(\Delta'' - \Delta')}$$

zkuąd wynika, że dla wyznaczenia położenia lunety, takie gwiazdy wybierać potrzeba, których zbóczenia różnią się prawie o 90° .

5) Dotąd przypuszczaliśmy tylko dwa błędy w Instrumencie południkowym. — Gdy zaś położenie planu wyznacza się przez

uży

trzy punkta, dla zupełnego więc rozwiązania naszego zadania przypuścimy, że luneta nakreślił iakiekolwiek małe koło, a w takiem przypuszczeniu już nie należy właściwie to zadanie do astronomii kulistey, bo w téj jest tylko mowa o kołach wielkich. Z tém wszystkiem i dla tego nayogólniejszego przypadku podaie nam geometrya różbiórowa łatwe rozwiązanie, które swą prostotą przewyższa poprzedzające.

Wyraziwszy trzema współrzędnymi prostopadłemi x, y, z położenie gwiazdy w chwili iéy przechodu przez lunetę, i ze względu na środek ziemi, niech będzie równaniem planu lunety.

$$Z = Mx - Ny + R \quad (A)$$

idzie tu o wynalezienie wielkości M, N, P , wyznaczających położenie planu ze znaiomych wielkości wziętych z obserwacyi.

Naznaczywszy więc iak wprzód wielkości pierwszey, drugiey i trzeciey obserwacyi, iedną, dwoma i trzema króskami, otrzymamy trzy następujące równania:

$$Z' =$$

$$\begin{aligned} Z' &= Mx' - Ny' + P \\ Z'' &= Mx'' - Ny'' + P \\ Z''' &= Mx''' - Ny''' + P \end{aligned} \quad (B)$$

Takiem jest ogólne tu postępowanie.

Ponieważ w równaniach B są współrzędne, a przynajmniej ich stosunki znaiomemi, gdyż te stosunki są oczywiście funkcjami kątów godzinowych i zboczeń gwiazd uważanych, skoro się weźmie x, y , za plan równika zaś x , za z plan południka, można więc zrównać B wynaleść wartości dla trzech wielkości MNP znaiomą drogą rugowania, czém się wyznaczy plan lunety. I wzajemnie skoro wielkości M, N, P , są raz wiadome, można z każdéy nowéy obserwacyi za pomocą równania (A) wynaleść kąt godzinowy odpowiadający téj obserwacyi.

Nazwiemy iak wprzód a, d, r , kąt godzinowy zboczenie, i oddalenie gwiazdy, a skracając, wielkości $\sin d'' - \sin d'''$, $\sin d' - \sin d'''$, $\sin d' - \sin d''$ przez $\Delta', \Delta'', \Delta'''$, równie iak wielkości $\frac{\sin(a'' - a''')}{\cos d'}$, $\frac{\sin(a' - a''')}{\cos d''}$, $\frac{\sin(a' - a'')}{\cos d'''}$.

$\frac{\sin(a' - a'')}{\cos d''}$ w tymże samym porządku przez A', A'', A''' .

6) To założywszy, mamy dla pierwszej gwiazdy $x' = r' \cos d' \cos a', y' = r' \cos d' \sin a'; z' = r' \sin d'$ (Tab. II. fig. 1.) i podobneż wyrażenia dla drugiej gwiazdy. Pomniąc zaś na to, że wszystkie te gwiazdy uważać można na powierzchni kuli, w której środku jest obserwator, a którego promień jest jednością, mamy $r' = r'' = r''' = 1$, a te wartości współrzędnych podstawivszy w równaniach (B) otrzymamy przez rugowanie.

$$M = \frac{\Delta' \sin a' \cos d' - \Delta'' \sin a'' \cos d'' + \Delta''' \sin a''' \cos d'''}{(A' - A'' + A''') \cos d' \cos d'' \cos d'''}$$

$$N = \frac{\Delta' \cos a' \cos d' - \Delta'' \cos a'' \cos d'' + \Delta''' \cos a''' \cos d'''}{(A' - A'' + A''') \cos d' \cos d'' \cos d'''}$$

$$P = \frac{A' \sin d' + A'' \sin d'' + A''' \sin d'''}{A' - A'' - A'''}$$

jest więc tym sposobem wyznaczone położenie lunety i pierwsze zadanie rozwiązane.

7) Skoro zaś położenie tego planu jest danem, i szukamy poprawy uważanego czasu, daie wtedy równanie (A)

$$R = M \cos a' - N \sin a' \text{ w czém } R = \frac{\sin d' - P}{\cos d'}$$

z kąd wynika

$$\sin a' = \frac{-NR + M \sqrt{M^2 + N^2 - R^2}}{M^2 + N^2}$$

w czém a i a jest szukaną poprawką, czém się rozwiązuie drugie zadanie. Dla położenia planu ze względu na poziom, jest tu B pochyłość planu lunety do planu południkowego xz , i D kąt linii węzłowej na xz z osią x , nazwawszy tang $D = M$ mamy

$$\tan B = \frac{\sqrt{1 + M^2}}{N} = \frac{1}{N \cos D}$$

z kąd się wynayduje A i J iak w § 2. it. d.

GNOMONIKA ROZBIOROWA.

Podacie nam między innemi piękne poprzedzających zasad użycie.

Nayprościéy okazał go *Puissant* (*) z którego weźmiemy niniejszy wyiątek.

Po

(*) Ob. Corresp. de l'école normale polytechnique
2 Vol. p. 377.

Po wstępnych wyjaśnieniach, co jest *skazówka*, *podskazówka*, czyli ięć rzut na planie kompasowym *skazówka przybrana*, *środek kompasowy*, *linia południkowa*, *linia godzinowa*; a szczególniej po zasięgnięciu tu potrzebnych wyobrażeń astronomicznych, i rozwiązaniu trygonometrycznem ogólnego zadania gnomoniki, łatwo nam będzie rozwiązać ogólne.

ZADANIE ROZBIOROWE. Wyznaczyć *linie godzinowe i krzywe zboczenia słonecznego na kompasie pionowym zbaczającym*, *znając długość skazówki, linię południkową, zboczenie kompasu i szerokość miejsca*

Zastósujemy tu pierwsze zadanie rozbiorowe do wyznaczenia punktu w przestrzeni, ściągając go do trzech współrzędnych prostokątnych, biorąc zaś oś x przecięcie planu południkowego z planem poziomym, za oś y ślad pierwszego koła wierzchołkowego na tymże ostatnim planie; zaczem za oś z linię wierzchołkową.

Ponieważ początek współrzędnych może być wzięty za środek ziemi, albo kuli nieba, linia łącząca ten punkt z biegunem

gunem świata, będzie zupełnie w planie xz , i zrobi z osią x kąt λ równy szerokości miejsca, czyli wysokości bieguna. A tak (fig. 7 i 8 Tab.) przypominając nam drogę naszego trygonometrycznego postępowania, wskażą nam oraz porządek użycia dowiedzionych zasad rozbiorowych, mianowicie

$$z = ax + by (*)$$

jest równaniem planu godzinowego jakiegokolwiek; jest w niem z (Tab. I. fig. 1: Tab. III. fig. 3.)

$$a = \operatorname{tag} \lambda$$

co do współczynnika b , zależy on od kąta pochyłości, który czyni tenże plan z planem południkowym. Jest on tym samym, któryśmy nazwali E na równiku, a który tu nazwiemy p , bo jest kątem przy biegunie. Lecz z wiadomego wyrażenia

(*) U *Plissanta* jest to wyrażenie $z = Ax + By$ co się sprzeciwia pierwiastkowemu raz przyjętemu pierwszemu wyrażeniu dla planu fig. 1 Tab. I. n. 7. Takowe niewczesne odmiany sprawują niepotrzebnie trudność poczynającym.

żenia dla kąta pochyłości dwóch planów, skoro jeden z nich jest razem planem rzutowym, mamy (str. 70.)

$$\cos p = \frac{b}{\sqrt{1+a^2+b^2}} \quad \text{więc}$$

$$\cos^2 p = \frac{b^2}{\sec^2 \lambda + b^2} \quad \text{zaczém}$$

$$b = \frac{\cotg p}{\cos \lambda}$$

wynika ztąd, że równanie planu koła godzinowego jest

$$z = x \tag \lambda + y \frac{\cotg p}{\cos \lambda} \quad (1)$$

biorąc coraz x, z , równe zero, otrzymamy nasze R'', R' , to jest ślady pionowe i poziome tych kół godzinowych, a jeżeli weźmiemy za przydayne kąty godzinowe wieczorne, będą miały ich linie godzinowe kierunek ku wschodowi, zaś równe ku zachodowi będą ujemnymi, a wtedy w obu przypadkach przydayne x rachować się będą w kierunku od południa do północy, przydayne y od zachodu ku wscho-

wschodowi, zaś przydayne z z góry na dół.

Jeżeli teraz weźmiemy pierwszy plan wierzchołkowy x, y , to jest bez żadnego zboczenia, otrzymamy dla linii godzinowych równanie

$$z = y \frac{\cotg p}{\cos \lambda} \quad (2)$$

nazwawszy H kąt, który czyni ta linia godzinowa z osią z czyli z południkiem, będzie

$$\tag H = \frac{y}{z} = \cos \lambda \tag p$$

albo też nazwawszy e kąt pochyłości skazówki do planu kompasowego, czyli kąt między skazówką i podskazówką, dla $e = 90 - \lambda$ stanie się

$$\tag H = \sin e \tag p \quad (3)$$

Równanie to ma miejsce dla planu pionowego równie iak dla poziomego, wyjąwszy, że dla ostatniego trzeba wziąć $e = \lambda$ co się zupełnie zgadza z powyższem trygonometrycznem rozwiązaniem. Przyśtąpmy do ogólniejszego rozwiązania.

Niech będzie α zboczenie iakiękolwiek ściany południowej od wschodu ku północy. Takim będzie i kąt zawarty między nowemi i dawnemi współrzędnemi yy' , xx' skoro weźmiemy z wspólne. Z wiadomych zaś formuł dla zamiany współrzędnych (fig. 12 Tab. II.) mamy

$$x' = x \cos \alpha + y \sin \alpha$$

$$y' = y \cos \alpha - x \sin \alpha$$

$$z' = z$$

Wtedy równanie (1) ściągnięte do nowych współrzędnych stanie się

$$z' \cos \lambda = x' \sin \lambda \cos \alpha + y' \sin \lambda \sin \alpha \quad (4)$$

$$- x' \cotg p \sin \alpha + y' \cotg p \cos \alpha$$

ztąd równanie linii godzinowych na planie pionowym zbaczających $y'z'$ jest

$$z' \cos \lambda = y' (\sin \lambda \sin \alpha + \cotg p \cos \alpha) \quad (5)$$

Nazwawszy zawsze H kąt zawarty między jedną z tych linii godzinowych i linią południkową mamy

$$\cotg H = \tan \lambda \sin \alpha + \frac{\cotg p \cos \alpha}{\cos \lambda} \quad (6)$$

znowu formuła takąż sama, iakąśmy znaleźli przez trygonometrią kulistą.

Może

Możemy ją uczynić wygodniejszą do rachunku za użyciem kąta przybranego Φ , tak żeby było $\tan \Phi = \sin \lambda \tan p$

$$\text{otrzymamy } \cotg H = \frac{\tan \lambda}{\sin \Phi} (\cos e - \Phi)$$

wartość $\tan \Phi$ podobna do owéy (3) okaże, równie iak rozwiązanie geometryczne, że kompas nieforemny i kompas poziomy, mogą się wyprowadzić iedne z drugiego.

Dobrze jest znać stały kąt U' , który czyni podskazówkowa z południkową kompasu. Aby go wynaleść, niech będzie w ogóle V kąt, który czyni koło godzinowe z planem kompasowym, będzie dla kąta pochyłości tych dwóch planów z fig. 4. str. 70.

$$\cos V = \frac{-M}{\sqrt{1+M^2+N^2}}$$

wyraziwszy ogólnie przez

$$z' = Mz' + Ny'$$

równanie planu tego koła godzinowego, w którym to przypadku

P_2

$M =$

$$M = \operatorname{tag} \lambda \cos \alpha - \frac{\operatorname{cotg} p \sin \alpha}{\cos \lambda}$$

$$N = \operatorname{tag} \lambda \sin \alpha + \frac{\operatorname{cotg} p \cos \alpha}{\cos \lambda}$$

Dla wyszczególnienia koła, które bierzemy, niech będzie $V = 90^\circ$ czyli $\cos V = 0$; wtedy będzie — $M = 0$; z kądem, nazwawszy p' wartość teraźniejszą od p wywodzi się

$$\operatorname{tag} \alpha = \frac{\sin \lambda}{\cos p'} \quad (9)$$

Takim jest związek, który mieć muszą kąty α , λ i p' , aby koło godzinowe czyniące kąt p' z południkiem miejsca, było prostopadłym do kompasu. Lecz podług tego co poprzedzało, styczna kąta linii godzinowej, z południkową kompasu, jest ogólnie

$$\operatorname{tag} H' = \frac{\cos \lambda}{\sin \lambda \sin \alpha + \operatorname{cotg} p \cos \alpha}$$

więc styczna kąta U podskazówkowej z tą samą południkową, będzie dla poprzedzającego związku

$$\operatorname{tag} U = \operatorname{cotg} \lambda \sin \alpha \quad (10)$$

Kąt

Kąt ten U jest koniecznie zero razem z α ; więc skoro kompas jest pionowym niezaczającym, podskazówkowa i pionowa schodzą się z sobą. Przypuśćmy teraz, że pewna liczba kół godzinowych, jest umieszczona symetrycznie z obu stron planu pionowego wyznaczonego skazówką i podskazówkową; w tym razie, będą ich ślady, na kompasie podobnie symetrycznie położone po prawej i po lewej téż podskazówkowej; gdyby się więc wzięło za oś współrzędnych tę podskazówkową i do niej prostopadłą, i zawsze znajdującą się na planie kompasu, ślady czyli linie godzinowe, o których tu mowa, wyznaczyłyby się tą samą formułą należącą do kompasu pionowego niezaczającego, tylko zamiast λ trzeba by podstawić jego dopełnienie, czyli wysokość równika e , który to kąt czyni skazówką z podskazówkową; zaś zamiast p pochyłość π koła godzinowego z planem pionowym podskazówkowym. Lecz godzina, w której środek słońca znajduje się w tym planie, jest podług (9)

cotg

$$\cotg p' = \frac{\sin \lambda}{\tag a}$$

ponieważ p' jest kąt godzinowy rachowany, zaczynając od południka miejsca.

Wyraziwszy więc przez P inny kąt godzinowy w przypuszczeniu, że jest większym od p' otrzymamy $\pi = P - p'$ i równanie (3) zamieniwszy w niém H na h dla wskazania, że kąt h rachuje się teraz zaczynając od podskazówki, stanie się

$$\tag h = \sin i \tag \pi = \sin i \tag (P - p') \text{ albo } \tag (h - U) = \sin i \tag (P - p') \quad (11)$$

Ostatni ten sposób, którego będzie można użyć dla wyznaczenia kierunku linii godzinowych na planie pionowym zbaczającym, będzie prostszym od owego, który wynika z użycia powyższej wartości dla $\cotg H$ w (6).

Chcąc mieć kąt i w funkcji zбочenia α kompasu i wysokości bieguna λ , łatwo tego dopiąć: iakoż pomniąc, że równanie planu $x'z'$ kompasu ze względu na współrzędne pierwiastkowe jest

$$x = y \tag a$$

i że

i że równania osi są

$$x = z \cotg \lambda, y = 0$$

do tego gdy zważemy, że skoro

$$x = az, y = bz$$

są równaniami linii, i że

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

jest równaniem planu, wstawa kąta téj linii z planem jest z fig. 4.

$$\sin i = \frac{Aa + Bb + C}{\sqrt{1 + a^2 + b^2} \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

wniesiemy ztąd dla obecnego przypadku, i dla tego, że

$b = 0; a = \cotg \lambda; A = 1; B = -\tag a; c = 0; \text{ że}$

$$\begin{aligned} \sin i &= \frac{\cotg \lambda}{\sqrt{1 + \cotg^2 \lambda} \sqrt{1 + \tag^2 a}} \\ &= \frac{\cos \lambda}{\sin \alpha} = \cos \lambda \cos \alpha \end{aligned} \quad (12)$$

Wypadek zgodny z powyższym, któryśmy mieli z Trygonometrii kulistey.

Podobnymże sposobem mielibyśmy pochyłość n skazówki do linii każdej godzinowey, w przypuszczeniu, że znamy kąty i, h , mianowicie byłoby

$$\cos n = \cos i \cos h = \cos i \cos (U + h') \quad (13)$$

Wyzna-

Wyznaczenie krzywych dziennych.

Krzywa dzienna, to jest taka, iaką nakreśla na kompasie cień od końca skazówki, czyli słupek światły, przechodzący przez otworek kołowy zrobiony w blaszce kruszcowej zastępujący miejsce skazówki, tak się wyznacza.

Niech będzie r długość skazówki, wzięta razem za długość kuli współśrodkowej z kulą nieba; i przypuściwszy na chwilę, że środek téj małej kuli jest wektknięty na końcu skazówki. Przypuśćmy do tego, że zboczenie słońca jest północnem czyli $+\delta$. Ponieważ plan tego równoleżnika jest prostopadłym do planu xz , będzie jego równanie

$$z = a'x + c$$

a że w tym razie jest a' styczną kąta, który czyni z planem x, y , mamy

$$a' = -\cotg \lambda$$

Do tego, naykrótsze oddalenie początku współrzędnych od planu tegoż równoleżnika, będąc z iednéj strony równą $r \sin \delta$ z drugiéj $\frac{c}{\sqrt{1+a'^2}}$ wynika ztąd.

$$r \sin$$

$$r \sin \delta = \frac{c}{\cos \lambda} \quad \text{i} \quad c = \frac{r \sin \delta}{\sin \lambda} \quad \text{a zatem}$$

$$z = -x \cotg \lambda + \frac{r \sin \delta}{\sin \lambda} \quad (14)$$

Idzie teraz o wynalezienie równania powierzchni ostokręgowej, utworzonéj promieniem światła, który nakreśla krzywę zboczenia na planie.

Lecz rzuty pionowe tego promienia są ogółem

$$x = mz; \quad y = nz$$

równanie kuli jest

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

zaś równanie równoleżnika równikowego

$$z = a'x + c$$

ieżeli więc wszystkie te cztery równania mają mieć razem miejsce, łącząc je z sobą, stanie się równanie powierzchni ostokręgowej

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{r^2 (z - a'x)^2}{c^2}$$

a skoro weźmiemy x za stałą i równą a , wypadkowe równanie

$$a^2 + y^2 + z^2 = \frac{r^2 (z - a'a)^2}{c^2}$$

będzie

będzie równaniem śladu powierzchni ostrokątowej na planie pionowym równoległym od osi y , zaczęć niezbaczącym.

Podstawiając za A', D' ich poprzedzające wartości, pomniąc, że $a = r \cos \lambda$ i odprawiając potrzebne działania z wziętym ujemnym, aby się stosować do przypuszczenia względem zboczenia słonecznego δ , otrzymamy

$$z^2(\sin^2 \delta - \sin^2 \lambda) + 2rz \cos^2 \lambda \sin \lambda + y^2 \sin^2 \delta = r^2 \cos^2 \lambda (\cos^2 \lambda - \sin^2 \delta)$$

Stanie się to równanie prostszem, skoro się umieści początek z przy samym początku osi kompasu, iak się wprzód uczyniło, a wtedy mamy

$$z' = z - r \sin \lambda; \text{ ztąd}$$

$$z'^2 (\cos^2 e - \sin^2 \delta) - 2rz' \cos e \cos \delta - y^2 \sin^2 \delta + r^2 \cos^2 \delta = 0 \quad (15)$$

Ponieważ $e = 90^\circ - \lambda$, wynika ztąd, że krzywa dzienna czy li zboczenia jest hyperbolą albo ellipsą, podług tego iak dopełnienie pochyłości osi kompasu jest większem albo mnieyszem od zboczenia słonecznego, przeciwnie zaś jest parabolą, jeżeli

cos

$\cos e = \sin \delta$ skoro $\delta = 0$ zamienia się przesłe równanie na

$$z' = \frac{r}{\cos e} \quad (16)$$

co znaczy, że linia równonocna kompasowa jest linią prostą prostopadłą do podskazówkowej; iakoż plan równika, w którym się wtedy znajduje słońce, będąc prostopadłym do osi świata; ślad tego planu na planie kompasowym, musi także być prostopadłym do rzutu osi.

Jest to ważnym wypadkiem, że powyższe równanie krzywey dziennéy i nawet równania (11) i (13) zupełnie służą dla iakiegokolwiek położenia kompasu ze względu na plany pierwiastkowych współrzędnych, byleby nie odmieniac początku współrzędnych.

Wzięło się za oś z' podskazówkową, zaś za oś y prostopadłą do téy linii położoną w planie kompasu. *Dionis du Séjour* rozwiązując też same zapytania przy końcu pierwszego tomu swego dzieła *Traité analytique du mouvement apparent des corps célestes*, rozbiorem wcale odmiennym

nym od poprzedzającego, nie zaniedbał obrać ten system współrzędnych, ponieważ formuły do rachunku części kompasu słonecznego stały się tym sposobem, iak tylko być może najprostszymi.

Dla dopełnienia obecnej teorii namieiliśmy, że bardzo łatwo wyznaczać się punkta, w których krzywe zboczenia przecinały linie godzinowe, rachując oddalenie tych punktów od środka kompasu, za pomocą kątów δn i długości r skazówki; bo niechby r' było iednym z tych oddaleń, otrzymamy z własności trójkąta prostokréślnego

$$r' = \frac{r \cos \delta}{\cos (\delta + n)}$$

w przypuszczeniu, że zboczenia słońca jest północnym: gdyby zboczenie było południowym, umieściłoby się w mianowniku $\cos (n - \delta)$ zamiast $\cos (n + \delta)$. Punkta południkowój czasu średniego wyznaczać się tymże samym sposobem; szukamy linii godzinowój, odpowiadającój południowi średniemu dla dnia wyznaczonego, poczem

poczem formułą (17) otrzymamy wartość r' biorąc zboczenie słońca tego dnia.

Przykłady liczebne.

Kompas słoneczny, zrobiony na tablicy marmurowej na ścianie Obserwatorium Krakowskiego, którego szerokość $\lambda = 50^{\circ} 3' 52''$ zbacza ku południowi kątem $\alpha = 32^{\circ} 40'$ długość zaś skazówki $r = 14$ calów polskich, czyli 28 Centymetrów; wynaleść linią godzinową 1 godziny i punkt, w którym krzywa zboczenia słonecznego przecina tę linią, gdy to zboczenie jest północnym i równym

$$\delta = 25^{\circ} 27' 55,0$$

Naprzód kąt godzinowy $P = 15^{\circ}$

poczem z równania (9) wywodzi się

$$p' = 39^{\circ} 54' 12'',0$$

z równania (10) otrzym: $U'' = 13 \ 14 \ 34,2$

równanie (11) daie $h = 37 \ 33 \ 35,8$

równanie (12) daie $i = 32^{\circ} 42' 36'',4$

Zaczem linia godzinowa 1 godziny z południkową kompasu czyni kąt

$$H = 13^{\circ} 14' 34'',2$$

równanie (13) daie $n = 48^{\circ} 9' 50,0$

nakoniec (17) $r' = 28,06$.

Gdy

Gdy wielkości p' i Hi , są stałemi dla iednegoż kompasu, dosyć więc iest prze-
stać na użyciu formuł (11) (13) i (17)
dla wyznaczenia iakiegokolwiek innego
punktu przecięcia.

Dla tegoż dnia i innych iego godzin
służy następująca Tabliczka dla punktu
przesilenia letniego.

Godziny ranne	H		n
5	73° 36' 53", 3	56° 43' 16", 8	
6	57 9 46, 0	45 1 0, 0	
7	45 5 29, 4	38 7 25, 0	
8	35 29 5, 6	34 21 45, 0	
9	27 3 40, 8	32 48 45, 0	
10	18 54 43, 9	33 6 15, 1	
11	10 12 58, 9	35 18 26, 6	
12	0 0 0, 0	39 55 20, 0	
wieczorne			
1	13 14 34, 2	48 9 50, 0	
2	31 34 54, 5	61 51 10, 0	

godzi-

godziny ranne	r'	r''	r'''
5	30, 49	50, 66	149, 63
6	27, 36	39, 32	69, 52
7	26, 35	35, 33	53, 47
8	25, 96	33, 67	47, 89
9	25, 84	33, 07	45, 93
10	25, 87	33, 18	46, 09
11	26, 05	34, 06	49, 16
12	26, 66	36, 24	56, 92
wieczorne			
1	28, 06	41, 67	85, 41
2	32, 53	58, 93	312, 42

Szczególny przykład dla iwszędzy godziny.

Wielkości stałe.

$$\text{Dane rzeczy } 1) \cotg p' = \frac{\sin \lambda}{\tag \alpha}$$

$$r = 27, 8 \quad \log \sin \lambda = 9,8846633$$

$$\lambda = 50^{\circ} 3' 52'' \quad \log \tag \alpha = 0,1930286$$

$$\delta = 23^{\circ} 27' 55,0 \quad \log \cotg p' = 10,0776919$$

$$\alpha = 32^{\circ} 40' \quad p' = 39^{\circ} 54' 12''$$

$$2) \tag U = \cotg \lambda \sin \alpha$$

$$\log \cotg \lambda = 9,9228213$$

$$\log \sin \alpha = 9,7321932$$

$$\log \tag U = 9,6550145$$

$$U = 24^{\circ} 19' 11,6$$

$$\begin{aligned}
 3) \sin i &= \cos \lambda \cos \alpha \\
 \log \cos \lambda &= 9,8074847 \\
 \log \cos \alpha &= 9,9252218 \\
 \log \sin i &= 9,7327065 \\
 i &= 32^\circ 42' 36'',4
 \end{aligned}$$

Wielkości zmienne.

$$\begin{aligned}
 3) \operatorname{tag} h &= \sin i \operatorname{tag} (P - p') \\
 \log \sin i &= 9,7327065 \\
 \operatorname{l. tag} (P - p') &= 10,1552146 \\
 \log \operatorname{tag} h &= 9,8859211 \\
 h &= 37^\circ 33' 35'',8
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 5) \cos n &= \cos i \cos h \\
 \operatorname{l. cos} i &= 9,9250106 \\
 \operatorname{l. cos} h &= 9,8991187 \\
 \operatorname{l. cos} n &= 9,8241294 \\
 n &= 48^\circ 9' 49'',0
 \end{aligned}$$

$$6) r' = \frac{r \cos \delta}{\cos(n + \delta)}$$

$$\begin{aligned}
 \log r &= 1,4440448 & \log r &= 1,4440448 \\
 \log \cos \delta &= 1,4065570 & \operatorname{l. cos} n &= 0,1758706 \\
 \operatorname{l. log} \cos(n + \delta) &= 0,5249757 & \log r' &= 1,4482233 \\
 \operatorname{l. log} \cos(n - \delta) &= 0,0416663
 \end{aligned}$$

$$\log r' = 1,4482233 \quad r' = 28,06$$

$$\log r'' = 1,9315327 \quad r'' = 41,67$$

$$r''' = 85,41$$

Gdyby

Gdyby tu jeszcze jakie były wątpliwości, objaśnić one sobie można fig. 3 i 4. Fig. 5 podaje kopią kompasu marmurowego, znajduącego się na ścianie Obserwatorium. Inne są w większych wymiarach. — Poziomy ma pierścień o 2 metry nad posadzkę Obserwatoryi wyniesiony. Zaś inny ścienny ma pręt blisko 1 metra.

Zboczenie ściany α prócz wskazanego na karcie, może się jeszcze rozmaitym sposobem wynaleść, to jest za pomocą kątomierza wykierowanego do dalekiego punktu na poziomie obranego i w przedłużeniu ściany znajduącego się, gdy punkt wschodni jest także znaiomy.

Można go jeszcze wynaleść mierząc dokładnie boki trójkątów BAM i BAN , iak to fig. 4 wyraźnie wskazuje. — Wreszcie, iak znacznie skróconém jest rozwiązanie rozbirowe gnomoniki i rachunek, poznać to można z porównania go z wzorami P. Beroyer umieszczonemi w dodatkach Astronomii P. Biot Ob. T. III. kar. 51. sq.

Q

GNO-

GNOMONIKA PRAKTYCZNA I WYKREŚLNA.

Jeszcze się tu przydaie w osobnych zadaniach dla nieposiadających wiadomości matematycznych i przestających na ogólnych przepisach bez onych dowodzeń.

Zadanie 1. Wykreślić linią południkową.

Jakakolwiek bądź iest powierzchnia, czy płaska czy krzywa, na której ma być wykreślony kompas, trzeba zacząć od wyznaczenia kierunku linii południkowej.

Wygodnie iest na ten koniec mieć zegarek, podług średniego czasu urządzony. bo znając iego bieg i równanie czasu, wie się oraz wiele skazować powinien podczas górowania słońca, czyli w samo południe, i dosyć iest w téj chwili naznaczyć cień od końca skazówki; linia łącząca ten punkt ze spodkiem skazówki będzie żadaną południkową.

Naznaczywszy podobnież kierunek cienia dla każdej godziny ranney i wieczornej podług zegaru, otrzyma się tak kom-

pas

pas na inkiędykolwiek powierzchni daney. W niedostatku zegarka, postępuje się sposobem wskazanym na karcie 21; lecz gdy dla odmiany zboczenia, łuczki ranne równe wieczornym, nie odpowiadają równym chwilom upłynionym, załączona tu tabliczka wskazuje poprawkę dla każdego łuku.

Tablica pokazująca, o wiele trzeba przyspieszyć albo spóźnić obserwacje wieczorne, aby mieć prawdziwy kierunek południkowey.

1go Stycznia,	obserwacja wieczorna	
	powinna być przyspieszoną .	9 sekund
1go Lutego .	idem .	29
1go Marca .	idem .	36
1go Kwietnia .	idem .	31
1go Maja .	idem .	19
1go Czerwca .	idem .	6
1go Lipca	powinna być opóźni:	4
1go Sierpnia .	idem .	15
1go Września .	idem .	32
1go Października	idem .	36
1go Listopada .	idem .	30
1go Grudnia .	idem .	15

Q 2

Potrze-

Potrzebnemi są tu sekundy: te w niedostatku zegarka wskazującego sekundy, otrzymuje się krótkim wachaniem pionu czyli zawieszony kuli na nici, mającý długości 440, 61 linii Par:

Po Obserwatoryach otrzymuje się chwilą prawdziwego południa z branych wysokości równych słońca, albo z lunety południkowey doskonale ustawioney.

Zadanie 2. Wykreślić kompas równikowy powszechny.

fig. 6. Na planie $DC'FG$ nachylonym do poziomu pod kątem $A'C'B'$ równym dopełnieniu szerokości geogr: miejsca, gdzie się robi kompas, wyznacza się linia południkowa BC (z *Zad: 1*), ze środka B nakreśli się koło, i dzieli się na równe części każda od 15° . — Otrzymują się tym sposobem godziny wskazane od pionowey skazówki BP .

Można jeszcze podzielić godziny na kwadransy, i rozróżnić one skróconemi liniami jedne od drugich. — Przedłużona skazówka BP' na drugą stronę, i cienie podobneż jak wprzód na nię nakreślone

ne

ne, dadzą kompas na półrocze zimowe.

Za pomocą kompasu równikowego można wszelkiego rodzaju wykreślać kompas; dosyć jest na ten koniec, ustawwszy go przyzwoicie, to jest w kierunku planu południkowego pod pochyłością szerokości geograficzney, podstawić plan pod znajome położenie, i uważać na cienie rzucone nań od skazówki, skoro się obracać będzie w około nię świeca, tak żeby oraz cień od pionu padał na rozmaite godziny i onych części.

Szczególniey zaś inne kompasy regularne tak się wykreślaia.

Zadanie 3. Wykreślić kompas poziomy.

fig. 7. podaie do razu do niego wykreślenie.

Wskazuje ona, jak się można obejść bez kompasu równonocnego. Dosyć jest na ten koniec poprowadzić linia południkową AM , przeciąć ją inną DG do nię prostopadłą; zrobić kąt AMB równy dopełnieniu szerokości geograficzney, wziąć BM dowolnę wielkość, i zrobić przy B kąt.

kąt prosty. Tego ramie BC da punkt C gdzie ma być skazówka wsadzona pod nachyleniem BCM i oraz promień MB' kompasu równikowego, który iak wprzód da punkta stycznych, wyznaczających kierunek linii godzinowych.

Zadanie 4. Wykreślić kompas pionowy.

Ten może być albo południowy, albo północny, albo wschodni, albo na koniec zachodni.

1) *południowy* wykreśla się iak poziomy, z tą iedynie różnicą, że skazówka musi być nachyloną do ściany pod kątem równym dopełnieniu szerokości geograficznój.

2) W północnym musi być ta pochyłość w przeciwném położeniu, czyli równać się spełnieniu pierwszego położenia do dwóch kątów prostych.

3) Na ścianie wschodniój, czyli na planie południkowym, gdy ta jest równoległą od skazówki, dosyć więc oprzeć ją końcami na dwóch równych podporach, i promieniem równym każdej z nich

nich nakreślić półkole, które znowu wyrażać będzie równik. Lecz linie godzinowe staną się tu równoległemi. Z tego wynika następujące wykreślenie -

fig. 8. Prowadzi się na ścianie linia AB równoległa do poziomemu; przy A robi się kąt $BAC = \lambda$ szerokości geograficznój; promieniem podporki CE nakreśla się półkole i dzieli iak wprzód na godziny po 15° aby mieć styczne na linii DE .

Linie równoległe i razem prostopadłe do AC , przez końce tych stycznych poprowadzone, dadzą ranne godziny.

4) Dla godzin wieczornych jest toż samo wykreślenie na ścianie zachodniój, wyiawszy, że linia AC ma przeciwne pierwszemu położenie.

Zadanie 5. Wykreślić kompas bieżunowy.

Bierze się plan iego prostopadłym do równika pochylego do poziomu pod kątem równym dopełnieniu szerokości geograficznój wykreślenie jest więc dla niego toż samo, co i dla planu pionowego, wyiawszy, że linia AC prowadzi się równoległe

gle do poziomu. Wskazować on będzie godziny ranne i wieczorne.

Zadanie 6. Wykreślić Analemma znaków niebieskich.

Tak się nazywa narzędzie albo figura, za pomocą której przydają się do kompasów słonecznych znaki zwierzyńca, dla poznania miejsca słońca w Ekliptyce, i długości dni.

fig. 9. Niech trójkąt CBA wyraża nam gnomon, iak wprzód ustawiony na CA w planie południkowym. Weźmy BM prostopadłą do CB , i poprowadźmy równonocną EQ .

Po obu stronach linii BM zróbmy kąty po $23^{\circ} 28'$, promieniem BD nakreślmy łuk DF . Jego końce wyrażać będą znaki, w których się znajdować będzie słońce w przesileniach, zaś środek E punkt równonocny. — Przecięcia linii BD , BF , BE , z południkową AM , dadzą też punkta $\odot$, ∇ , λ odniesione do południkowój.

Zróbmy do tego kąty EBG , EBH , każdy od $11^{\circ} 30'$ takim bowiem jest zboczenie δ , μ , m i N , nakoniec kąty JBE

od

BEK od $20^{\circ} 12'$ iakiemi są zboczenia Π , Ω ϵ , i otrzymamy tak żądane punkta, i onych odniesienie na linią południkową.

Takież punkta dają się wynaleść na każdój linii godzinowój CL . — Nakreślmy na ten koniec półkole na CL , weźmy $CB' = CB$ i ściągniemy $B'L$; tę ostatnią będzie można uważać iak linią równonocną, zaś CL iak południkową. Jakoż ściągawszy BL , ponieważ CB jest prostopadłą do planu $BE'Q$ będzie kąt CBL prostym, zaczęm trójkąt CBL przystanie do trójkąta $CB'L$, a tak da się podzielić CL na znaki iak linia CM . Mogą więc tym sposobem przydane bydź do kompasów słonecznych linie krzywe, które nakreśla koniec cienia skazówki, gdy słońce znajduje się w jakim znaku. Widzieliśmy wyżej, że te krzywe są Hyperbole.

Zadanie 7. Wykreślić na kompasach słonecznych południki i równoleżniki stołecznych miast, których położenie jest wiadome.

1) *fig. 7.* Miejsce to może bydź ku wschodowi, albo ku zachodowi względem

nasze-

naszego południka położone, iak n.p. Petersburg i Paryż; weźmy więc dla pierwszego łuk $ML = 10^{\circ} 23' 15''$, ściagniemy $B'L$ i poprowadźmy Cl , które będzie południkiem Petersburgskim. Wziąwszy $ML' = 17^{\circ} 23' 45''$, i wykonawszy toż samo z drugiey strony, otrzymamy południk Paryżki Cl' . Kiedy więc iest u nas południe iest w Petersburgu 12^g 48^m 33^s, zaś w Paryżu 10^g 49^m 37^s.

2) Ponieważ zboczenie odpowiada szerokości geograficznéy, więc równoleżnik mieysce ziemskich znaiomych wynayduie się, iak mieysce znaków niebieskich.

Wszystkie rodzaje kompasów regularnych wyżej wymienionych, daią się wykreślać na ośmiościanie, iak to pokazuje fig. 10.

Kompasy na ciałach toczonych.

Kompas kulisty.

1) fig. 11. Przy wschodzie słońca iest kula w części wschodniey przez połowę oświeconą; w godzinę późniey iest świecik o 15° niżej i t. d. Dosyć iest więc podzielić koło wielkie kuli na 24 równych szero-

części, i podniosłszy ięć oś pod kątem szerokości geograficznéy, ustawić ią w planie południkowym tak, żeby punkt 6 godziny przypadał na południku.

2) Przydawszy obręcz ruchomą w około osi kuli, dosyć iest obracać ią tak na kuli przyzwocie ustawionéy, żeby cień od obręczy był nacyieńszym, bo wtedy wskaże godzinę żadaną.

3) Obręcze pojedyncze same, mogą wygodnie takowe kule zastąpić.

fig. 12. pokazuje nam takowy onych układ i podział, i tak poprowadziwszy przez A styczną, nakręśla się na na nięć promieniem AE półkole, które zię znowu dzieli iak zwyczajnie na kąty godzinowe, których ramiona przedłużone, dadzą punkta godzinowe 7, 8, 9, 10... wystawione punkcikami światłemi, rzuconemi przez otwór A . — Dla użycia tego pierścienia trzeba żeby był do poziomemu nachylonym pod kątem równym pochyłości równika do niego, i żeby otwór A był w kierunku południka.

Innych

Innych obręczowych kompasów zawiesić się dających, z przydanym równikiem i znakami niebieskimi, znajdzie czytelnik opis w Matematyce *Wolfa* i innych praktycznych autorach.

Kompasy walcowe.

fig. 13. Na walcu drewnianym, ze słoniowéy kości, albo kruszcowym, n.p. ze trzy razy większym od tu wystawionego przystawia się pokrywka *CA* na wszystkie strony ruchoma, i do téy wtyka się skazówka *AB* tak długa, żeby cień od iéy końca *B*, gdy słońce jest w najwyższym znaku, przypadł na spodek walca *D*.

Poczém z wysokości bieguna danego mieysca, i z wiadomego zboczenia słońca w głównych znakach ekliptyki, rachując się wysokości słońca dla każdéy godziny dziennéy. Z punktu *B* nakreśliwszy kwadrans, przenieśmy na *AD* styczne kątów wynalezionych, i długości cieniów dla każdéy godziny.

Podzieliwszy więc całą powierzchnię walca na 6 równych części przez linie prosto-

prostopadłe do podstawy, i przeniosłszy na nie odpowiadające długości cieniów, wynalezione dla każdéy godziny, linie krzywe przez te punkta poprowadzone, wskażą godziny i onych części dla każdéy godziny; linie krzywe, przez te punkta poprowadzone, wskażą godziny i onych części dla każdéy chwili. Dostyc będzie na ten koniec obrócić tylko pokrywkę walca, tak żeby skazówka stała nad tą tworzącą walca, która należy do obecnego znaku nieba, w którym się znajduje słońce, i potém obrócić walec tak, żeby cień od skazówki miał kierunek pionowy.

Rozwinięcie powierzchni walca i linii krzywych, wskazuje *fig. 13'*; dosyć więc wykreśliwszy one osobno, oblepić nią walec utoczony.

Dla oszczędzenia szukania osobnych wysokości, przyłącza się tu osobna tabliczka dla Krakowa, mogąca posłużyć bez znacznego uchybienia dla Królestwa Polskiego.

Wynie-

Wyniesienie bieguna 50°

gobzi- ny	☉	☽	♂	♀	♂	♀	♂	♀
XII	63, 30	60, 12	51, 30	40, 0	28, 30	19, 48	16, 30	
XI	61, 2	57, 55	49, 34	38, 23	27, 7	18, 33	15, 18	
X	54, 41	51, 54	44, 17	33, 49	23, 8	14, 57	11, 50	
IX	46, 35	43, 43	36, 44	27, 2	17, 1	9, 20	6, 24	
VIII	36, 53	34, 29	27, 53	18, 45	9, 20	2, 28		
VII	27, 16	24, 54	18, 24	9, 35	11, 35			
VI	17, 47	15, 20	8, 47					
V	8, 48	6, 13						

Wziąwszy skazówkę ze 100 części łatwiej i jeszcze i dokładniej przenieść styczne kątów z tablic logarytmowych i szerokości miejsca dokładnie wziętego.

Inne wykreślenie pod fig. 14 wyjęte jest z Gnomoniki wykreślonej P. Mallet na oyczysty język przełożony.

Wywodzi się to z dwóch kompasów, pionowego przez oś walca poprowadzonego, i drugiego poziomego, obydwóch zaś mających wspólną prawdziwą skazówkę. — Krzywe eliptyczne na powierzchni krzywey walca, odpowiadające liniom godzinowym, będą na wspólnych przecięciach planów do nich równoległych, i przez podziały podstawy poprowadzonych.

Będą

Będą one oraz znajdować się na liniach tworzących walec, i odpowiadać punktom rzutowym wyznaczonym, iak to wyraźnie widać z figury dla przykładu 3ciej godziny,

Dla użycia tego kompasu musi być walec tak postawionym, żeby skazówka jego nieruchoma leżała w planie południkowym.

Kompasy Xiężycowe.

Do tych mogą być użyte kompasy słoneczne. Dostyc jest na ten koniec znać wiek xiężycy, to jest dni upłynione od pełni lub nowiu, co z kalendarza wiadomo.

Ponieważ xiężyc o 3 kwadransie (dokładniej o 48^m) większy ma bieg w AR od słońca, czyli po nowiu później góruje, dosyc więc rozmnożyć wiek xiężycy przez $\frac{3}{4}$, aby wiedzieć iaka jest godzina słoneczna, gdy cień xiężycowy rzucony od skazówki na kompasie słonecznym, wskazuje na nim iaką godzinę. I tak dla 4go dnia wieku xiężycowego, skoro skazówka pokazuje 6tą godzinę ranną; przy-

daymy do niej $2\frac{1}{4}$ otrzymamy $8\frac{1}{4}$ godzinę słoneczną wieczorną. Do łatwiejszego i dokładniejszego wynalezienia godziny, służy następująca tabliczka:

Dni Wieku Xiężycy.		Różnice go- dzin xiężycow- ych i słonec.	
1		oh	om
2	16		48
3	17	1	36
4	18	2	24
5	19	3	12
6	20	4	0
7	21	4	48
8	22	5	36
9	23	6	24
10	24	7	12
11	25	8	0
12	26	8	48
13	27	9	36
14	28	10	24
15	29	11	12

Można i jeszcze i osobno przenośne xiężycowe robić kompasy iak następuje.

fig. 15. Na planie, któryby można nachylić pod wyniesieniem równika, nakręśla się koło i dzieli się na 29 równych części.

ści. Z tegoż samego środka *C* nakręśla się drugie koło *DF* ruchome w około *C* i dzieli się na 24 równych części. W środku *C* wtyka się skazówka iak zwyczajnie.

Skoro się więc ustawi przyzwoicie kompas, a godzina dwunasta podsunie się pod zupełny dzień wieku xiężycy, wskaże cień skazówki żadaną słoneczną.

Natężyte zasadzie, że kąt godziny równa się różnicy wznoszeń się prostych słońca i innego ciała nieba górującego, polegać na koniec i

Kompasy gwiazdowe.

fig. 15.) Robi się z mosiądzu obręcz *ABCD*, i dzieli na 12 równych części dla 12 miesięcy roku słonecznego. Każda znowu część dzieli się na 30 stopniów dla każdego znaku ekliptyki (możnaby dla dni podzielić okrąg na 365). W 13 stopniu niedźwiadka, to jest gdzie słońce jest najniżey, utwierdza się rękoiść *B*, ponieważ jest tu oraz miejsce jaśniejszey gwiazdy w najniższey strefie. — Do téy

R niewzru-

niewzruszonę obręcz przyłącza się druga ruchoma współśrodkowa, i téj okrag dzieli się na 24 równych części; aby zaś te części i w ciemności macaniem poznać, przydaią się ząbki im odpowiadające, przybierając dłuższy ząbek dla godziny 12tęj. od której zaczyna się liczyć

Nakoniec przyłącza się liniika ruchoma w około c, sam zaś środek przedziurawia na wylot.

Skoro więc przysunie się dłuższy ząbek na godzinę 12tą dnia miesiąca danego, albo do stopnia ekliptyki, w którym się znajduie słońce; zaś obręcz tak się przystawi do oka, że przez otworek środkowy zobaczy się gwiazda biegunowa, do której linia poprowadzona wyrażać będzie oś świata, zaś plan obręczowy równik; nakoniec obróci się liniyka, póki się nie zobaczy wyraźniejszy gwiazdy w dolney strefie, wskaże liczba ząbków między dłuższym ząbkiem i liniyką, żadaną godzinę. Na tychże zasadach polega użycie kul sztucznych, do rozwiązywania rozlicznych zadań astronomii kulistey z przybliżeniem,

które

które to wstępne ćwiczenia, gdy się wprzód dobrze poznało konstellacye i koła na niebie, podając pierwiastkowe zmysłowe wyobrażenia, arcy ułatwiaią naukę samęj Astronomii.

Dla poznania konstellacyi, służy osobna ich Tablica sztychowana, którą dostać można po Księgarniach Krakowskich.

Możnaby i do téj tablicy, wyrznąwszy przyzwicie koło wewnątrz, n. p. o 40° zboczenia pod równikiem, i przydawszy na przezroczystym papierze koło z przyzwitemi liniami, poznać dla każdej żadaney chwili, iakie znajduią się konstellacye nad poziomem Krakowskim. — Wzory do tego są na Obserwatorium tu-teyszm.

Do ninieyszego pisma załączam następujące nad niem

OGOLNE UWAGI.

Zamiarem mym było podać na przykładach oyczystych zastosowania niektórych nowszych odkryć rozbiorowych i geometryi wykréslny do przedmiotów

R a

astro-

astronomicznych, i okazać oraz, iak ułatwionym bydz może przystęp do wiadomości na pozór trudnych.

Przy końcu druku pisma tego, otrzymaliśmy drugie wydanie wybornéy Trygonometrii Jana Sniadeckiego. Nic prostszego nad sam iuż plan i podział Trygonometrii, i onéy zastosowanie do ziemi i ciał nieba.

Dziwnie pięknie sprostowanemi i ułatwionemi są w nowym tym owocu jeniusza narodowego, rachunki astronomii kulistéy, zasadzone na saméy Trygonometrii i w sprzeczności z obcemi dziełami, z trudnością przystępnemi, a przynajmniej dla poczynających, albo chcących się oświecić bez cudzéy pomocy.

Gnomonika podaje zmysłowo-umysłowe środki do ułączenia przystępu do nauk astronomicznych, i iako wstęp do dzieła Astronomii uważaną bydz może. Że w niéy wchodzi użycie wyznaczenia punktów, linii, kątów i planów w przestrzeni, a te otrzymują się troiakiem sposobem, przez wykreślenie, za pomocą

trygo-

trygonometrycznych i analitycznych formuł. Trzy więc nauki Geometrii wykreślnéy, Trygonometrii kulistéy i Geometrii rozbirowéy, rozmaitemi drogami do iednegoż zmierzając celu, wypadki rozwiązań służą sobie wzajemnie za sprawdzenie i kontrolę. Mniéy także rozszerzona wiadomość nowszych fortelów Geometrii wykreślnéy i analitycznéy dała mi powód do prostszego i krótszego wystawienia pierwszych ich zasad, towarzysząc iedne drugim, stósownie do żądania P. Monge, (*) któremu zadosyć uczynienie, nie widziemy dotąd w zagranicznych elementach.

Czyniąc zastosowania Geometrii rozbirowéy, iak tu n.p. na kompasach, wychodzi się ze sfery ogólności abstrakcyjnych,

(*) Il serait à désirer que ces deux sciences fussent cultivées ensemble: la géométrie descriptive porterait dans les opérations analytiques les plus compliquées l'évidence qui est son caractère, et à son tour l'analyse porterait dans la géométrie la généralité qui lui est propre.

cznych, dla przystąpienia do kresów rzeczywistości, i pożytkowania w współcześnieństwie. Lecz Geometria wykreślna, uważana ze strony umysłowej, wzmacnia jeszcze wyobraźnię, uczy obeymować do razu dokładnie rozmaitość kształtów ich części, i onych wzajemne stosunki; a tak wskazując (*) niejako drogę postępowania w rozbiorze, nową dała postać i prostotę rachunkom analizy.

Idzie

(*) Widać to oczywiście na naszym przykładzie kompasów nieforemnych. Wykreślenie wskazało do razu stałe wielkości p', U, i , na które trzeba było szukać wyrażen rozbiorowych. Te posłużyły potem do wynalezienia H, n, r , w funkcyi zmiennych kątów godzinowych.

Takowa droga nie jest zazwyczaj wskazywaną, albo z ręcznie ukrywaną bywa w nowszych plottach matematycznych, co lubo autorowi wydedywa pochlebną opinią wielkiej biegłości i przenikliwości, dla poczynających, jednak nie nających źródła swi modelów, staie się często trudnością, i tēm samém odstręceniem.

Posyskać sobie uczniów dla nauki i czytelników, nypierwszēm powinno być nauczycielów i autorów prawidłem, i temu względowi, wszystkie inne podlegać powinny.

Idzie tu szczególniēy naprzód o osobnienie pierwszych fundamentalnych zasad, ściągających się do wyznaczenia punktów, linii, kątów i planów w przestrzeni, wziętych osobno i wzajemnie względem siebie, co jest wyłuszczone w pierwszym rzędzie figur tablicy drugiēy. — Zadania Geometrii wykreślniēy także do kilku fundamentalnych działań odnosić się daia, to jest

1) Wynaleść oddalenie dwóch punktów, których się ma rzuty.

2) Wykreślić punkt zeyścia się planu przechodzącego przez trzy dane punkta i linii, poprowadzonēy przez dwa także dane punkta.

Tak tedy oddzieliwszy fundamentalne zasady od ich zastosowań, niewidac przyczyny, dla czego by miał bydz naruszonym duch i system matematyczny, który tak wielkie umysłowi iedna korzyści, iuż w samych dziełach arytmetyki i geometrii euklidesowēy, albo wcale miał by bydz wielomownością zastępowany.

Traktu-

Traktując ten przedmiot przydatkowo, nie mogliśmy się w nim rozszerzyć. Co nauki i sztuki winne są odkryciom *Monża* w Geometrii wykreślnéj, i onéj zastosowaniach, pozna to czytelnik z opisu iego życia i zasług przez *P. Dupin*. (*)

Do rozbiórki przyłączyłem pierwsze wyobrażenia rachunku różniczkowego; bo ten bardzo skraca i ułatwia wszelkie rozważania astronomii i całej matematyki aplikowanéj. — Wszędzie wskazane są źródła, z których czytelnik pragnący rozszerzyć swe wiadomości, znajdzie czém sobie dogodzić.

Usilnością także moją było sprostować, ile możności, notacyą. Używałem na ten koniec początkowych małych liter nazwisk łacińskich. — Zachowany był tym sposobem język algebraiczny, używany powszechnie u wszystkich narodów, gdzie nauki kwitną; czém się otrzymuje i ta korzyść, że pisma oyczyste już z wy-

czenia

*) *Essai historique sur les services et travaux scientifiques de Gaspard Monge par Charles Dupin.*
Paris 1819.

żenia na formuły, mogą być przez obcych, choć w części oceniane, gdy przeciwnie odstępienie od powszechnie przyjętego języka algebraicznego, stwierdza nieiako odosobnienie, acz z drugiey strony użycie oyczystych nazwisk dowodzi języka giętkość, iego przymioty, i autorów patryotyzm.

Gdy częste powtarzanie ćwiczenia w iednymże przedmiocie, wyiednywa łaność i doskonałość, zdaie się, że zachowując iedenże język, prędkiey dostępie się tego celu, i unika podwójnego użycia.

Możeby ieszcze było dogodną, aby w tłómaczeniu słowném używać nazwisk narodowych, w piśmie zaś brać znamiona piśmienne, powszechnie używane od Matematyków.

Cóżkolwiek bądź, nie będzie szkodliwą, gdy czasami wydawane będą pisma matematyczne, z formułami języka i notacyi powszechnie przyjętych.

W Trygonometrii, idąc za wzorem *Eulera*, zachowałem notacyą A, B, C, a, b, c , dla

dla kątów i boków trójkątów, tak prostokreślnych, iako i kulistych. — Nie widzimy potrzeby odmieniania tego wyraźnego i energicznego znaczenia na znaki $\gamma, \gamma', \gamma'', c, c', c''$, zaciemniające z znużeniem sens i wyobrażenie przez fatygowanie drobnostkowych uwag, na wielorazkie kréski, przydane do liter początkowych.

Wznowienie to iest w *La Croix*, i naśladowane w *Astronomii Delambra*, tak wreszcie nieskorego w przyjęciu nowości wzorowego Astronoma.

Nawet nazywanie boków trójkąta astronomicznego *ZPS* przez *ZDΔ*, iak iest w *Biota Astronomii*, iest mniej potrzebném, ponieważ te iasniéy zastąpione byđź mogą dawniéyszymi literami a, b, c , trójkąta A, B, C , z którém się w teoryi obeznało.

Wielką iest ulgą dla pamięci mieć do razu przed oczyma, związek zasad. — Wyrażone są te w formułach umieszczonych pod figurami.

Ma więc tak umysł sposobność odświeżania sobie pamięci prawd raz dowiedzionych, i dopełnienia pojęcia, gdyby ieszcze gdzie zostawały wątpliwości, gdyż te rodzą nieśmiałość, i wstrzymują kroki postępu, który przeciwnie przynosi prawdziwą roskosz rozumowi.

Widzimy w *Trygonometrii J. Sniadeckiego* piękne użycie do *Geodezyi* oczystéy fundamentalnego twierdzenia *P Le Gendre*, które takby krótko dowieść można.

Niech będą A, B, C , kąty zaś a, b, c , boki im przeciwległe w trójkącie kulistym ABC . Zróbmy trójkąt prostokreślny $A'B'C'$ z wyprostowanych boków trójkąta kulistego. Niech będą

$$A' = A - \frac{e}{3r^2}; B' = B - \frac{e}{3r^2}; C' = C - \frac{e}{3r^2}$$

będzie więc dobrany kąt

$$e = \frac{A - A'}{3} = \frac{B - B'}{3} = \frac{C - C'}{3}$$

Idzie tu ieszcze o wynalezienie wartości e , lecz z trzech pierwszych równań mamy

A'

$$A' + B' + C' = 180 = A + B + C - \frac{e}{r^2} \text{ więc}$$

$$\frac{e}{r^2} = A + B + C - 180; e = r^2(A + B + C - 180) = T$$

w czém T , wyraża powierzchnią trójkąta kulistego.

Wziąwszy promień za jedność, i nazwawszy przepełnienie drugiey strony równania P wypada

$$e = P$$

Wyborną ieszcze w tych czasach odkrył *P. Lhuillier* następującą formułę dla powierzchni trójkąta kulnego

$$\operatorname{tag} \frac{1}{2} T = \sqrt{\operatorname{tag} \frac{s}{2} \operatorname{tag} \left(\frac{s}{2} - a \right) \operatorname{tag} \left(\frac{s}{2} - b \right) \operatorname{tag} \left(\frac{s}{2} - c \right)}$$

(Ob: *Corr: polit: T. III. p. 63*) której dowodzenie dla skrócenia pisma tu opuszczamy. — Jest ona także wywiedziona z przepełnienia trójkąta kulistego.

W *Sniadeckim* jest $T = r^2 \sin 1 (A + B + C - 180)$ dla trójkątów geodezyi. — Zaś dla bardzo ważnego przypadku

ku dwóch boków trójkąta kulnego i kąta między niemi zawartego, jest w nim

$$\operatorname{tag} \frac{1}{2} F = \frac{1 + \operatorname{tag} \frac{1}{2} b \operatorname{tag} \frac{1}{2} c \cos A}{\operatorname{tag} \frac{1}{2} b \operatorname{tag} \frac{1}{2} c \sin A}$$

taż sama formuła co i *Delambra*, lecz innym sposobem dowiedziona (Ob. *Base du Systeme. mètr. T. I. p. 146.*)

Wstrzymać nam się tu należy od czynienia dalszych zastosowań; iakoż naśladowania godnym jest przykład *P. Puissant*, który w osobném dziele zebrał zastosowania zasad analizy do rozmaitych zadań, które odłączonemi bydz powinny od krótkich zasad, stanowiących teorię nauki. — Piękne mamy i w tym względzie wzory naszego wspomnionego rodaka. — Niezachowanie téy zasady mniéj przynosi pożytku rzeczywistego, niż sobie często obiecuia autorowie w obszernych swych pismach, dla uczący się młodzi w Liceach od nich przeznaczonych, i które tym sposobem bardziéj odstręczaniem, iak ponęta do nauk dla niéy staia się. — Lubo z drugiey strony, kiedy pomniemy na zdanie miernika, iak *P.*

Puissant,

Puissant, przemawiającego do P. *La Place*: „Les immenses progrès que vos écrits ont fait faire aux sciences mathématiques et physiques avaient fait connaître l'imperfection et l'insuffisance des élémens de ces sciences, et avaient fait sentir la nécessité de leur donner une nouvelle forme, nie można już być obojętnym na nowsze usilności mierników, do dania elementom matematyki nowszej postaci, ułatwiający uczenie się dzieł czyniących zaszczyt wiekowi.

W tym to szczególnie cel załączonymi zostały pierwsze nowsze zasady geometryi rozbirowej, wykreślnej i rachunku infinitezymalnego, niedosyć jeszcze znanych w naszym kraju; chociaż to zalety szczególnie przez P. *Delambre* sposób trygonometryczny łączy w sobie także wiele korzyści.

Strzeżmy się jednak skrajności; zdaje się, że w nowszych płodach matematycznych, nadużywanym jest piękny z wielu względów przepis *La Place*, wystawiania podań pod największą ich ogólnością.

Dla poczynających, zawsze jest przystępniejszą i zrozumialszą nauka, gdy się w niej zaczyna od odosobnionych szczególnych przypadków; bo tak i przy zachowaniu *Kondyliakowej* zasady tosamości, można już dziecinnemu wiekowi dać poznać wzniósłe prawdy.

Takię średnię drogi trzymać się było moją usilnością.

W osobnych przypisach umieściłem zastosowanie fundamentalnych zasad rozbioru, które to ostatnie ograniczają się na wyrażeniu w przestrzeni, punktów przecięcia linii do planu prostopadłej, i tej ostatniej długości.

Że więc te zasady zamknięte są w wystawieniu figur i formuł pierwszego rzędu Tablicy drugiej. — Tym sposobem odosobniając zasady; zachowując dla nich, ile być może, prostotę iednostajności i tosamości, oszczędziłoby się publiczności kupowanie licznych, mało się od siebie w istocie różniących płodów.

Nie masz zaszczytniejszej zalety dla istoty rozumnej, jak usilność w ułatwianiu

twia-

twianiu poczynającym pojęcia prawd górnych: słuszną jest pochwała z tego względu, jaką dała *La Croix* pewnej pensji publicznej w Paryżu; (Ob. *Calcul diff.* p. 22.) także chwala i ogrzewała mnie w wypracowaniu niniejszego pisma. — Zna wczy rozstrzygną, jak dalece dopełniłem mego celu być pożytecznym.

Arkusze napisane, były zaraz do druku podawanemi. Postrzegłem się po czasie, że do ważnego zadania fig. 6. Tab. II. nie było załączone tłumaczenie rozwiązania graficznego; znajdzie to czytelnik na końcu między błędami drukarskiemi.

W wystawieniu kilku modeli kompasów przenośnych, dla powszechnego użycia przeznaczonych, tak jest n.p. fig. 12 i 13, chciałem pokazać, tak już z wyższych nauk zastosowania podają przedmioty przemysłowi krajowemu.

Mam sobie na koniec za słodki obowiązek publicznie oświadczyć mią wdzięczność memu szanownemu Professorowi Astro-

(*) Tutęszy Mechanik T. Taberki ofiaruje się robić takowe kompasy za pamierną cenę.

stronom ii którego staraniu i opiece winien jestem me wiadomości w naukach dokładnych, i Autorowi Trygonometrii oyczystej, założycielowi Obserwatorium Kraskiego, w którym przeznaczenie pozwoliło mi być uczestnikiem rozkoszy umysłowych, i jakie wyiednywają zastosowania teorii do przykładów oyczystych.

Od pierwszego miałem zlecenie umieścić tu dowodzenia niektórych formuł, użytych w Rozprawach *Observationes bi-duæ Cracoviæ factæ*, w *Miscellaneach* krakowskich i o *Začmieniach*, w *Rocznikach Towarzystwa Krakowskiego Przyjaciół Nauk*, umieszczonych.

O M Y Ł K I w D R U K U.

Karta 23 wiersz 4 jest odwinięcia zamiast obwinięcia.

Karta 25. na końcu noty przyday r' znaczy różnicę czasu między górowaniem słońca i gwiazdy.

Karta 27 wiersz 20 i 21 jest porównaniem zamiast górowaniem.

Karta 28 wiersz 21 nich popraw nim.

$$— 29 — 2 \text{ BMP } — \text{ BmP}$$

$$— 31 — 1 \text{ dwóch } — \text{ tych}$$

$$— 31 — 4 \text{ BA tag P } — \text{ BM tag P}$$

$$— 31 — 6 \text{ tag H } = \frac{\text{BM}}{\text{CM}} \text{ tag } \varepsilon \text{ popr:}$$

$$\text{tag H} = \frac{\text{BM}}{\text{CM}} \text{ tag P}$$

Karta 35 wiersz 9 + tag λ sin popraw + tag λ sin α .

Karta 63 wiersz 4 od końca opuszczona fig 4.

Karta 77. Przed zadaniem 6 doday:

1) Mając daną linią PQ wyznać iéy wspólne przecięcie z planem ABC.

Przedłużam PQ do B i D, prowadzę prostopadłą Bb i DC, ściągniemy Cb ta będzie rzutem wspólnego przecięcia planu ABC z planem rzutowym linii

(1)

PQ

PQ (z fig. 4). Dosyć więc będzie przedłużyć pq do r a ten z iemu odpowiadającym R będzie żądanym rzutem wspólnego przecięcia linii z planem.

2) Przez punkt dany (P) poprowadzić prostopadłą do plann ABC .

Skoro linia jest prostopadłą do planu, są iéy rzuty także do śladów planu prostopadłemi, dosyć więc od punktów P i p , spuścić prostopadłe PB i pe , te dadzą żądane rzuty i wspólne przecięcie R i r iak wprzód.

3) Wynaieść wielkość téy prostopadłéy (p')

Jest ona przeciwprostokątną trójkąta, którego iedną katetą jest PR , zaś drugą ($rr' - pp'$) wyprowadźmy więc prostopadłą $R(P)$ równą téy różnicy i ściągniemy żadaną $P(P)$.

4) Maiąc dany punkt (R) poprowadzić plan równoległy do danego LMN .

Jeżeli plany są równoległe, są niemi także ich ślady; do tego jeżeli przez punkt (R) poprowadziemy plan równoległy od xy , będzie iego wspólne przecięcie żądanym planem równoległym

od

od ML i także równoodległym od iego rzutu Rf . — Dla téyże przyczyny będzie ieszcze, tegoż wspólnego przecięcia rzut pionowy rg równoległym od DM . Dosyć więc będzie poprowadzić przez R równoległe Rf do LM , od f wyprowadzić prostopadłą fg aż do zeyścia się z równoległą rg w punkcie g , bo ten mając, poprowadzone przez niego równoległe AC i AB do MN i ML dadzą żądany plan BAC .

Karta 100 wiersz 10 stoi t, u, v , czytay x', y', z'

— 103 — 4 — $d^2 4 af$ — $d^2 - 4 af$

— 129 w nocie *Dambre* — *Dalambert*

— 163 na końcu — x — x^m

— 169 wiersz 13 stoi $f \frac{2}{3} yz$ czytay $\frac{2}{3} yx$

— 214 — 4 — D — K

— 222 — 18 — zaś — za

— 225 — 3 jest x, y . czytay z, y

— 226 — g — $y = y \cos \alpha - x \sin \alpha$

czytay $y' = y \cos \alpha - x \sin \alpha$

— 226 wiersz 17 — $z' \cos \lambda = y' (\sin \lambda \sin \alpha$

+ $\cotg p \cos \alpha$ czytay $z' \cos \lambda =$

$y' (\sin \lambda \sin \alpha + \cotg p \cos \alpha)$

228 wiersz 2 $N = \tag \lambda \cos \alpha + \frac{\cotg p \cos \alpha}{\cos \lambda}$

czytay $N = \tag \lambda \sin \alpha + \frac{\cotg p \cos \alpha}{\sin \lambda}$

228 formuła (9) jest $\alpha = \frac{\sin \lambda}{\cos p'}$

czytaj $\tan \alpha = \frac{\sin \lambda}{\cos p'}$

231 formuła (12) — $\sin i = \frac{\cos \lambda}{\sin \alpha}$

czytaj $\sin i = \frac{\cos \lambda}{\sec \alpha}$

241 wiersz 11 wskazane na karcie, czytaj wskazane na fig: 8 Tab: 1.

242 wiersz 6 od końca naznaczyć cień od od końca, czytaj naznaczyć ten cień albo punkt γ od końca.

245 wiersz 8 jest znaiome położenie, czytaj znaiomém położeniem

247 wiersz 11 równolegle czytaj równolegle do AC

— wiersz 12 jest do AC czytaj do AD

248 — 12 — BM — $L\gamma$

— — 15 — BM — $L\gamma$

251 — 15 — AE — AC

— 5 zamiast raz są 2 razy

— dwa wiersze napisane

254 — 16 Mallet czytaj Mollet

257 — 15 fig. 15) — fig. 16

269 — 4 $\tan \frac{1}{2} F$ — $\tan \frac{1}{2} T$

