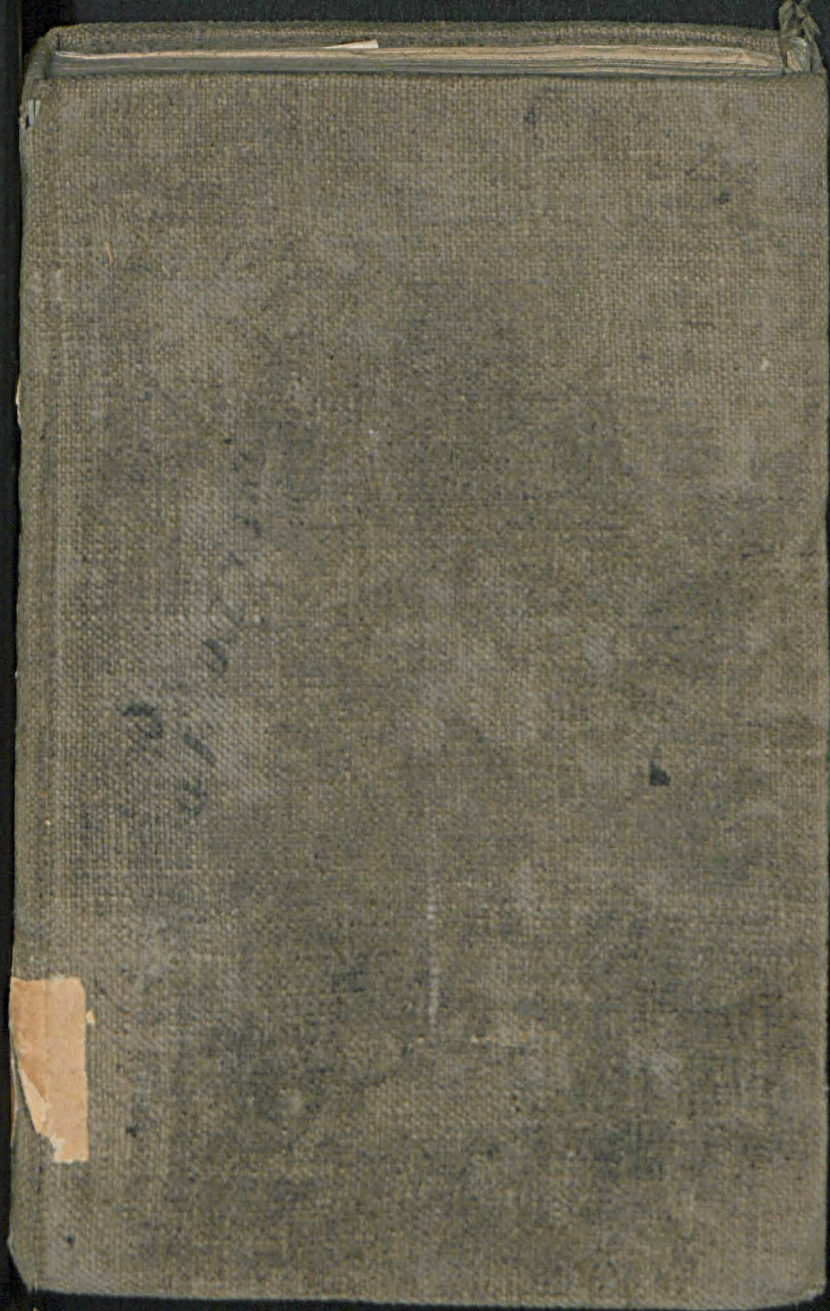




7392
442



№ 1597.

ПОЧАТКИ
ГЕОМЕТРИИ.

Вид 19
Знак 130
№ инв. 2518

POCZĄTKI GEOMETRYI,

PRZEŁ

A. M. Legendre.

Przekład z piętnastego wydania
francuzkiego.

PLANIMETRYA.



NAKŁADEM S. ORGELBRANDA KSIĘGARZA
przy ulicy Miodowej Nr. 495.

1844.

Możno drukować z warunkiem złożenia, po
wydrukowaniu, w Komitecie Cenzury, prawem
przepisaną liczbę Exemplarzy.

w Warszawie, d. (28 Lutego) 11 Marca 1844.

Cenzor Starszy, Naczelnik K. K. C.
NIEZABITOWSKI.

W Drukarni pod firmą M. CHMIELEWSKIEGO.

KSIĘGA PIERWSZA.

ZASADY.

N^o 1597.

•••••



Opisanie.

1. Geometrya jest nauka, mająca za
przedmiot mierzenie rozciągłości.

Rozciągłość ma trzy wymiary: dłu-
gość, szerokość i wysokość czyli grubość.

2. Linia jest długość bez szerokości
i wysokości.

Końce linii nazywają się punktami;
więc punkt nie ma rozciągłości.

3. Linią prostą nazywa się najkrót-
sza droga od jednego punktu do dru-
giego.

4. Linia, która nie jest prostą i nie składa się z linii prostych, nazywa się *linią krzywą*. I tak (fig. 1) linia AB jest linią prostą; ACDB *linią łamaną*, czyli składającą się z linii prostych; AEB jest linią krzywą.

5. *Powierzchnią* jest to, co ma długość i szerokość bez wysokości, czyli grubości.

6. *Płaskizną* nazywa się powierzchnia, do której przystaje w całej długości linia prosta, łącząca dwa punkta na tej powierzchni dowolniebrane.

7. Powierzchnia, która nie jest płaskizną i nie składa się z kilku płaskizn, nazywa się *powierzchnią krzywą*.

8. *Bryłą* lub *ciałem* jest to, co ma trzy wymiary rozciągłości.

9. Jeżeli dwie linie proste (fig. 2) AB i AC przecinają się z sobą, natenczas ilość, o którą one, co do położenia swego, są

oddalone od siebie, nazywa się *kątem*; punkt A, w którym dwie linie AB i AC przecinają się, jest *wierzchołkiem* kąta, a linie AD i AC są jego *ramionami*.

Kąt oznacza się niekiedy jedną tylko głoską A, napisaną przy jego wierzchołku; zwykle zaś kąt oznaczają trzema głoskami BAC lub CAB, bacząc aby głoska napisana przy wierzchołku, pomiędzy dwoma innymi była wymówiona.

Kąty, podobnie jak wszelkiego rodzaju ilości, mogą być dodawane, odejmowane, mnożone i dzielone, i tak (fig. 20): kąt DCE jest sumą kątów DCB i BCE; kąt BCD jest różnicą pomiędzy kątami DCE i BCE.

10. Jeżeli linia prosta (fig. 3) AB, spotykając się z drugą linią prostą CD, tworzy dwa kąty przyległe BAC i BAD równe sobie, to każdy z tych kątów na-

zywa się *kątem prostym*, a linia AB *prostopadłą* do CD.

11. Wszelki kąt (fig. 4) BAC mniejszy od prostego nazywa się *kątem ostrym*, a kąt DEF większy od prostego *kątem rozwartym*.

12. *Liniami równoległymi* nazywają się dwie linie proste leżące na jednej płaszczyźnie, które będąc jak najdalej przedłużone nigdzie nie mogą spotkać się z sobą. Takimi są (fig. 5) linie AB, CD.

13. *Figurą płaską* nazywa się płaszczyzna, ze wszech stron zamknięta liniami. Jeżeli linie są proste, to miejsce przez nie zamknięte nazywa się *figurą prostokreślną* lub *wielokątem* (fig. 6), same zaś linie razem wzięte stanowią *obwód wielokąta*.

14. Wielokąt o trzech bokach jest najprostszym ze wszystkich i nazywa się *trójkątem*; wielokąt o czterech bo-

kach nazywa się *czworokątem*; o pięciu, *pięciokątem*; o sześciu, *sześciokątem*; i t. d.

15. Trójkąt, którego wszystkie boki są sobie równe (fig. 7), nazywa się *trójkątem równobocznym*; *trójkąt równoramienny* jest wtenczas, kiedy tylko dwa jego boki są sobie równe (fig. 8); *trójkąt różnobożny* zaś wtedy, kiedy wszystkie trzy jego boki są różne (fig. 9).

16. Trójkąt, w którym jeden kąt jest prosty, nazywa się *trójkątem prostokątnym*. Bok przeciwległy kątowi prostemu nazywa się *przeciwprostokątną*; i tak (fig. 10) trójkąt ABC jest prostokątnym przy A, i bok jego BC jest przeciwprostokątną.

17. Pomiedzy czworokątami odroźniamy:

Kwadrat (fig. 11), w którym wszystkie boki są sobie równe i kąty proste (patrz pod: 20).

Prostokąt, który ma kąty proste lecz boki nierówne (fig. 12).

Równoległobok (fig. 13) w którym boki naprzeciw siebie leżące są równoległe.

Kwadrat ukośny (fig. 14) w którym boki są równe, lecz kąty nie proste.

Nakoniec *trapez*, w którym dwa tylko boki (fig. 15) są równoległe do siebie.

18. *Przekątną* nazywa się linia, łącząca wierzchołki dwóch kątów wielokąta nie przy sobie leżących; taką jest (fig. 42) linia AC.

19. Wielokątem *równobocznym* nazywa się wielokąt, w którym wszystkie boki są sobie równe; wielokątem *równokątnym* nazywa się wielokąt, którego wszystkie kąty są sobie równe.

20. Dwa wielokąty są *równoboczne* pomiędzy sobą jeżeli boki jednego są równe bokom drugiego wielokąta, i jeżeli są je-

dnakowo ułożone; t. j. jeżeli postępując po ich obwodach w jednakowym kierunku, pierwszy bok jednego wielokąta będzie równy pierwszemu bokowi drugiego, drugi bok pierwszego równy drugiemu drugiego, trzeci bok pierwszego równy trzeciemu bokowi drugiego, i t. d. To daje poznać co się rozumie pod nazwiskiem wielokątów *równokątnych* pomiędzy sobą.

W pierwszym boki, a w drugim przypadku kąty nazywają się odpowiedniemi.

NB. W tém dziełku mówić będziemy tylko o figurach położonych na płaszczyźnie.

Objaśnienie wyrazów i znaków.

Pewnikiem nazywa się prawda, sama przez się widoczna.

Twierdzeniem nazywa się prawdę, która staje się widoczną w skutek rozumowania, nazywanego *dowodzeniem*.

Zagadnienie jest pytanie dane do rozwiązania.

Twierdzeniem przybranem nazywa się prawdę, użytą w pomoc do dowodzenia twierdzenia, lub rozwiązania zagadnienia.

Ogólna nazwa *podanie*, stosuje się tak do twierdzeń, jako też do zagadnień i twierdzeń przybranych.

Wnioskiem nazywa się prawdę, wynikającą z jednego, lub kilku podań.

Uwaga czyni się nad jednem lub kilkoma podaniami poprzedzającemi, aby dać poznać ich związek, użyteczność i stosowanie się do niektórych szczególnych, lub też wszystkich przypadków.

Założeniem nazywa się przypuszczenie uczynione w wysłowieniu twierdzenia, lub też w ciągu dowodzenia.

Znak $=$ oznacza równość; i tak wyrażenie $A = B$ oznacza, że A jest równe B .

Aby oznaczyć że A jest mniejsze od B , pisze się $A < B$.

Aby oznaczyć że A jest większe od B , pisze się $A > B$.

Znak $+$ wymawia się *więcej*, i oznacza dodawanie.

Znak $-$ wymawia się *mniej*, i oznacza odejmowanie; i tak: $A + B$ oznacza sumę ilości A i B ; $A - B$ oznacza ich różnicę, czyli to co pozostaje po odjęciu B od A ; podobnie $A - B + C$, albo $A + C - B$ oznacza, że od sumy ilości A i C należy odjąć B .

Znak $\times$ oznacza mnożenie; i tak $A \times B$ przedstawia iloczyn z pomnożenia A przez B . Zamiast znaku $\times$ używa się niekiedy jeden punkt, i tak $A.B$ jest to samo co $A \times B$, niekiedy iloczyn oznacza się pisząc obok siebie ilości dane

do mnożenia bez żadnego znaku np. AB ; lecz podobny sposób pisania tylko wtenczas można używać, kiedy wyrażenia AB nie używamy zarazem na oznaczenie linii prostej, t. j. odległości pomiędzy dwoma punktami A i B .

Wyrażenie $A \times (B + C - D)$ oznacza iloczyn z A przez ilość $B + C - D$. Jeżeliby potrzeba było mnożyć $A + B$ przez $A - B + C$, to iloczyn oznaczylibyśmy przez $(A + B) \times (A - B + C)$; wszystko co jest zawarte między nawiasami uważa się za jedną ilość.

Liczba położona przed ilością, jest mnożnikiem tejże ilości; i tak aby oznaczyć że linia AB ma być wzięta trzy razy, pisze się $3AB$; aby oznaczyć pół kąta A , pisze się $\frac{1}{2}A$.

Kwadrat z linii AB oznacza się przez $\overline{AB}^2$, sześciąt z niej przez $\overline{AB}^3$. Na właściwem miejscu będzie wyraźniej oka-

zane znaczenie kwadratu i sześciątu z linii jakiejkolwiek.

Znak $\sqrt{}$ oznacza pierwiastek który należy wyciągnąć; tak $\sqrt{2}$ jest pierwiastkiem kwadratowym z 2; $\sqrt{A \times B}$ jest pierwiastkiem kwadratowym z iloczynu $A \times B$, albo średnio geometrycznie proporcjonalną między A i B .

Pewniki.

1. Dwie ilości równe trzeciej, są sobie równe.
2. Całość jest większa od swojej części.
3. Całość jest równa summie części, na które ją podzielono.
4. Pomiedzy dwoma punktami można poprowadzić tylko jedną linię prostą.
5. Dwie wielkości, to jest: linie, powierzchnie lub bryły, są sobie równe,

jeżeli będąc położone na sobie, przystają do siebie w całej rozciągłości.

PODANIE I.

Twierdzenie.

Wszystkie kąty proste są sobie równe.

Niech będzie (fig. 16) linia CD prostopadła do AB, i GH do EF, mówię że kąty ACD, EGH będą sobie równe.

Wziąwszy części równe CA, CB, GE, GF, to linia AB będzie równa EF, i linia EF można tak położyć na AB, że punkt E padnie na A, i punkt F na B. Te dwie linie, będąc tak na sobie położone, przystaną do siebie w całej długości; gdyż w razie przeciwnym pomiędzy dwoma punktami A i B można by było poprowadzić dwie linie proste, co byż niemoże (pew. 4); a zatem punkt G, środek linii EF, padnie

na punkt C, środek linii AB. Przyłożwszy ramię GE do CA, powiadam że i ramię GH pójdzie po CD; gdyż przypuścimy, jeżeli można, że ono padnie na linią CK różną od CD; ponieważ podług przypuszczenia kąt EGH = HGF, to i kąt ACK = KCB. Lecz kąt ACK jest większy od ACD, i nadto podług przypuszczenia, kąt ACD = BCD, przeto kąt ACK jest większy od KCB, a zatem linia GH niemoże pójść po linii CK, różnej od CD, lecz padnie na CD, i kąt EGH przystanie do ACD; więc wszystkie kąty proste są sobie równe.

PODANIE II.

Twierdzenie.

Wszelka linia prosta (fig. 17) CD, spotykająca się z drugą AB, tworzy

z nią dwa kąty przyległe ACD , BCD , których summa jest równa dwóm kątom prostym.

Wystawiwszy z punktu C linią CE prostopadłą do AB , kąt ACD będzie summa kątów ACE , ECD ; więc $ACD + BCD$ jest summa trzech kątów ACE , ECD , BCD , z których pierwszy jest kątem prostym, a dwa pozostałe razem stanowią drugi kąt prosty BCE ; więc summa dwóch kątów ACD , BCD jest równa dwóm kątom prostym.

Wniosek 1. Jeżeli jeden z dwóch kątów ACD , BCD jest prosty, to i drugi także jest kątem prostym.

Wniosek 2. Jeżeli linia (fig. 18) DE jest prostopadła do AB , linia AB będzie prostopadła do DE .

Ponieważ linia DE jest prostopadła do AB , przeto kąt ACD jest równy kątowi jemu przyległemu DCB , i oba są proste. Lecz ponieważ kąt ACD jest

kątem prostym, przeto kąt jemu przyległy ACE jest także prosty; a zatem kąt $ACE = ACD$, i linia AB prostopadła do DE .

Wniosek 3. Wszystkie kąty kolejne (fig. 34) BAC , CAD , DAE , EAF , utworzone z jednej strony linii prostej, razem wzięte stanowią dwa kąty proste; gdyż summa ich jest równa summie dwóch kątów przyległych BAC , CAF .

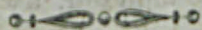
PODANIE III.

Twierdzenie.

Dwie linie proste mające wspólne dwa punkta, przystają do siebie w całej długości i tworzą jedną linią prostą.

Niech będą (fig. 19) dwa punkta wspólne A i B ; naprzód, dwie linie pomiędzy punktami A i B tworzą jedną linią prostą, gdyż inaczej pomiędzy

dwoma punktami można by było poprowadzić dwie linie proste, co byż nie może (pew. 4). Przypuśćmy że linie te będąc przedłużone zaczynają się rozchodzić w punkcie C, i jedna z nich staje się CD, a druga CE; przez punkt C poprowadźmy linią CF, któraby z linią CA utworzyła kąt prosty ACF. Ponieważ linia ACD jest prosta, przeto kąt FCD będzie prosty (pod. 2 wn. 1); ponieważ linia ACE jest prosta, to podobnież kąt FCE jest prosty. Lecz FCE, jako część, nie może być równa całości FCD; przeto linie mające dwa punkta wspólne nie mogą się nigdzie w przedłużeniu rozchodzić; a zatem one tworzą jedną i tę samą linią prostą.



PODANIE IV.

Twierdzenie.

Jeżeli dwa kąty przyległe (fig. 20) ACD, DCB razem wzięte są równe dwóm kątom prostym, to ich ramiona zewnętrzne AC i CB stanowią jedną linią prostą.

Jeżeli bowiem linia CB nie jest przedłużeniem AC, to niech będzie niemi EC, i wtedy ponieważ linia ACE jest prosta, to summa kątów ACD, DCE równa dwóm kątom prostym (pod. 2). Lecz z przypuszczenia summa dwóch kątów ACD, DCB jest równa dwóm kątom prostym, a zatem $ACD + DCB$; równe $ACD + DCE$; odejmując od obu summ kąt ACD, pozostałaby część DCB równa całości DCE, co byż nie

może; a zatem CB jest przedłużeniem linii prostej AC.

PODANIE V.

Twierdzenie.

Kąty wierzchołkiem stykające się (fig. 21), utworzone przez dwie linie AB, DE przecinające się, są sobie równe.

Ponieważ linia DE jest prosta, przeto summa kątów ACD, ACE jest równa dwóm kątom prostym, i ponieważ linia AB jest prosta, przeto summa kątów ACE, BCE jest równa także dwóm kątom prostym; więc summa $ACD + ACE$ jest równa summie $ACE + BCE$. Odejmując od jednej i od drugiej summy kąt im wspólny ACE, pozostanie kąt ACD równy kątowi BCE.

Podobnie możnaby dowieść, że kąt ACE jest równy kątowi BCD.

Uwaga. Cztery kąty utworzone naokoło punktu przez dwie linie proste przecinające się, są równe summie czterech kątów prostych; gdyż dwa kąty ACE, BCE, są równe dwóm kątom prostym, i dwa inne kąty ACD, BCD tworzą drugie dwa kąty proste.

W ogólności, jeżeli (fig. 22) ilekolewicz linij prostych CA, BC, i t. d. przecina się w punkcie C, to summa wszystkich kątów kolejnych ACB, BCD, DCE, ECF, FCA będzie równa czterem kątom prostym; gdyż, jeżeliby przy punkcie C utworzono cztery kąty proste, za pomocą dwóch linij prostopadłych, to przestrzeń zajęta przez cztery kąty proste, byłaby taż sama co przestrzeń zajęta przez kąty kolejne ACB, BCD i t. d.

PODANIE VI.

Twierdzenie.

Dwa trójkąty mające po kącie równym, zawartym pomiędzy dwoma bokami odpowiednio równemi, są sobie równe.

Niech będzie kąt (fig. 23) A równy kątowi D , bok AB równy DE i bok AC równy DF ; powiadam że i trójkąty ABC , DEF są sobie równe. W samej rzeczy jeden z tych trójkątów można położyć na drugim tak, że zupełnie przystanie do niego. I tak przyłożywszy bok DE do jemu równego AB , punkt D padnie na A i punkt E na B ; ponieważ kąt D jest równy kątowi A , więc jeżeli bok DE będzie położony na AB to i bok DF przystanie do AC . Nadto, dla równości boków DF

i AC , punkt F padnie na C , i trzeci bok EF przykryje trzeci bok BC ; więc trójkąt DEF jest równy trójkątowi ABC (pewn. 5).

Wniosek. Ztąd że te dwa trójkąty mają po trzy rzeczy równe t. j. kąt $A=D$, bok $AB=DE$ i bok $AC=DF$, wynika, że i trzy pozostałe rzeczy jednego są równe trzem pozostałym rzeczom drugiego trójkąta, a mianowicie kąt $B=E$, kąt $C=F$, i bok $BC=EF$.

PODANIE VII.

Twierdzenie.

Dwa trójkąty są sobie równe jeżeli mają po boku równym, leżącym przy dwóch kątach odpowiednio równych.

Niech będzie (fig. 23) bok BC równy bokowi EF , kąt B równy kątowi E , i kąt C równy kątowi F ; powiadam że

trójkąt DEF będzie równy trójkątowi ABC.

Gdyż przyłożywszy bok EF do równego jemu BC, punkt E padnie na B, i punkt F na C. Ponieważ kąt E jest równy kątowi B, przeto bok ED przystanie do boku BA, a tém samym punkt D padnie na którykolwiek punkt linii BA. Podobnież dla równości kąta F z kątem C, linia FD pójdzie po CA, i punkt D padnie gdziekolwiek na bok CA; więc punkt D ma się znajdować na dwóch liniach BA i CA, a zatem padnie na wspólne ich przecięcie się A; przeto dwa trójkąty ABC, DEF, przystaną do siebie i są sobie równe.

Wniosek. Z równości pomiędzy trzema rzeczami dwóch trójkątów, a mianowicie z tego, że $BC = EF$, $B = E$, $C = F$, można wniesć orówności trzech rzeczy pozostałych, to jest: $AB = DE$, $AC = DF$, $A = D$.

PODANIE VIII.

Twierdzenie.

W każdym trójkącie bok którykolwiek jest mniejszy od summy dwóch innych boków.

Ponieważ (fig. 23) linia prosta BC jest najkrótszą drogą (opis. 3) od punktu B do C, a zatem BC jest mniejsze od $AB + AC$.

PODANIE IX.

Twierdzenie.

Jeżeli punkt (fig. 24) O obrany we wnętrzu trójkąta ABC, połączymy z końcami jakiegobądź boku BC, liniami prostymi OB, OC, summa tych linii będzie mniejsza od summy pozostałych boków AB, AC trójkąta.

Przedłużwszy BO do przecięcia się z boki AC w D, linia OC będzie krótszą od OD + DC (pod. 8), dodawszy do każdej z tych ilości BO, będzie $BO + OC < BO + OD + DC$ albo $BO + OC < BD + DC$.

Podobnież mamy $BD < BA + AD$; dodając do obu ilości DC, będzie $BD + DC < BA + AC$. Lecz znaleziono poprzednio że $BO + OC < BD + DC$, przeto tém bardziej $BO + OC < BA + AC$.

PODANIE X.

Twierdzenie.

Jeżeli dwa boki AB, AC trójkąta ABC, są równe dwóm bokom DE, DF trójkąta DEF, lecz jeżeli kąt BAC, zawarty pomiędzy bokami pierwszymi, jest większy od kąta EDF utworzonego przez dwa drugie boki, to i bok trze-

ci BC trójkąta pierwszego, będzie większy od boku trzeciego EF trójkąta drugiego.

Narysowawszy kąt $CAG = D$, wzięwszy $AG = DE$, i połączyszy C z G linia prosta CG, trójkąt GAC będzie równy trójkątowi DEF; gdyż one z wykreślenia mają po kącie równym, objętym bokami równymi (pod. 6), a zatém $CG = EF$. Zdarzyć się mogą tutaj trzy przypadki: albo punkt G padnie zewnątrz trójkąta ABC, albo na bok jego BC, lub też wewnątrz trójkąta.

Przypadek 1. Linia (fig. 25) prosta GC jest krótsza od $GJ + JC$, linia prosta AB jest krótsza od $AJ + JB$; przeto $GC + AB < GJ + AJ + JC + JB$, czyli $GC + AB < AC + BC$. Odjąwszy z jednej strony AB i z drugiej jemu równe AG, pozostanie $GC < BC$;

ponieważ zaś $GC = EF$, przeto $EF < BC$.

Przypadek 2. Jeżeli punkt G (fig. 26) pada na bok BC, widocznie bok GC, czyli jemu równy EF, jest mniejszy od BC.

Przypadek 3. Nakoniec, jeżeli punkt G (fig. 27) pada wewnątrz trójkąta ABC; podług twierdzenia poprzedzającego będzie: $AG + GC < AB + BC$. Odejmując od jednej z tych ilości bok AG a od drugiej jemu równy AB, pozostanie $GC < BC$, czyli $EF < BC$.

Uwaga. Odwrotnie, jeżeli dwa boki AB, AC, trójkąta ABC, są równe dwóm bokom DE i DF, trójkąta DEF, a bok trzeci CB pierwszego, jest większy od boku trzeciego EF drugiego trójkąta, powiadam że i kąt BAC trójkąta pierwszego, będzie większy od kąta EDF drugiego trójkąta. Jeżeliby bowiem to, cośmy powiedzieli, niebyło

prawdziwem, kąt BAC byłby albo równy kątowi EDF, albo mniejszy od niego; w pierwszym przypadku, bok CB byłby równy bokowi EF (pod. 6); w drugim CB byłoby mniejsze od EF; lecz jak jedno, tak drugie sprzeciwia się założeniu, a zatem kąt BAC jest większy od kąta EDF.

PODANIE XI.

Twierdzenie.

Dwa trójkąty są sobie równe, jeżeli mają po trzy boki odpowiednio równe.

Niech będzie (fig. 23) bok $AB = DE$, $AC = DF$, $BC = EF$, powiadam że i kąt $A = D$, $B = E$, $C = F$.

Jeżeliby bowiem kąt A był większym od kąta D, a z założenia boki AB i AC, są równe bokom DE i DF, byłby podług

twierdzenia poprzedzającego bok BC większym od EF; jeżeliby zaś kąt A był mniejszym od kąta D, i bok BC byłby mniejszym od EF; ponieważ zaś BC jest równe EF, przeto kąt A nie może być ani większym, ani mniejszym, lecz jest równy kątowi D. Podobnież można okazać że kąt B = E i kąt C = F.

Uwaga. Łatwo dostrzedz, że kąty równe leżą naprzeciw boków równych; i tak kąty równe A i D leżą naprzeciw boków równych BC i EF.

PODANIE XII.

Twierdzenie.

W trójkącie równoramiennym kąty, leżące naprzeciw boków równych, są sobie równe.

Niech będzie (fig. 28) bok $AB = AC$, powiadam że i kąt $C = B$.

Połączmy wierzchołek A z punktem D, środkiem podstawy BC, linią prostą AD; dwa trójkąty ABD, ADC mają po trzy boki równe, a mianowicie: bok AD wspólny, $AB = AC$ według założenia, $BD = DC$ z wykreślenia; przeto podług twierdzenia poprzedzającego kąt B jest równy kątowi C.

Wniosek. W trójkącie równobocznym wszystkie kąty są sobie równe, to jest: trójkąt równoboczny jest równokątny.

Uwaga. Równość trójkątów ABD i ACD dowodzi, że kąt $BAD = CAD$, i że kąt $BDA = ADC$; więc dwa ostatnie kąty są proste; przeto linia, łącząca wierzchołek trójkąta równoramiennego z środkiem jego podstawy, jest prostopadła do podstawy i dzieli kąt przy wierzchołku na dwie części równe.

W trójkącie nierównoramiennym można dowolnie bok jego którykolwiek

wziąć za podstawę i natenczas wierzchołkiem będzie wierzchołek kąta przeciwnego temu bokowi. W trójkącie zaś równoramiennym za podstawę biorą bok różny od dwóch innych.

PODANIE XIII.

Twierdzenie.

Odwrotnie, jeżeli dwa kąty w trójkącie są sobie równe, to i boki naprzeciw nich leżące są sobie równe i trójkąt jest równoramienny.

Niech będzie (fig. 29) kąt $ABC = ACB$, powiadam że i bok AC będzie równy bokowi AB .

Jeżeli bowiem boki AC i AB nie są sobie równe, jeden z nich, np. AB , byłby większym od drugiego. Weźmy $BD = AC$, i połączmy punkta D i C linią prostą DC .

Podług założenia kąt DBC jest równy kątowi ACB , dwa boki DB i BC są równe bokom AC i CB , więc trójkąt DBC (pod. 6) byłby równy trójkątowi ACB ; lecz część nie może być równa całości, a zatem boki AB , AC , nie mogą być nie równe i tym samym trójkąt ABC jest równoramienny.

PODANIE XIV.

Twierdzenie.

Z dwóch boków trójkąta ten jest większy, który leży naprzeciw kąta większego; i odwrotnie, z dwóch kątów trójkąta ten jest większy, który leży naprzeciw boku większego.

1-e Niech będzie (fig. 30) kąt $C > B$, powiadam że i bok AB , leżący naprzeciw kąta C , jest większy od boku AC , leżącego naprzeciw kąta B .

Narysujmy kąt $BCD = B$; w trójkącie DBC (pod. 13) będzie $BD = DC$. Lecz $AD + DC$ jest większe od AC , a $AD + DC = AD + DB = AB$, przeto AB jest większe od AC .

2-e Niech będzie bok $AB > AC$, powiadam że i kąt C , leżący naprzeciw boku AB , będzie większy od kąta B , leżącego naprzeciw boku AC .

Gdyż, jeżeliby było $C < B$, podług tego co dowiedziono wypadałoby że $AB < AC$, co jest przeciwném założeniu.

Jeżeliby zaś było $C = B$, to (tw. 13) i AB byłoby równe AC , co również sprzeciwia się założeniu, a zatem kąt C jest większym od B .

PODANIE XV.

Twierdzenie.

Z punktu A (fig. 31), danego nad linią prostą DE, można spuścić jedną tylko prostopadłą do tejże linii.

Przypuścmy że można spuścić dwie prostopadłe AB i AC , jedną z nich AB przedłużmy tak, aby BF było równe AB , i połączmy punkt F z C linią prostą FC .

Trójkąt CBF jest równy trójkątowi ABC ; ponieważ kąty GBF i CBA są równe jako proste, bok CB jest wspólny, i bok $BF = AB$; przeto te dwa trójkąty są sobie równe (pod. 6), z czego wynika, że kąt $BCF = BCA$. Kąt BCA podług przypuszczenia jest prosty, a zatem kąt jemu równy BCF jest także prosty. Lecz jeżeli dwa kąty przyległe BCA i BCF razem wzięte są równe dwóm ką-

tom prostym, linia ACF musi być prosta (pod. 4), z czego wypada że pomiędzy dwoma punktami A i F można poprowadzić dwie linie proste ABF, ACF, co być niemożne (pew. 4), przeto niemożne być także, ażeby z jednego punktu można było spuścić dwie prostopadłe na jedną i tę samą linię prostą.

Uwaga. Również z punktu (fig. 17), danego na linii prostej AB, niemożna wyprowadzić dwóch prostopadłych do tejże linii; jeżeliby bowiem linie proste CD i CE były prostopadłe, kąty DCB i BCE byłiby kątami prostymi i w takim razie, część byłaby równa całości.

PODANIE XVI.

Twierdzenie.

Jeżeli z punktu A (fig. 31), danego nad linią prostą DE, spuścimy do niej

prostopadłą i poprowadzimy różne pochyłe AE, AC, AD i t. d. do różnych punktów tej linii, będzie:

1-e prostopadła AB krótszą od wszelkiej pochyłej;

2-e dwie pochyłe AC, AE, poprowadzone z dwóch różnych stron prostopadłej, w odległościach BC i BE różnych sobie, są sobie równe;

3) Z dwóch pochyłych AD i AC, lub AE i AD, jakkolwiek poprowadzonych, ta będzie dłuższa, która jest bardziej oddalona od prostopadłej.

Przedłużmy prostopadłą AB tak, aby przedłużenie BF było równe AB, i połączmy punkt F z punktami C i D liniami FC i FD.

1-e Trójkąt BCF jest równy trójkątowi BCA, gdyż kąt prosty CBF = CBA, bok CB wspólny i bok BF = BA; przeto (pod. 6) bok trzeci CF jest równy bokowi AC. Linia ABF

prosta jest krótsza od linii łamanej ACF; a zatem i AB, ako połowa linii ABF, jest krótsza od linii AC, jako połowy linii ACF; więc 1-e prostopadła jest krótsza od wszelkiej pochyłej.

2) Przypuściwszy że $BE = BC$, ponieważ trójkąty CAB i EAB mają bok AB wspólny i kąt $ABE = ABC$, (pod. 6) więc boki AE, AC są sobie równe, i przeto 2-e dwie pochyłe, równo oddalone od prostopadłej, są sobie równe.

3) W trójkącie DFA summa linii AC, CF, jest mniejsza (pod. 9) od summy boków AD, DF, a tém samym i AC połowa linii ACF, jest mniejsza od AD, połowy linii ADF; a zatem 3-e pochyłe są tém dłuższe im bardziej są oddalone od prostopadłej.

Wniosek I. Prostopadła mierzy odległość punktu od linii, ponie-

waż ona jest krótsza od każdej pochyłej.

II. Od punktu do jednej linii prostej nie można poprowadzić trzech linii prostych, równych sobie; gdyż, jeżeliby to mogło nastąpić, dwie pochyłe równe znajdowałyby się z jednej strony prostopadłej, co byż nie może.

PODANIE XVII.

Twierdzenie.

Jeżeli z punktu C (fig. 32), środka linii prostej AB, wyprowadzimy prostopadłą EF do téjże linii, mówię że:
1° każdy punkt na prostopadłej będzie równo oddalony od końców linii AB;
2° wszelki punkt, nie leżący na prostopadłej, znajduje się w niejednakowej odległości od końców A i B.

1) Ponieważ zakładamy że $AC=CB$, przeto dwie pochyłe AC i DB są równo oddalone od prostopadłej, a tém samym są sobie równe. Toż samo rozumieć o dwóch pochyłych AE , EB , lub AF , FB , i t. d.; a zatém 1^o, wszelki punkt na prostopadłej leżący, jest równo oddalony od końców A i B .

2) Niech będzie punkt J , znajdujący się nie na prostopadłej: jeżeli połączymy go z końcami linii AB liniami prostymi AJ i BJ , wtenczas jedna z nich przecięnie prostopadłą w D , a poprowadziwszy DB , będzie $DB=DA$. Lecz linia prosta JB jest mniejsza od summy linii $JD + DB$, ponieważ zaś $JD + DB = JD + DA = JA$, przeto $JB < JA$; więc 2^o wszelki punkt leżący zewnątrz prostopadłej, jest nierówno oddalony od końców A i B .

PODANIE XVIII.

Twierdzenie.

Dwa trójkąty prostokątne, mające po przeciwprostokątnej równiej i po jednym bokowi równemu, są sobie równe.

Niech będzie (fig. 33) przeciwprostokątna $AC = DF$, i bok $AB = DE$, powiadam że trójkąt prostokątny ABC będzie równy trójkątowi prostokątnemu DEF .

Te dwa trójkąty byłyby widocznie równe, gdyby bok trzeci BC był równy trzeciemu bokowi EF ; przypuśćmy, jeżeli można, że te boki nie są sobie równe i nadto że bok BC jest większy. Wziąwszy $BG = EF$, połączmy punkt A z G linią prostą AG . Trójkąt ABG jest równy trójkątowi DEF , gdyż kąt prosty B jest równy kątowi

prostemu E, bok $AB = DE$ i bok $BG = EF$, a zatem te dwa trójkąty są sobie równe (pod. 6) z kąd $AG = DF$; lecz z założenia $DF = AC$, przeto $AG = AC$. Ponieważ zaś pochyła AC , będąc bardziej oddalona od prostopadłej, nie może być równa pochyłej AG (pod. 16), przeto niemoże być także, aby BC było różne od EF , a zatem trójkąt ABC jest równy trójkątowi DEF .

PODANIE XIX.

Twierdzenie.

W każdym trójkącie summa trzech jego kątów jest równa dwóm kątom prostym.

Niech będzie (fig. 35) trójkąt ABC , w którym zakładamy (1) że bok AB jest

(1) To przypuszczenie nie wyłącza przypadku, w którym by bok średni AC był równy jednemu z skrajnych AB lub BC .

największym i BC najmniejszym, a tém samém że kąt ACB jest największy i kąt BAC najmniejszy (pod. 14).

Przez punkt A i przez środek J boku przeciwległego CB , poprowadźmy linię prostą AJ , i przedłużmy ją do C' tak, aby $AC' = AB$; podobnie przedłużmy AB do B' aby AB' było dwa razy dłuższe od AJ .

Oznaczywszy literami A, B, C trzy kąty trójkąta ABC , i literami A', B', C trzy kąty trójkąta $AB'C'$, powiadam że będzie kąt $C' = B + C$ i kąt $A = A' + B'$; z kąd wynika że $A + B + C = A' + B' + C'$; to jest: że summa trzech kątów w każdym z tych dwóch trójkątów jest jednakowa.

Aby tego dowieść, uczynimy $AK = AJ$ i połączmy punkt C' z K , otrzymamy trójkąt $C'AK$ równy trójkątowi BAJ . Gdyż te dwa trójkąty mają kąt A wspól-

ny, zawarły pomiędzy bokami odpowiednio równymi, a mianowicie bok $AC' = AB$, i $AK = AJ$; przeto bok trzeci $C'K$ jest równy bokowi trzeciemu BJ , i tём samém kąt $AC'K = ABC$, i kąt $AKC' = AJB$.

Mówię teraz że trójkąt $B'C'K$ jest równy trójkątowi ACJ . Ponieważ summa dwóch kątów przyległych jest równa dwóm kątom prostym (pod. 2), przeto $AKC' + C'KB' = AJC + AJB$, odjąwszy od jednej summy kąt AKC' , a od drugiej jemu równy kąt AJB , pozostanie kąt $C'KB' = AJC$. Dwa kąty równe $C'KB'$ i AJC są utworzone przez boki odpowiednio równe, a mianowicie: $C'K = JB = JC$, i $KB' = AK = AJ$, gdyż przypuściliśmy $AB' = 2AJ = 2AK$. Zatem dwa trójkąty $B'C'K$, ACJ są sobie równe (pod. 6) i tём samém bok $C'B' = AC$, kąt $B'C'K = ACB$ i kąt $KB'C' = CAJ$.

Ztąd wypada: 1^o że kąt $AC'B'$, oznaczony przez C' , składa się z dwóch kątów, równych kątom B i C trójkąta ABC , czyli $C' = B + C$; 2^o że kąt A trójkąta ABC składa się z kąta A' , czyli $C'AB'$ należącego do trójkąta $AB'C'$ i kąta CAJ równego kątowi B' tegoż samego trójkąta, co daje $A = A' + B'$; przeto $A + B + C = A' + B' + C'$. Ponieważ zaś, podług przypuszczenia, mamy że $AC < AB$, a tём samém $C'B' < AC'$, przeto w trójkącie $AC'B'$ kąt przy A oznaczony gloską A' , jest mniejszy od kąta B' ; a że summa obu tych kątów jest równa kątowi A trójkąta danego, więc kąt $A' < \frac{1}{2}A$.

Jeżeli zapomocą podobnego wykreślenia przejdziemy od trójkąta $AC'B'$, do trójkąta $AC''B''$, którego kąty oznaczmy podobnie gloskami A'' , B'' , C'' otrzymamy dwie równości $C'' = B' + B''$, $A' = A'' + B''$, ztąd wypada że $A' + B' + C' = A'' + B'' + C''$, a zatem summa kątów

we wszystkich trzech trójkątach jest jednakowa; zarazem otrzymamy, że kąt $A' < \frac{1}{2}A'$, a tém samém że $A'' < \frac{1}{4}A$. Postępując dalej w kreśleniu trójkątów $AC'B'$, $AC''B''$, i t. d. dojdziemy nakoniec do trójkąta abc , w którym summa trzech kątów będzie taka sama jak i w trójkącie ABC , lecz kąt a będzie mniejszy od któregokolwiek wyrazu postępu ilorazowego malejącego $\frac{1}{2}A$, $\frac{1}{4}A$, $\frac{1}{8}A$ i t. d.

Można więc wyobrazić sobie, że szereg trójkątów przeciąga się dopóty, dopóki nakoniec kąt a nie będzie mniejszy od jakiegokolwiek kąta oznaczonego.

Jeżeli zapomocą trójkąta abc wykreślimy trójkąt następujący $a'b'c'$, summa kątów $a' + b'$ tego trójkąta będzie równa kątowi a , i tém samém będzie mniejsza od wszelkiego kąta naznaczyć się mogącego; zkaąd wypada że summa

trzech kątów trójkąta $a'b'c'$ sprowadza się prawie do jednego kąta c' .

Aby mieć miarę tej summy, przedłużmy bok $a'c'$ ku d' , i oznaczmy kąt zewnętrzny $b'c'd'$ głoską x' , kąt x' dodany do kąta c' , trójkąta $a'b'c'$, czyni summę równą dwóm kątom prostym, (pod. 2) oznaczywszy więc kąt prosty literą D mamy: $c' = 2D - x'$; więc summa wszystkich trzech kątów trójkąta $a'b'c'$ będzie równa:

$$2D + a' + b' - x'.$$

Lecz można wyobrazić sobie, że kąty i boki trójkąta $a'b'c'$ tak się zmieniają że ztąd powstaje jednakowym sposobem szereg trójkątów, w którym każdy z następujących zbliża się coraz bardziej do granicy, w której kąty a' i b' są zerami. Ponieważ około tej granicy linia prosta $a'c'd'$ schodzi się z linią $a'b'$, przeto nakoniec trzy punkta a' , b' , c' , leżą w jednej linii pro-

stę; wówczas kąty b' i x' stają się zerami, kąt zaś a' i ilość $2D + a' + b' - x$, mierząca sumę trzech kątów trójkąta $a'b'c'$, sprowadza się do $2D$; przeto: *w każdym trójkącie, summa trzech jego kątów jest równa dwóm kątom prostym.*

Wniosek I. Znając dwa kąty trójkąta, albo znając ich sumę, można oznaczyć kąt trzeci, odejmując sumę wiadomych kątów od dwóch kątów prostych.

II. Jeżeli dwa kąty jednego trójkąta są równe dwóm kątom drugiego, to i trzeci kąt jednego jest równy kątowi trzeciemu drugiego trójkąta, i tém samym dwa trójkąty są równokątne.

III. W trójkącie niemoże być więcej jak jeden kąt prosty; gdyż jeżeliby ich było dwa, kąt trzeci musiałby być zerem; tém bardziej trójkąt nie-

może mieć więcej jak jeden kąt rozwarty.

IV. W trójkącie prostokątnym summa dwóch kątów ostrych jest równa kątowi prostemu.

V. W trójkącie równobocznym każdy kąt jest trzecią częścią dwóch kątów prostych, czyli dwie trzecie kąta prostego. Jeżeli zatem kąt prosty wyrazimy przez 1, kąt trójkąta równobocznego wyrazi się przez $\frac{2}{3}$.

VI. W każdym trójkącie ABC, przedłużwszy bok jego AB ku D, kąt zewnętrzny CBD będzie równy summie dwóch kątów wewnętrznych A i C, nie obok niego leżących w trójkącie; gdyż dodając jak do kąta CBD, tak do $A + C$, kąt ABC, otrzymamy summy równe dwóm kątom prostym.

PODANIE XX.

Twierdzenie.

W wielokącie summa kątów wewnętrznych jest równa dwóm kątom prostym, wziętym tyle razy, ile wielokąt ma boków mniej dwa.

Niech będzie (fig. 42) wielokąt ABCD...., od wierzchołka kąta A poprowadziwszy przekątne AC, AD, AE i t. d. do wierzchołków wszystkich kątów, wielokąt o siedmiu bokach zostanie podzielony na pięć trójkątów, wielokąt o ośmiu bokach zostanie podzielony na sześć trójkątów, i w ogólności wielokąt podzieli się na tyle trójkątów, ile ma boków mniej dwa; gdyż te trójkąty mogą być uważane jako mające wspólny wierzchołek w A, a za podstawy wszystkie boki wielokąta, oprócz tych, które składają kąt A. Nad

summa kątów w tych wszystkich trójkątach jest równa summie kątów wielokąta; a zatem summa kątów wielokąta jest równa dwóm kątom prostym, wziętym tyle razy, ile jest trójkątów, to jest: wziętym tyle razy, ile jest jedności w liczbie boków wielokąta zmniejszonej dwóma.

Wniosek I. Summa kątów czworokąta jest równa 2 kątom prostym, pomnożonym przez 4—2, to jest: czterem kątom prostym. Jeżeli więc wszystkie kąty w czworokącie są sobie równe, to każdy z nich jest kątem prostym; co sprawdza opis, w którym powiedziano, że w prostokącie i kwadracie wszystkie kąty są proste.

II. Summa kątów w pięciokącie jest równa dwóm kątom prostym, pomnożonym przez 5—2, t. j. sześciu kątom prostym. Jeżeli więc pięciokąt jest ró-

wnokątny, to jest, jeżeli jego kąty są sobie równe, każdy z nich jest piątą częścią sześciu kątów prostych, czyli $\frac{2}{3}$ kąta prostego.

III. Summa kątów sześciokąta jest $2(6 - 2)$, czyli 8 kątów prostych; a zatem w sześciokącie równokątnym, każdy kąt jest $\frac{8}{6}$ czyli $\frac{4}{3}$ kąta prostego.

Uwaga. Jeżeliby chciano to podanie zastosować do wielokąta mającego jeden lub kilka kątów *wklęsłych* (fig. 43), należałoby uważać każdy kąt wklęsły, jako większy od dwóch kątów prostych. Lecz dla uniknienia tego, uważać będziemy tylko *wielokąty wypukłe*. Wielokąt jest wypukłym, jeżeli linia prosta, jakkolwiek poprowadzona, niemoże przeciąć się z obwodem jego więcej jak w dwóch punktach.

PODANIE XXI.

Twierdzenie.

Dwie linie proste AB i CD (fig. 36), prostopadłe do linii trzeciej FG, są względem siebie równoległe; t. j. będąc przedłużone jak najdalej, nigdzie nie przeczną się z sobą.

Jeżeliby bowiem linie AB i CD przecięły się z sobą w jakimkolwiek punkcie O, w takim razie mielibyśmy dwie prostopadłe OF i OG, spuszczone z jednego punktu O na linię FG, co byż niemożne (pod. 15).

PODANIE XXII.

Twierdzenie.

Dwie linie proste AB, CD (fig. 36), będą równoległe, jeżeli z trzecią EF, tworzą dwa kąty jednostronne wewnętrzne.

trzone BEF, DFE, których summa jest równa dwóm kątom prostym.

Jeżeli by kąty BEF, DFE były równe sobie, linie AB i CD byłyby prostopadłe do EF, a tém samym, podług twierdzenia poprzedzającego, równoległe względem siebie; przypuścmy więc że te kąty nie są sobie równe i z punktu F, wierzchołka kąta większego, spuścmy prostopadłą FG na AB.

W trójkącie EFG, summa kątów ostrych FEG + EFG jest równa kątowemu prostemu (pod. 19 wn. 4), a zatem odjawszy ją od summy BEF + DFE, podług założenia równiej dwóm kątom prostym, otrzyma się na resztę kąt DFG, równy kątowi prostemu. Więc dwie linie AB, CD, są prostopadłe do linii FG, a zatem są równoległe względem siebie (pod. 21).

PODANIE XXIII.

Twierdzenie.

Jeżeli dwie linie proste AB, CD (fig. 37), z trzecią linią EF, tworzą dwa kąty jednostronne wewnętrzne, których summa jest mniejsza lub większa od dwóch kątów prostych, mówię że linie AB, CD, będąc dostatecznie przedłużone, przetną się z sobą.

Niech będzie 1^{da} summa BEF + EFD mniejsza od dwóch kątów prostych; poprowadźmy FG tak aby kąt EFG = AEF, będzie BEF + EFG = BEF + AEF, a tém samym summa BEF + EFG jest równa dwóm kątom prostym; ponieważ zaś BEF + EFD jest mniejsze od dwóch kątów prostych, przeto linia DF jest zawarta w kącie EFG. Przez punkt F poprowadźmy pochyłą FM, która spotka linią AB w punkcie M, będzie

kąt AMF równy GFM dla tego, że dodając do każdego z tych kątów jednakową ilość $EFM + FEM$, otrzymamy dwie summy, z których każda w szczególności równa dwóm kątom prostym. Weźmy następnie $MN = FM$ i połączmy F z N linią FN ; kąt AMF zewnętrzny względem trójkąta FMN , jest równy summie dwóch kątów wewnętrznych nie obok niego leżących MFN , MNF (pod. 19 wn. 6); że zaś kąty MFN i MNF leżąc naprzeciw boków równych MN , FM , są sobie równe, przeto kąt AMF , czyli jemu równy MFG jest dwa razy większy od MFN ; a zatem linia prosta FN dzieli kąt GFM na dwie równe części i z linią AB przecina się w punkcie N , który leży w odległości $MN = FM$.

Z tego dowodzenia wynika, że wzięwszy $NP = FN$, na linii AB oznaczy się punkt P , przez który przejdzie li-

nia FP , tworząca kąt GFP równy połowie kąta GFN , czyli czwartej części kąta GFM .

Takim sposobem można brać następnie połowę, czwartą, ósmą i t. d. część kąta GFM , i linie, które są wypadkami tych podziałów, spotykają linią AB w punktach coraz bardziej oddalonych lecz łatwych do oznaczenia, gdyż $MN = FM$, $NP = FN$, $PQ = PF$ i t. d. Nawet można dostrzedz, że odległość któregokolwiek z punktów przecięć od punktu stałego F , nie jest dwa razy większą od odległości punktu poprzedzającego; gdyż np. $FN < FM + MN$ czyli $FN < 2MN$, podobnież mamy $FP < 2FN$, $FQ < 2FP$ i t. d. Dzieląc dalej kąt GFM na 2, 4, 8 i t. d. części równych, dojdziemy do kąta GFZ , mniejszego od kąta GFD i wtenczas jeszcze linia FZ przedłużona przecina się z linią AB w pewnym oznaczonym punkcie; więc tém

bardziej linia FD , zawarta w kącie EFZ , spotka się z linią AB .

2) Przypuśćmy że summa dwóch kątów wewnętrznych $AEF + CFE$ jest większa od dwóch kątów prostych; linią AE przedłużymy ku B i CF ku D , summa czterech kątów AEF , BEF , CFE , EFD będzie równa czterem kątom prostym; więc od tej summy odjawszy $AEF + CFE$, większe od dwóch kątów prostych, pozostanie summa $BEF + EFD$ mniejsza od dwóch kątów prostych. A zatem podług pierwszego przypadku linie EB , FD , będąc dostatecznie przedłużone, muszą przeciąć się z sobą.

Wniosek. Przez punkt dany F nie można poprowadzić więcej jak jedną linię FG równoległą do AB ; gdyż poprowadziwszy dowolnie FE , dwie linie AB i FG utworzą z linią FE dwa kąty BEF i EFG , których summa jest

równa dwóm kątom prostym; poprowadziwszy zaś jakąkolwiek inną linię FD otrzymalibyśmy summe dwóch kątów BEF i EFD większą lub mniejszą od dwóch kątów prostych, a tém samym linie FD i AB musiałyby przeciąć się z sobą.

PODANIE XXIV.

Twierdzenie.

Dwie linie (fig. 38) równoległe AB , CD , przecięwszy sieczną EF , summa kątów jednostronnych wewnętrznych AGO i GOC będzie równa dwóm kątom prostym.

Jeżeli by bowiem summa tych kątów była większa lub mniejsza od dwóch kątów prostych, dwie linie AB i CD przecięłyby się z sobą z jednej lub z drugiej strony (pod. 23) linii EF , i nie byłyby równoległe.

Wniosek I. Jeżeli kąt GOC jest prosty, kąt AGO będzie także prosty; a zatem wszelka linia prostopadła do jednej z dwóch linii równoległych jest prostopadła i do drugiej.

II. Ponieważ summa AGO + GOC jest równa dwóm kątom prostym, i summa GOD + GOC jest także równa dwóm kątom prostym, przeto odjąwszy od każdej z nich kąt GOC, pozostanie kąt AGO = GOD. Nadto (pod. 5) kąt AGO = BGE, i GOD = COF; przeto cztery kąty ostre AGO, BGE, GOD, COF są sobie równe; toż samo rozumieć o czterech kątach rozwartych AGE, BGO, GOC, DOF. Łatwo też dostrzedz, że dodawszy do każdego kąta rozwartego którykolwiek kąt ostry, wypadnie summa równa dwóm kątom prostym.

Uwaga. Kąty, o których wyżej mówiono, uważane po dwa, mają różne

nazwiska. Już nazwaliśmy dwa kąty AGO, GOC, *jednostronnemi wewnętrznemi*; kąty BGO, GOD mają toż samo nazwisko; kąty AGO, GOD nazywają się *naprzemianległemi wewnętrznemi*, lub krócej *naprzemianległemi*; toż samo nazwisko stosuje się do kątów BGO, GOC. Nakoniec kąty EGB i GOD, lub EGA i GOC, są *jednostronne odpowiadające*; kąty EGB i COF, lub AGE i DOF, są *naprzemianległe zewnętrzne*. To powiedziawszy, można uważać następujące twierdzenia, jako dowiedzione:

1^o Kąty jednostronne wewnętrzne, razem wzięte, ważą dwa kąty proste.

2^o Kąty naprzemianległe wewnętrzne są sobie równe; także jednostronne odpowiadające i naprzemianległe zewnętrzne.

Odwrotnie, jeżeli dwa kąty jednostronne odpowiadające, albo naprze-

mianległe, są sobie równe; natenczas linie, będące ich ramionami, są równoległe względem siebie. Niech będzie np. kąt $\text{AGO} = \text{GOD}$; ponieważ $\text{GOC} + \text{GOD}$ jest równe dwóm kątom prostym, przeto będzie także $\text{AGO} + \text{GOC}$ równe dwóm kątom prostym, além samém (pod. 22) linie AG, CO są równoległe.

PODANIE XXV.

Twierdzenie.

Dwie linie (fig. 39) AB, CD równoległe do trzeciej EF, są równoległe względem siebie.

Poprowadźmy sieczną PQR, prostopadłą do EF; ponieważ linia AB jest równoległa do EF, przeto sieczna PR będzie prostopadła do AB (pod. 24 wn. 1); podobnież, ponieważ linia CD

jest równoległa do EF, przeto sieczna PR będzie prostopadła do ED. A zatem, linie AB i CD, będąc prostopadłe do jednej i tej samej linii prostej PQ, są równoległe względem siebie (pod. 21).

PODANIE XXVI.

Twierdzenie.

Dwie linie równoległe są wszędzie równo oddalone od siebie.

Niech będą (fig. 40) dwie linie równoległe AB i CD; jeżeli z dwóch dowolnych punktów wystawimy prostopadłe EG i FH do linii AB, linie EG i FH będą zarazem prostopadłe do CD (pod. 24), a nadto równe pomiędzy sobą.

Gdyż, poprowadziwszy GF, kąty GFE i FGH, jako naprzemianległe wewnętrzne (pod. 24, uw.) względem li-

nij równoległych AB i CD , są sobie równe; podobnie, linie EG , FH , będąc prostopadłe do linii AB , są równoległe do siebie, a zatem kąty EGF , GFH , jako naprzemianległe wewnętrzne względem tych linii równoległych, są sobie równe. Dwa trójkąty EFG i FGH , mając po boku wspólnym, leżącym przy dwóch kątach odpowiednio równych, są sobie równe (pod. 7); zkaż bok EG , mierzący odległość dwóch linii równoległych AB i CD w punkcie E , jest równy bokowi FH , mierzącemu odległość tych samych linii równoległych w punkcie F .

PODANIE XXVII.

Twierdzenie.

Dwa kąty (fig. 41) BAC , DEF , mające ramiona odpowiednio równoległe,

i rozchodzące się w jedne strony, są sobie równe.

Przedłużmy, jeżeli tego potrzeba, DE do przecięcia się z AC w punkcie G , kąt DEF jest równy kątowi DGC , gdyż linia EF jest równoległa do GC (pod. 24); kąt DGC jest równy BAC , gdyż linia DG jest równoległa do AB ; a zatem kąt DEF jest równy kątowi BAC .

Uwaga. W tém twierdzeniu zrobiono warunek, aby bok EF był skierowany w tę samą stronę co i bok AC , a ED w tę samą stronę co AB , dla tego, że przedłużwszy bok EF ku H , kąty DEH i BAC miałyby boki równoległe i nie byłyby równe, lecz czyniłyby sumę równą dwóm kątom prostym.

PODANIE XXVIII.

Twierdzenie.

W równoległoboku boki i kąty przeciwległe są sobie równe.

Poprowadźmy (fig. 44) przekątną BD, dwa trójkąty ADB i DBC mają bok BD wspólny, nadto, dla równoległości boków AD i BC, kąt $ADB = DBC$ (pod. 24), i dla równoległości boków AB i CD kąt $ABD = BDC$, przeto one są sobie równe (pod. 7); z kąd wynika że bok AB, leżący naprzeciw kąta ADB, jest równy bokowi DC, leżącemu przeciw kąta $DBC = ADB$; podobnie bok trzeci AD jest równy bokowi trzeciemu BC; przeto boki przeciwległe w równoległoboku są sobie równe.

Powtóre, z równości tychże samych trójkątów wypada, że kąt A jest ró-

wny kątowi C, i że kąt ADC, złożony z dwóch kątów ADB, BDC, jest równy kątowi ABC, złożonemu z kątów, równych tamtym, DBC i ABD; przeto kąty przeciwległe w równoległoboku są sobie równe.

Wniosk. Zatem dwie linie równoległe AB, CD, zawarte między dwiema liniami równoległymi AD i BC, są sobie równe.

PODANIE XXIX.

Twierdzenie.

Jeżeli w czworokącie (fig. 44) ABCD boki przeciwległe są sobie równe, to jest, jeżeli $AB = CD$ i $AD = BC$, mówię że boki równe będą równoległe do siebie i czworokąt będzie równoległobokiem.

Gdyż poprowadziwszy przekątną BD, dwa trójkąty ABD, BDC, mając po trzy

boki odpowiednio równe, są sobie równe; a zatem kąt ADB , leżący naprzeciw boku AB , jest równy kątowi DBC , leżącemu naprzeciw boku CD równego AB , i tém samym (pod. 24) bok AD jest równoległy do BC . Dla podobnej przyczyny bok AB jest równoległy do CD ; a zatem czworokąt $ABCD$ jest równoległobokiem.

PODANIE XXX.

Twierdzenie.

Jeżeli w czworokącie dwa boki przeciwnie leżące AB , CD (fig. 44) są sobie równe i równoległe, dwa inne boki AD i BC będą także równe i równoległe, i figura $ABCD$ będzie równoległobokiem.

Niech będzie przekątna BD ; ponieważ AB jest równoległe do CD , przeto kąty naprzemianległe ABD i BDC , są

sobie równe (pod. 24), nadto bok $AB = DC$, i bok DB jest wspólny, więc trójkąt ABD jest równy trójkątowi DBC (pod. 6); a zatem bok $AD = BC$, kąt $ADB = DBC$, i następnie bok AD jest równoległy do BC ; przeto czworokąt $ABCD$ jest równoległobokiem.

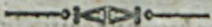
PODANIE XXXI.

Twierdzenie.

Dwie przekątne AC , BD (fig. 45) równoległoboku, przecinając się, dzielą się wzajemnie na dwie części równe.

Gdyż dwa trójkąty ADO i COB , mając bok $AD = CB$, kąt $ADO = CBO$ (pod. 24) i kąt $DAO = OCB$, są sobie równe (pod. 7); a ztąd wynika, że bok AO , leżący naprzeciw kąta ADO , jest równy bokowi OC , leżącemu naprzeciw kąta OBC , i bok $DO = OB$.

Uwaga. W przypadku kwadratu ukośnego, ponieważ boki AB, BC są sobie równe, przeto trójkąty AOB, OBC mają po trzy boki odpowiednio równe, a tém samym są sobie równe, zkad wynika że kąt $\text{AOB} = \text{BOC}$; a tém samym w kwadracie ukośnym przekątne są prostopadłe do siebie.



KSIĘGA DRUGA.

O KOLE I MIERZENIU KATÓW.



Opisanie.

1. **Okrąg kola** jest linia krzywa, której punkta są równo oddalone od punktu znajdującego się wewnątrz jęj, który się nazywa **środkiem** (fig. 46).

Kolem nazywa się płaszczyzna zamknięta przez tę linię krzywą.

NB. Mówią niekiedy *kolo* zamiast *okrąg kola*, lecz nie trudno przywrócić ściśłość temu wyrażeniu, pamiętając, że *kolo* jest powierzchnią, mającą długość i szerokość, a *okrąg* jest tylko linią.

2. Wszelka linia prosta CA, CE, CD i t. d. poprowadzona od środka do okręgu koła, nazywa się *promieniem*; wszelka zaś linia prosta AB, przechodząca przez środek i kończąca się z obu stron na okręgu koła, nazywa się *średnicą*.

Podług opisu koła, wszystkie promienie jego są sobie równe, i wszystkie średnice także są sobie równe i dwa razy większe od promienia.

3. Część okręgu koła FHG nazywa się *łukiem*.

Cięciwą jest linia prosta FG, łącząca oba końce łuku.

4. *Odcinkiem* jest płaszczyzna, czyli część koła, zawarta pomiędzy łukiem i cięciwą.

NB. Jednej i tej samej cięciwie FG odpowiadają dwa łuki FHG i FEG, a tém samym i dwa odcinki; lecz zawsze, jeżeli nie ma wzmianki o większym, nale-

ży domyslać się że rzecz idzie o ten, który jest mniejszy.

5. *Wycinek* jest część koła, zawarta pomiędzy łukiem DE i dwoma promieniami CD i CE, przechodzącymi przez końce tegoż łuku.

6. Linia mająca oba końce na okręgu nazywa się *wpisaną w koło* (fig. 47).

Kątem wpisanym nazywa się kąt BAC, utworzony przez dwie cięciwy, mający swój wierzchołek na okręgu.

Trójkątem wpisanym nazywa się trójkąt BAC, którego wszystkie trzy kąty mają swoje wierzchołki na okręgu.

I w ogólności *wielokątem wpisanym*, nazywa się wielokąt, którego wszystkie kąty mają swoje wierzchołki na okręgu; w tym przypadku mówi się także że *koło jest opisane* na wielokącie.

7. *Sieczną* nazywa się linia prosta, która przecina okrąg w dwóch punktach, np. linia AB (fig. 48).

8. *Styczna* jest linia prosta, mająca tylko jeden punkt wspólny z okręgiem koła; taką jest linia CD.

Punkt M, wspólny dla stycznej i okręgu koła, nazywa się *punktem zetknięcia*.

9. Dwa okręgi kół, mające jeden tylko punkt wspólny, nazywają się *stycznymi*.

10. *Wielokąt opisany na kole* jest wielokąt, którego wszystkie boki są stycznymi do okręgu; w tym przypadku mówi się także że *koło jest wpisane w wielokąt*.

PODANIE I.

Twierdzenie.

Wszelka średnica (fig. 49) AB *dzieli koło i jego okrąg na dwie części równe*.

Jeżeli bowiem przyłożymy figurę AEB do AFB, pozostawiając podstawę AB wspólną, linia krzywa AEB przystanie do AFB; gdyż inaczej punkta na jednej z nich, lub na drugiej nie byłyby jednakowo oddalone od środka, co by się sprzeciwiało opisowi koła.

PODANIE II.

Twierdzenie.

Cięciwa jest zawsze mniejsza od średnicy (fig. 49).

Jeżeli bowiem przez końce cięciwy (fig. 49) AD poprowadzimy promienie AC i CD, będzie linia prosta $AD < AC + CD$, albo $AD < AB$.

Wniosek. Średnica jest największa ze wszystkich linii, które można wpisać w koło.

PODANIE III.

Twierdzenie.

Linia prosta tylko w dwóch punktach może przeciąć okrąg koła.

Jeżeliby z przecięcia się linii prostej z okręgiem koła powstawały trzy punkta, one znajdowałyby się w jednakowej odległości od środka; moglibyśmy zatem od jednego punktu do jednej linii prostej poprowadzić trzy linie proste równe, co bydź nie może (ks. I, pod. 16).

PODANIE IV.

Twierdzenie.

W kole lub w kołach równych, łuki równe są podparte przez cięciwy równe, i odwrotnie cięciwy równe podpierają łuki równe.

Jeżeli promień AC (fig. 50) jest równy promieniowi EO , i łuk AMD równy łukowi ENG ; powiadam że cięciwa AD , będzie równa cięciwie EG .

Ponieważ średnica AB jest równa średnicy EF , przeto można półkole $AMDB$ przyłożyć do półkola $ENGF$ tak, że linia krzywa $AMDB$ przystanie do linii krzywej $ENGF$. Lecz przypuszczamy że część AMD jest równa części ENG ; przeto punkt D padnie na punkt G , a tém samym cięciwa AD jest równa cięciwie EG .

Odwrotnie, przypuściwszy że promień $AC=EO$, i cięciwa $AD=EG$, łuk AMD ma bydź równy łukowi ENG .

Poprowadziwszy promienie CD, OG , dwa trójkąty ACD, EOG , mieć będą po trzy boki odpowiednio równe, a mianowicie $AC=EO$, $CD=OG$ i $AD=EG$; przeto te dwa trójkąty będą so-

bie równe (pod. 11 ks. I), a zatem kąt $ACD = EOG$. Lecz przeniósłszy półkole ADB na jemu równe EGF , ponieważ kąt $ACD = EOG$, promień CD padnie na promień OG i punkt D na G ; a zatem łuk AMD jest równy łukowi ENG .

PODANIE V.

Twierdzenie.

W kole lub w dwóch kołach równych, cięciwa większa podpira łuk większy, i odwrotnie; lecz łuki mają być zawsze mniejsze od półokręgu koła.

Niech będzie (fig. 50) łuk AH większy od łuku AD , poprowadźmy cięciwy AD , AH i promienie CD , CH ; dwa boki AC i CH trójkąta ACH są równe bokom AC i CD trójkąta ACD , lecz kąt ACH jest większy od kąta ACD , prze-

to (pod. 10 ks. I) bok trzeci AH jest większy od boku trzeciego AD ; więc cięciwa większa podpira łuk większy.

Odwrotnie, założwszy że cięciwa AH jest większa od AD , można będzie wnieść z tych samych trójkątów, że kąt ACH jest większy od kąta ACD , i że tém samym łuk AH jest większy od AD .

Uwaga. Zakładamy że łuki, o których mowa, są mniejsze od półokręgu koła; jeżeliby zaś łuki były większe od półokręgu koła natenczas miałyby miejsce własność odwrotna, to jest, że w miarę powiększania się łuku, cięciwa się zmniejsza i odwrotnie: tak że jeżeli łuk $AKBD$ jest większy od $AKBH$, cięciwa AD pierwszego łuku jest mniejsza od AH cięciwy drugiego łuku.

PODANIE VI.

Twierdzenie.

Promień (fig. 51) CG prostopadły do cięciwy AB, dzieli tę cięciwę i łuk przez nią podparty AGB na dwie części równe.

1) Promienie CA i CB, względem prostopadłej CD, są dwie pochyłe równe, przeto odległości ich od prostopadłej są sobie równe (pod. 16 ks. I), t. j. $AD = DB$; a zatem cięciwa AB jest podzielona w punkcie D na dwie części równe.

2) Ponieważ $AD = DB$, przeto CG jest prostopadła do linii AB, wystawiona z jej środka, więc (pod. 17 ks. I) wszelki punkt na prostopadłej CG jest równo oddalony od końców A i B linii AB. Ponieważ zaś punkt G jest jednym z punktów prostopadłej, przeto odle-

głości jego AG i GB od końców linii AB są sobie równe. Jeżeli zaś cięciwa AG jest równa cięciwie GB i łuk AG będzie równy łukowi GB (pod. 4); więc promień CG, prostopadły do cięciwy AB, dzieli łuk do niej należący w punkcie G na dwie części równe.

Uwaga. Środek koła C, środek D cięciwy AB i środek G łuku, podpartego przez tę cięciwę, leżą na jednej linii prostej; ponieważ zaś dla oznaczenia linii prostej dość jest mieć dwa punkta, przeto wszelka linia poprowadzona przez którekolwiek dwa punkta z trzech wymienionych, przejdzie i przez trzeci i będzie prostopadła do cięciwy.

Ztąd wynika także że *prostopadła do cięciwy, ze środka jej wyprowadzona, przechodzi przez środek koła i środek łuku podpartego przez cięciwę.* Gdyż ta prostopadła stanowi jedno z prostopadłą spuszczoną ze środka koła na

cięciwą; bo obie przechodzą przez środek cięciwy.

PODANIE VII.

Twierdzenie.

Przez trzy punkta (fig. 52) A, B, C nie na linii prostej leżące, zawsze można poprowadzić okrąg koła, lecz nie więcej jak tylko jeden.

Podzieliwszy na dwie części równe każdą z linii prostych AB i BC, łączących punkt B z punktami A i C, i z punktów podziałów wystawiwszy do nich linie prostopadłe DE i FG, powiadam że linie prostopadłe przetną się z sobą w jakimkolwiek punkcie O.

Dwie linie DE i FG przetną się z sobą jeżeli nie są równoległe; przypuściwszy że one są równoległe, wówczas linia AB, prostopadła do DE, by-

łaby prostopadła i do FG (pod. 24 ks. I), i kąt $\widehat{K}$ byłby prosty; lecz ponieważ przedłużenie BK linii BD jest linią różną od BF, bo trzy punkta A, B i C nie są na jednej linii prostej, przeto można by było z jednego punktu spuścić dwie prostopadłe do jednej linii prostej, co być nie może (pod. 15 ks. I); a zatem dwie prostopadłe DE, FG zawsze przetną się z sobą w jakimkolwiek punkcie O.

Punkt zaś O, leżąc na linii DE, prostopadłej do AB i wyprowadzonej z jej środka, znajduje się w jednakowej odległości od punktów A i B (pod. 17 ks. I); tenże punkt O, leżąc na FG prostopadłej do BC, jest jednakowo oddalony od punktów B i C; więc trzy linie proste OA, OB, OC są sobie równe, przeto okrąg koła opisany ze środka O promieniem OB, przejdzie przez trzy punkta dane A, B i C.

Dowodzono więc że przez trzy punkta, nie leżące na jednej linii prostej, zawsze można poprowadzić okrąg koła; pozostaje jeszcze okazać, że tylko jeden okrąg koła może przez nie przechodzić. Jeżeliby można było przez trzy punkta dane A, B, C poprowadzić inny okrąg koła, wówczas środek jego musiałby się znajdować na linii DE, gdyż inaczej on byłby nierówno oddalony od A i B (pod. 17 ks. I); dla podobnej przyczyny on znalazłby się na linii FG; przeto środek byłby i na linii DE i na FG; ponieważ zaś dwie linie proste przecinają się z sobą tylko w jednym punkcie, więc środkiem nowego okręgu koła byłby punkt O; a zatem przez trzy punkta dane nie na linii prostej, można poprowadzić tylko jeden okrąg koła.

Wniosek. Z przecięcia się dwóch okręgów kół pomiędzy sobą nie może

wyniknąć więcej nad dwa punkta; gdyż jeżeliby one miały trzy punkta wspólne, natenczas miałyby wspólny środek i stanowiłyby jeden okrąg koła.

PODANIE VIII.

Twierdzenie.

Dwie cięciwy równe są równo oddalone od środka koła; z dwóch zaś cięciw nierównych mniejsza jest bardziej oddalona od środka koła.

1) Niech będzie cięciwa (fig. 53) $AB = DE$; prostopadłymi CF i CG, puszczo-nymi na nie ze środka koła, podzielmy je na dwie równe części i poprowadźmy promienie CA i CD.

Trójkąty prostokątne CAF i DCG mają przeciwprostokątne CA i CD równe, nadto bok AF, będący połową AB, jest równy bokowi DG, który jest

półową cięciwy DE; więc pomienione dwa trójkąty są sobie równe (pod. 18 ks. I), a tém samym bok trzeci CF jest równy bokowi trzeciemu CG; przeto dwie cięciwy równe AB, DE, są równo oddalone od środka koła.

2) Niech będzie cięciwa AH większa od DE, łuk AKH będzie większy od łuku DME (pod. 5); na łuku AKH odciawszy część $ANB = DME$, poprowadźmy cięciwę AB, i spuśćmy CF prostopadłą na tę cięciwę i CJ prostopadłą do AH; linia CF, jest dłuższa od CO, i CO większe od CJ (pod. 16 ks. I), więc tém bardziej $CF > CJ$. Lecz $CF = CG$, bo cięciwy AB, DE są sobie równe, więc także $CG > CJ$; przeto z dwóch cięciw nierównych mniejsza jest bardziej oddalona od środka koła.

PODANIE IX.

Twierdzenie.

Prostopadła BD (fig. 54) do promienia CA, z końca jego wyprowadzona, jest styczną z okręgiem koła.

Wszelka pochyła CE jest dłuższa od prostopadłej CA (pod. 16 ks. I), a zatem punkt E znajduje się zewnątrz koła; więc linia BD ma tylko jeden punkt A wspólny z okręgiem koła, a tém samym jest (opis 8) styczną do niego.

Uwaga. Przez punkt A dany na okręgu koła tylko jedną styczną można poprowadzić; jeżeliby bowiem można było poprowadzić drugą, ta nie byłaby prostopadłą do promienia CA, i promień byłby względem niej linią pochyłą; przeto prostopadła, spuszczone ze środka na nową styczną, byłaby

krótsza od promienia AC, a tém samém druga styczna przecięłaby okrag koła i byłaby sieczną.

PODANIE X.

Twierdzenie.

Łuki (fig. 55) MN i PQ, odcięte na okręgu koła przez dwie linie równoległe AB i DE, są sobie równe.

Mogą się zdarzyć trzy przypadki:

1) Jeżeli dwie linie równoległe są sieczne; natenczas poprowadziwszy promień CH prostopadły do cięciwy MP, on będzie prostopadły i do cięciwy NG, równoległej do MP (ks. I, pod: 24 wn. I); a zatem punkt H będzie środkiem łuków MHP i NHQ (pod. 6); więc mamy łuk $MH = HP$ i łuk $NH = HQ$, zkład wypada $MH - NH = HP - HQ$, czyli $MN = PQ$.

2) Gdy jedna z dwóch linii równoległych (fig. 56) AB jest sieczną, a druga DE styczną; natenczas promień CH, poprowadzony przez punkt H zetknięcia się stycznej DE z okręgiem koła, będzie prostopadły (pod. 9) do stycznej i do cięciwy z nią równoległej MP. Ponieważ promień jest prostopadły do cięciwy MP, przeto punkt H jest środkiem łuku MHP, a tém samém łuki MH i HP, odcięte przez linie równoległe AB i DE, są sobie równe.

3) Nakoniec kiedy obie linie równoległe DE i JL są styczne, jedna w punkcie H, a druga w K, poprowadziwszy sieczną AB równoległą do nich, podług tego co dowiedziono, otrzymamy, $MH = HP$ i $MK = KP$; przeto $MH + MK = HP + KP$, czyli $HMK = HPK$. Nadto widzimy, że każdy z tych łuków jest półokręgiem koła.

PODANIE XI.

Twierdzenie.

Linia prosta, łącząca środki dwóch okręgów kół przecinających się z sobą, jest prostopadła do cięciwy, łączącej dwa punkta wynikłe z przecięcia, i dzieli ją na dwie części równe.

Gdyż linia (fig. 57 i 58) AB, łącząca punkta przecięcia, jest cięciwą wspólną dla obu kół, przeto linia prostopadła, wystawiona z jej środka, musi przejść przez środki C i D tychże kół (pod. 6 uw.). Lecz między dwoma punktami można poprowadzić tylko jedną linię prostą, więc linia prosta, przechodząca przez środki, jest prostopadła do cięciwy wspólnej i dzieli ją na dwie części równe.

PODANIE XII.

Twierdzenie.

Jeżeli odległość środków dwóch kół jest mniejsza od summy ich promieni, a promień większy jest mniejszy od summy promienia mniejszego i odległości środków, natenczas dwa koła przetną się z sobą.

Widocznie że, aby okręgi dwóch kół przecięły się z sobą, powinien mieć miejsce trójkąt CAD (fig. 57 i 58), a zatem potrzeba aby było $CD < AC + AD$, i aby promień większy $AD < AC + CD$. Przeto skoro można narysować trójkąt CAD, okręgi dwóch kół, opisane ze środków C i D, przetną się z sobą w jakichkolwiek punktach A i B.

PODANIE XIII.

Twierdzenie.

Jeżeli odległość CD (fig. 59) środków dwóch kół jest równa summie ich promieni CA i CD, koła będą względem siebie stycznymi zewnętrznymi.

Koła takie widocznie nie będą miały żadnego punktu wspólnego prócz A; bo aby miały drugi punkt wspólny, potrzeba aby odległość ich środków była mniejsza od summy promieni.

PODANIE XIV.

Twierdzenie.

Jeżeli odległość CD (fig. 60) środków dwóch kół jest równa różnicy ich promieni DA i AC, koła będą stycznymi wewnętrznymi.

Widoczną jest rzeczą, że koła takie nie będą miały żadnego punktu wspólnego prócz A; bo aby miały drugi punkt wspólny, potrzeba żeby promień większy AD był mniejszy od summy promienia mniejszego CA i odległości środków CD (pod. 12), co miejsca nie ma.

Wniosek. Przeto jeżeli dwa koła są styczne do siebie, bądź to zewnętrznymi bądź wewnętrznymi, środki ich i punkt zetknięcia leżą na jednej linii prostej.

Uwaga. Wszystkie koła, mające środki swoje na linii prostej CD (fig. 59 i 60), i przechodzące przez punkt A, są styczne do siebie, to jest: mają jeden tylko punkt wspólny A. Linia AE prostopadła do CD, wyprowadzona z punktu A, będzie styczną do kół wszystkich.

Przypuśćmy że kąty ACB i DCE mają się do siebie jak dwie liczby 7 i 4; albo, co jest to samo, załóżmy że kąt M , będący ich wspólną miarą, mieści się w kącie ACB razy 7, a w kącie DCE razy 4. Ponieważ kąty cząstkowe ACm , mCn , nCp i t. d., DCx , xCy i t. d. są sobie równe, przeto i łuki cząstkowe Am , mn , np i t. p., Dx , xy , i t. d. także są sobie równe (pod. 15); a zatem łuk AB tak się ma do DE jak 7 do 4. Widoczną jest rzeczą, że rozumowanie będzie toż samo, jeżeli na miejsce liczb 7 i 4 podstawimy jakiekolwiek inne liczby; przeto, jeżeli stosunek kątów ACB , i DCE może być wyrażony w liczbach całkowitych, łuki AB i DE mieć się będą do siebie, jak kąty ACB , DCE .

Uwaga. Odwrotnie, jeżeli łuki AB , DE mają się do siebie jak liczby całe, i kąty ACB i DCE mieć się będą do

siebie jak też same liczby, i zawsze będzie $ACB : DCE = AB : DE$; gdyż jeżeli łuki cząstkowe Am , mn , i t. d., Dx , xy , i t. d. będą sobie równe, i kąty cząstkowe ACm , mCn , i t. d., DCx , xCy , i t. d. także będą sobie równe.

PODANIE XVII.

Twierdzenie.

Dwa kąty ACB i ACD (fig. 63), mające się do siebie w jakimkolwiek stosunku, zawsze mieć się będą do siebie jak łuki AB , AD , zawarte między ich ramionami, i opisane z ich wierzchołków, jako ze środków jednakowemi promieniami.

Przypuśćmy że kąt mniejszy jest położony na większym. Jeżeli twierdzenie nie jest prawdziwe, kąt ACB tak się ma do

kąta ACD jak łuk AB do łuku większego lub mniejszego od AD, przypuśćmy do łuku większego AO, to jest:
 $\text{Kąt } ACB : \text{kąta } ACD = \text{łuk } AB : \text{łuku } AO.$

Wyobraźmy sobie że łuk AB podzielono na ilekolwiek części równych, z których każda jest mniejsza od DO, w takim razie przynajmniej jeden punkt podziału padnie między punktami D i O, niech tym punktem będzie J; poprowadziwszy CJ, łuki AB i AJ będą się miały do siebie jak liczby całe, a zatem podług twierdzenia poprzedzającego będzie:

$$\text{Kąt } ACB : \text{kąta } ACJ = \text{łuk } AB : \text{łuku } AJ.$$

Ponieważ w tych dwóch proporcjach poprzedniki są sobie równe, przeto następniki stanowią proporcję:

$$\text{Kąt } ACD : \text{kąta } ACJ = \text{łuk } AO : \text{łuku } AJ.$$

Ponieważ łuk AO jest większy od łuku AJ przeto aby ta proporcja mogła mieć miejsce, a tém samém

aby przypuszczenie było prawdziwe, potrzeba żeby kąt ACD był większy od kąta ACJ; lecz kąt ACD jest mniejszy od ACJ, przeto byź nie może aby kąt ACB miał się do kąta ACD, jak się ma łuk AB do łuku większego od AD.

Drogą podobnego rozumowania można by okazać, że czwarty wyraz proporeyi, założonej w twierdzeniu, nie może byź mniejszy od AD; przeto może byź nim tylko AD, i tém samém mamy proporeyą:

$$\text{Kąt } ACB : \text{kąta } ACD = \text{łuk } AB : \text{łuku } AD.$$

Wniosek. Ponieważ kąt mający swój wierzchołek w środku koła i łuk tegoż koła, zawarty pomiędzy ramionami kąta, mają tak ściśle z sobą związek, że w miarę powiększania lub zmniejszania się jednego z nich w jakimkolwiek stosunku, i drugi w tym że samym stosunku powiększa się lub zmniejsza;

przeło jedną z tych wielkości można wziąć za miarę drugieję, i tak za miarę kąta ACB zawsze brać będziemy łuk AB . Lecz uważać należy aby łuki brane za miary kątów, porównywanych pomiędzy sobą, były opisane promieniami równemi; cośmy w samej rzeczy zakładali we wszystkich wyżej przytoczonych twierdzeniach.

Uwaga. Zdaje się, że właściwiej byłoby mierzyć wielkości, wielkościami jednakowego z niemi rodzaju, i podług téj zasady wypadaloby odnosić wszystkie kąty do kąta prostego: i tak, wzięwszy kąt prosty za jedność mierzenia kątów, wszelki kąt ostry wyrazi się liczbą zawartą między 0 i 1, a wszelki kąt rozwarty liczbą zawartą między 1 i 2. Lecz ten sposób wyrażania kątów w użyciu nie jest najdogodniejszym i znaleziono że daleko prościej wyrażać kąty łukami koła; gdyż

łatwo nakreślić łuk równy łukowi danemu i dla wielu innych przyczyn. Zresztą, chociaż droga mierzenia kątów łukami nie zdaje się być w pewnym względzie prostą, jednak łatwo jest przejść od téj miary, do miary kątów prostéj i bezwzględnej; gdyż z porównania łuku, mierzącego kąt dany, z czwartą częścią okręgu koła, otrzymamy stosunek tegoż kąta do kąta prostego, a to jest miarą kąta bezwzględną.

Uwaga 2. Wszystko co dowiedziono w trzech ostatnich podaniach o stosunkach kątów do łuków, stosuje się i do wycinków porównywanych z łukami; gdyż wycinki są sobie równe, kiedy ich kąty są sobie równe, i w ogólności one są proporcjonalne kątom; przeto *dwa wycinki* ACB i ACD (fig. 63), *jednego koła lub dwóch kół równych, mają się do siebie jak łuki* AB i AD , *będące ich podstawami.*

Ztąd widzimy że łuki koła, które służą za miarę kątów, mogą także być użyte do mierzenia wycinków jednego koła lub kół równych.

PODANIE XVIII.

Twierdzenie.

Miarą kąta wpisanego BAD (fig. 64 i 65) jest półowa łuku BD, zawartego między jego ramionami.

Przypuśćmy na 1^o że środek koła znajduje się między ramionami kąta BAD (fig. 64); poprowadźmy średnicę AE i promienie CB i CD. Kąt BCE, będąc zewnętrznym względem trójkąta ABC, jest równy summie jego kątów wewnętrznych CAB i ABC (pod. 19 wn. 6 ks. I); ponieważ zaś trójkąt BAC jest równoramienny, przeto kąt $CAB = ABC$, i tym samym kąt BCE jest dwa razy

wiekszy od kąta BAC. Kąt BCE, którego wierzchołek jest w środku, ma za miarę łuk BE, przeto miarą kąta BAC jest półowa łuku BE. Droga takiego samego rozumowania znajdziemy, że miarą kąta CAD jest półowa łuku ED; a zatem summa kątów BAC i CAD, czyli kąt BAD ma za miarę półową summy łuków BE i ED, czyli półową łuku BD.

Przypuśćmy po 2^o, że środek koła C (fig. 65) znajduje się zewnątrz kąta BAD; poprowadziwszy średnicę AE, miarą kąta BAE będzie półowa łuku BE, i miarą kąta DAE pół łuku DE; a zatem miarą różnicy tych dwóch kątów, t. j. kąta BAD, będzie półowa łuku BE zmniejszona półową łuku DE, czyli pół łuku BD.

Więc miarą wszelkiego kąta wpisanego w koło jest półowa łuku, zawartego między jego ramionami.

Wniosek I. Wszystkie kąty BAC, BDC i t. d. (fig. 66), wpisane w jeden odcinek są sobie równe; gdyż wspólną ich miarą jest połowa łuku BOC.

II. Wszelki kąt BAD (fig. 67), wpisany wpółkole jest prosty; gdyż miarą jego jest połowa półokręgu BOD, t. j. czwarta część okręgu koła.

Aby to dowieść innym sposobem, poprowadźmy promień AC; trójkąt BAC jest równoramienny, przeto kąt $BAC = ABC$; trójkąt CAD także równoramienny, a zatem kąt $CAD = ADC$, więc $BAC + CAD$, czyli $BAD = ABD + ADB$. Lecz jeżeli w trójkącie summa dwóch kątów B i D jest równa trzeciemu BAD, a summa wszystkich trzech kątów czyni dwa kąty proste, kąt BAD jest kątem prostym.

III. Wszelki kąt BAC (fig. 66) wpisany w odcinek większy od półkola, jest

ostry; gdyż ma za miarę połowę łuku BOC mniejszego od półokręgu.

I każdy kąt BOC, wpisany w odcinek mniejszy od półkola, jest rozwarty, bo ma za miarę połowę łuku BAC większego od półokręgu.

IV. Wczworokącie wpisanym ABCD (fig. 68) dwa kąty przeciwległe A i C, razem wzięte, stanowią dwa kąty proste; gdyż kąt BAD ma za miarę pół łuku BCD, i miarą kąta BCD jest pół łuku BAD; więc miarą summy kątów BAD i BCD jest pół okręgu, a zatem oba stanowią dwa kąty proste.

PODANIE XIX.

Twierdzenie.

Miarą kąta BAC (fig. 69) zawartego między cięciwą i styczną, przechodzącą przez którykolwiek koniec cięciwy,

jest połowa łuku AMDC podpartego przez cięciwę.

Przez punkt A zetknięcia stycznėj z okręgiem poprowadźmy średnicę AD, kąt BAD jest prosty (pod. 9), i ma za miarę połowę półokręgu AMD, miarą zaś kąta DAC jest połowa łuku DC (pod. 18); przeto miarą $BAD + DAC$, t. j. kąta BAC jest połowa łuku AMD więcój połową łuku DC, czyli połowa całego łuku AMDC.

Podobnie można dowieść, że miarą kąta CAE jest połowa łuku AC.

ZAGADNIENIA,

KTÓRYCH ROZWIĄZANIE POLEGA NA WIA-
DOMOŚCIACH OBJĘTYCH W DWÓCH
PIÉRSZYCH KSIĘGACH.



ZAGADNIENIE I.

*Daną linię prostą AB (fig. 70) po-
dzielić na dwie części równe.*

Z końców A i B, jako ze środków, promieniami równemi, lecz większemi od połowy AB, opiszmy łuki, które przetną się z sobą w punkcie D, a punkt D będzie się znajdował w jednakowej odległości od A i B; takim samym spo-

sobem poniżej linii AB oznaczmy punkt E, równo oddalony od jej końców, i połączmy punkt D z E linią prostą DE; i powiadam, że linia AB będzie podzielona na dwie części równe w punkcie C, który wynika z przecięcia się linii DE z AB.

Ponieważ punkta D i E są równo oddalone od końców linii AB, przeto one winny się znajdować na linii prostopadłej do AB, z jej środka wystawionej; że zaś pomiędzy dwoma punktami można poprowadzić tylko jedną linię prostą, więc linia DE jest prostopadła do AB i dzieli ją na dwie części równe.

ZAGADNIENIE II.

Z punktu A (fig. 71), danego na linii AB, wystawić prostopadłą do tejże linii.

Obierzmy na danej linii punkta B i C równo oddalone od A, i z tych punktów, jako ze środków, promieniami równymi, lecz większemi od BA, zakresłmy łuki, które się przetną w D, a linia DA, łącząca D z A, będzie żadaną prostopadłą.

Punkt D, będąc równo oddalony od B i C, leży na linii prostopadłej do BC wyprowadzonej z jej środka; a zatem AD jest prostopadłą żadaną.

Uwaga. To samo wykreślenie służy do narysowania kąta prostego BAD, przy punkcie A na linii danej BC.

ZAGADNIENIE III.

Z punktu A (fig. 72), danego nad linią BD, spuścić prostopadłą do tejże linii.

Z punktu A, jako ze środka, opiszmy promieniem dostatecznie wielkim łuk, któryby przeciął linię BD w dwóch

punktach B i D; następnie oznaczmy punkt E, równo oddalony od B i D, a linia AE, łącząca punkta A i E będzie żadaną prostopadłą.

Linia AE dla tego jest prostopadła do BD, że dwa punkta A i E, na niej leżące, są równo oddalone od końców linii BD.

ZAGADNIENIE IV.

Przy punkcie A (fig. 73), na linii AB nakreślić kąt, równy kątowi danemu K.

Z wierzchołka kąta K, jako ze środka, upodobanym promieniem KJ, opiszmy łuk JL, kończący się na ramionach kąta; z punktu A takim samym promieniem opiszmy łuk nieograniczony BO; z punktu B, jako ze środka, promieniem równym cięciwie LJ opiszmy łuk, któryby się przeciął z łukiem nieograniczonym BO w punkcie

D, a połączwszy D z A linią prostą AD, otrzymamy kąt DAB równy kątowi danemu K. Gdyż dwa łuki BD i LJ, jako opisane promieniami równymi i podparte przez cięciwy równe, są sobie równe (pod. 4 ks. II), a tém samém kąt BAD = JKL.

ZAGADNIENIE V.

Podzielić kąt, lub łuk dany na dwie części równe.

1) Aby łuk dany AB (fig. 74) podzielić na dwie części równe, zakreślmy z punktów A i B, jako ze środków, promieniami równymi dwa łuki, któreby się przecięły w D; przez D i środek koła C poprowadźmy linię prostą CD, a ta podzieli łuk AB na dwie części równe.

Każdy z dwóch punktów C i D jest równo oddalony od końców A i B cię-

ciwy AB, przeto linia CD jest prostopadła do téj cięciwy i przechodzi przez jęj środek; ponieważ linia CD, jest to samo co promień prostopadły do cięciwy AB (pod. 6 ks. II), przeto ona dzieli łuk AB w punkcie E na dwie części równe.

2) Aby podzielić kąt ACB na dwie części równe, potrzeba z wierzchołka jego C, jako ze środka, opisać jakimkolwiek promieniem łuk AB, i postępując dalej jak wyżej, znajdziemy linię CD, która podzieli kąt ACB na dwie części równe.

Uwaga. Zapomocą takiego samego wykreślenia, można każdą półkę AE i EB podzielić na dwie części równe, i postępując dalej można będzie łuk lub kąt dany podzielić na 4, 8, 16, 32 i t. d. części równych.

ZAGADNIENIE VI.

Przez punkt dany A (fig. 75) poprowadzić linię równoległą do linii danej BC.

Z punktu A, jako ze środka, promieniem dostatecznie wielkim opiszmy łuk nieograniczony EO; z punktu E, jako ze środka, opiszmy takim samym promieniem łuk AF, weźmy $ED = AF$, a linia AD, łącząca punkt A z D, będzie żądana równoległa.

Połączwszy punkt A z E linią prostą AE, będą kąty naprzemianległe AEF i EAD sobie równe; a zatem linie AD i EF są równoległe (pod. 24 ks. I).

ZAGADNIENIE VII.

Mając dane dwa kąty A i B (fig. 76) trójkąta, znaleźć kąt jego trzeci.

Poprowadziwszy linię nieograniczoną DEF, i nakreśliwszy przy E kąt $DEC=A$ i kąt $CEH=B$, pozostały kąt HEF będzie kątem szukany; gdyż te trzy kąty razem wzięte czynią sumę, równą dwóm kątom prostym.

ZAGADNIENIE VIII.

Mając wiadome dwa boki B i C (fig. 77) i kąt pomiędzy niemi zawarty A, nakreślić trójkąt.

Poprowadziwszy linię nieograniczoną DE, nakreśliwszy na niej, przy punkcie dowolnym D, kąt EDF równy kątowi danemu A, i wzięwszy $DG=B$ i $DH=C$, poprowadźmy GH, a otrzymamy trójkąt DGH żądany.

ZAGADNIENIE IX.

Nakreślić trójkąt, mając dany bok jego i dwa kąty.

Albo oba kąty dane będą przyległymi bokowi, albo jeden będzie przyległym a drugi naprzeciw niego leżącym; w drugim przypadku znalazłszy kąt trzeci (zag. 7), będą wiadome dwa kąty mające leżeć przy boku danym. To założywszy, poprowadźmy linię prostą DE (fig. 78) równą bokowi danemu, i na niej przy punkcie D nakreślmy kąt EDF równy jednemu, a przy punkcie E kąt DEG równy drugiemu kątowi mającemu leżeć przy DE; dwie linie DF i EG przetną się z sobą w punkcie H i dadzą trójkąt żądany DEH.

ZAGADNIENIE X.

Nakreślić trójkąt, mając wiadome trzy boki jego A, B i C (fig. 79).

Poprowadźmy $DE=A$; z punktu E, jako ze środka, promieniem, równym

bokowi drugiemu B, opiszmy łuk, z punktu D jako ze środka promieniem, równym bokowi trzeciemu C, opiszmy łuk, który przetnie się z tamtym w punkcie F; poprowadziwszy DF i EF, trójkąt DEF będzie żądany.

Uwaga. Jeżeliby jeden z danych boków był większym od summy dwóch innych, natenczas łuki nie przecięłyby się z sobą i zagadnienie byłoby niepodobne do rozwiązania; zawsze zaś można będzie rozwiązać to zagadnienie, jeżeli tylko summa dwóch którychkolwiek boków danych jest większa od trzeciego.

ZAGADNIENIE XI.

Nakręślić trójkąt, mając dane dwa boki A i B i kąt C przeciwległy bokowi B.

Mogą się zdarzyć dwa przypadki:

1) Jeżeli kąt C (fig. 80) jest prosty lub rozwarty, nakręślmy kąt EDF = C, odetnijmy $DE=A$ i z punktu E, jako ze środka, promieniem równym drugiemu bokowi B, opiszmy łuk, który się przetnie z linią DF w punkcie F; połączywszy F z E linią EF, otrzymamy trójkąt żądany DEF.

W tym przypadku potrzeba, aby bok B był większy od boku A; kąt bowiem C, jako prosty, lub rozwarty, jest największy pomiędzy kątami trójkąta, a zatem i bok jemu przeciwległy powinien być największy.

2) Jeżeli kąt C (fig. 81) jest ostry, a bok B jest większy od H, za pomocą podobnego wykreślenia, znajdziemy trójkąt DEF żądany.

Jeżeli zaś kąt C (fig. 82) jest ostry a bok B jest mniejszy od A, natenczas łuk opisany z punktu E, jako ze środka, promieniem $EF=B$, przetnie się z

linią DF w dwóch punktach F i G, położonych z jednej strony punktu D, a zatem otrzymamy dwa trójkąty DEF i DEG, które odpowiadają na zagadnienie.

Uwaga. Zagadnienie byłoby niepodobne do rozwiązania, jeżeliby bok B był mniejszy od prostopadłej spuszczonej z punktu E na linię DF.

ZAGADNIENIE XII.

Nakreślić równoległobok (fig. 83) mając wiadome dwa jego boki przy sobie leżące A i B i kąt C, przez nie utworzony.

Poprowadźmy linię $DE = A$, przy punkcie D nakreślmy kąt $FDE = C$, odetnijmy $DF = B$; opisawszy dwa łuki, jeden ze środka F promieniem $FG = DE$, a drugi ze środka E promieniem $EG = DF$, i punkt G, w którym te łuki

ki przetną się z sobą, połączyszy z F i E liniami FG i EG, otrzymamy równoległobok żądany DEFG. Gdyż według wykreślenia boki przeciwległe są sobie równe, przeto czworokąt jest równoległobokiem (pod. 30 ks. I); nadto w skład tego równoległoboku wchodzi boki i kąt dany.

Wniosek. Jeżeli kąt dany jest prosty, figura będzie prostokątem; jeżeli nadto boki dane są sobie równe, otrzymamy kwadrat.

ZAGADNIENIE XIII.

Znaleźć środek koła, lub łuku danego.

Obrawszy na okręgu trzy punkta dowolne A, B i C i połączyszy je liniami prostymi AB i BC, podzielmy każdą z nich na dwie części równe, i ze środków tych linii wystawmy do nich

prostopadłe DE i FG, które przetną się z sobą w punkcie szukanym O.

Uwaga. Toż samo wykreślenie służy do poprowadzenia przez dane trzy punkta A, B i C okręgu koła i do opisanania koła na danym trójkącie ABC.

ZAGADNIENIE XIV.

Przez punkt dany poprowadzić styczną do koła.

Jeżeli punkt dany A (fig. 85) jest na okręgu, poprowadźmy prostopadłą AD do promienia CA, a AD będzie styczną żadaną (pod. 9 ks. II).

Jeżeli punkt A (fig. 86) dany za okręgiem, połączmy go ze środkiem danego koła C linią prostą AC; podzielmy linię AC na dwie części równe w punkcie O, i z punktu O, jako ze środka, promieniem OC opiszmy okrąg, który z okręgiem danym przetnie

się w punkcie B; linia AB, łącząca punkt B z A, będzie styczną żadaną.

Gdyż kąt CBA, jako wpisany w półkole, jest prosty (pod. 18 ks. II), a zatem linia AB jest prostopadła do promienia i przechodzi przez jego koniec, a tém samym jest styczną z kołem.

Uwaga. Przez punkt A dany za kołem, zawsze można poprowadzić dwie styczne AB i AD równe sobie; bo trójkąty prostokątne CBA i CDA, mając przeciwprostokątną wspólną i bok CB = CD, są sobie równe (pod. 18 ks. I); przeto $AD = AB$ i kąt $CAD = CAB$.

ZAGADNIENIE XV.

W dany trójkąt ABC wpisać koło (fig. 87).

Podzielmy kąty A i B na dwie części równe liniami prostymi AO i BO, które się zejdą w punkcie O; z punktu

O spuścimy prostopadłe OD, OE, OF na boki trójkąta, powiadam że te trzy prostopadłe są sobie równe; gdyż po dług wykreślenia, kąt $DAO = OAF$ i kąt prosty $ADO = AFO$, przeto kąt trzeci $AOD = AOF$; więc dwa trójkąty AOD i AOF mając bok AO wspólny i po dwakąty, przyległe temu bokowi, odpowiednio równe, są sobie równe; a zatem $DO = OF$. Podobnie można okazać że trójkąty BOD i BOE są sobie równe, a tém samym że $OD = OE$; więc trzy prostopadłe OD, OE i OF są sobie równe.

Jeżeli więc z punktu O, jako ze środka, promieniem OD opiszemy okrąg koła, widocznie on będzie wpisany w trójkąt ABC; gdyż bok AB, będąc prostopadły do promienia i przechodząc przez koniec jego jest stycznym z okręgiem; toż samo ma miejsce z bokami BC i AC.

Uwaga. Trzy linie, dzielące kąty trójkąta na dwie części równe, schodzą się w jednym punkcie.

ZAGADNIENIE XVI.

Na danej linii prostej AB (fig. 88 i 89) opisać taki odcinek, aby każdy kąt w niego wpisany, był równy kątowi danemu C.

Przedłużmy AB ku D, i przy punkcie B nakreślmy kąt $DBE = C$, poprowadźmy linię BO prostopadłą do BE i ze środka linii AB wystawmy linię GO do niej prostopadłą, która z linią BO przetnie się w punkcie O; z punktu O, jako ze środka, promieniem OB opiszmy koło, a odcinkiem żądanym będzie AMB.

Ponieważ linia BF jest prostopadłą do promienia OB i przechodzi przez koniec jego, przeto jest styczną, a kąt

ABF ma za miarę półowę łuku AKB (pod. 19 ks. II); nadto kąt AMB, jako wpisany, ma także za miarę półowę łuku AKB, więc kąt $AMB = ABF = EBD = C$; przeto wszystkie kąty wpisane w odcinek AMB są równe kątowi danemu C.

Uwaga. Gdyby kąt dany był prosty, natenczas szukany odcinek byłby półkołem, opisaném na średnicy AB.

ZAGADNIENIE XVII.

Znaleść stosunek liczebny pomiędzy dwiema liniami prostymi AB i CD (fig. 90), mającemi wspólną miarę.

Przenieśmy linię CD na linię większą AB i przypuśćmy że w niej się mieści dwa razy z resztą BE.

Resztę BE przenieśmy na linię CD i przypuśćmy że mieści się w niej raz jeden z resztą DF.

Przenieśmy resztę drugą DF na pierwszą BE, i dajmy że się w niej mieści raz jeden z resztą BG.

Przenieśmy trzecią resztę BG na drugą DF tyle razy, ile razy się w niej mieści.

I tak dalej postępujemy dopóty, dopóki nie dojdziemy do reszty, która będzie się zupełnie mieściła pewną liczbę razy w reszcie poprzedzającej.

Ostatnia reszta będzie wspólną miarą linii danych, uważając zaś ją za jedność, łatwo znaleźć wartości (wyrażone w tej jedności) reszt poprzedzających i nakoniec linii danych, z kąd wyprowadzi się stosunek liczebny tychże linii.

Naprzykład, przypuściwszy że BG mieści się w FD razy dwa bez reszty, wspólną miarą linii danych będzie BG. Niech będzie $BG = 1$, przeto $FD = 2$; lecz $EB = FD + BG$, więc $EB = 3$; $CD =$

$EB + FD$, więc $CD = 5$; uakoniec AB mieści w sobie CD dwa razy i EB , więc $AB = 13$; przeto stosunek linii AB i CD jest równy stosunkowi liczb 13 i 5. Wziąwszy linię CD za jedność, linia AB byłaby $\frac{13}{5}$, a wziąwszy AB za jedność linia CD byłaby $\frac{5}{13}$.

Uwaga. Ten sposób wynajdywania wspólnej miary dwóch linii jest taki, jaki daje arytmetyka na znalezienie wspólnego dzielnika dwóch liczb; a tém samém on nie potrzebuje oddzielnego dowodzenia.

Może się zdarzyć że posunąwszy nadaléj działanie, nigdy nie dojdziemy do reszty, któraby się zupełnie mieściła w reszcie poprzedzającej. Natenczas dwie linie dane nie mają wspólnej miary i nazywają się *niewspółmiernemi*; przykład takich linii napotkamy później na przekątnej i boku kwadratu. W takim więc przypadku nie można znaleźć

ściśłego stosunku liczebnego; lecz niezważając na ostatnią resztę, znajdziemy stosunek mniej lub bardziej przybliżony, w miarę tego jak działanie mniej lub bardziej daleko posunęliśmy.

ZAGADNIENIE XVIII.

Mając dane dwa kąty A i B (fig. 91) znaleźć ich wspólną miarę, jeżeli one mają takową, i stąd stosunek ich w liczbach.

Promieniami równemi z wierzchołków kątów opiszmy łuki CD , EF , które mierzą kąty A i B ; z łukami CD i EF tak postępujemy, jak w zagadnieniu poprzedzającym postępowaliśmy z liniami prostemi; gdyż łuk jeden może być przeniesiony na łuk drugi jednakowego z nim promienia, podobnie jak linia prosta na drugą linię prostą. Takim sposobem dojdziemy do wspólnej miary łuków CD i

EF, jeżeli one mają takową, i do stosunku ich liczebnego; ten zaś stosunek jest stosunkiem pomiędzy kątami danymi (pod. 17 ks. II); jeżeli łuk DO jest wspólną miarą łuków CD i EF, kąt DAO będzie wspólną miarą kątów A i B.

Uwaga. Takim sposobem możnaby znaleźć wartość bezwzględną kąta, porównywając łuk, służący mu za miarę, z całym okręgiem koła; np. jeżeli łuk CD ma się do okręgu koła, jak się ma 3 do 25, kąt A będzie $\frac{3}{25}$ czterech kątów prostych, czyli $\frac{1}{25}$ kąta prostego.

Może się zdarzyć że łuki porównywane nie mają wspólnej miary; w takim przypadku otrzymamy stosunek liczebnny kątów mniej lub więcej przybliżony w miarę tego, jak daleko działanie posunięto.



KSIĘGA TRZECIA.

O PROPORCYONALNOŚCI FIGUR.

Opisania.

1. Figury, których powierzchnie są sobie równe nazywają się *równoważnemi*.

Dwie figury różne co do kształtu mogą być równoważne; np. koło może być równoważne z kwadratem, trójkątem, prostokątem i t. d.

Nazwisko figur równych będzie zachowane dla tych figur, które po przyłożeniu przystają do siebie we wszystkich punktach; takimi są: dwa koła

opisane równemi promieniami, dwa trójkąty mające po trzy boki odpowiednio równe i t. d.

2. Dwie figury mające kąty odpowiednio równe i boki *odpowiednie* proporcjonalne są sobie *podobne*. Bokami odpowiedniemi nazywają się boki jednakowo położone w obu figurach, albo boki leżące przy kątach równych. Takie zaś kąty nazywają się *kątami odpowiedniemi*.

Dwie figury równe zawsze są sobie podobne; lecz dwie figury podobne mogą być nierówne.

3. W dwóch kołach różnych, *łukami podobnemi*, *wycinkami podobnemi*, *odcinkami podobnemi* nazywają się łuki, wycinki, odcinki odpowiadające kątom równym, mającym swoje wierzchołki w środkach tychże kół.

I tak jeżeli kąt A (fig. 92) jest równy kątowi O, łuk BC będzie podobny łuko-

wi DE, wycinek ABC podobny wycinkowi ODE i t. d.

4. *Wysokością* równoległoboku jest prostopadła EF, mierząca odległość dwóch jego boków przeciwległych, wziętych za podstawy (fig. 93).

5) *Wysokością* trójkąta jest prostopadła AD (fig. 94), spuszczone z wierzchołka któregokolwiek kąta A na bok jemu przeciwległy BC, wzięty za podstawę.

6. *Wysokością* trapeza jest prostopadła EF (fig. 95); poprowadzona do dwóch jego boków AB i CD równoległych.

NB. Dla zrozumienia téj książki należy mieć obecną w pamięci teorią proporcij, po którą odsyłamy do zwyczajnych wykładów arytmetyki lub algebry. Zrobimy tylko uwagę, która jest ważna dla należytego rozumienia proporcij i dla ułatwienia pojęcia bądź to wyrażen, bądź dowodzeń.

Wiemy że w każdej proporcji $A : B = C : D$, iloczyn wyrazów skrajnych $A \times D$ jest równy iloczynowi wyrazów średnich $B \times C$.

Ta prawda jest niezaprzeczoną dla liczb; lecz taką jest i dla wielkości jakichkolwiek, byleby one były oznaczone liczbami, lub też byleby wyobrażano sobie że one są tak wyrażone, co zawsze można przypuścić. Jeżeli np. A, B, C, D są linie, można wyobrazić sobie że jedna z tych linii, albo też jaka piąta, będąca wspólną miarą wszystkich, jest wzięta za jedność; natenczas każda z linii A, B, C, D przedstawia pewną liczbę jedności całkowitą lub ułamkową, współmierną lub niewspółmierną, i proporcja między liniami A, B, C, D staje się proporcją między liczbami.

Iloczyn z linii A i D , który nazywa się także prostokątem z tych linii, oznacza liczbę jedności podłużnych zawartych w A , pomnożoną przez liczbę jedności podłużnych zawartych w D ; pojmujemy że ten iloczyn jest i powinien być równy iloczynowi wypadającemu z pomnożenia linii B i C przez siebie.

Dwie wielkości A i B mogą być jednego gatunku, np. liniami, a dwie drugie wielko-

ści C i D innego gatunku np. powierzchniami; natenczas należy uważać te wielkości jako liczby. A i B będą wyrażone w jednościach podłużnych, a C i D w jednościach powierzchni, i iloczyny $A \times D$ i $B \times C$ będą liczbami.

W ogólności we wszystkich działaniach, które odbywamy z proporcjami, należy uważać wyrazy proporcji za liczby, z których każdy ma być właściwego jemu gatunku; w takim razie nie będziemy mieli żadnej trudności w pojęciu działań i wypadków, jakie ztąd wynikają.

Winniśmy także uprzedzić że wiele dowodzeń, przez nas używanych, opiera się na niektórych prawdach najprostszych, wziętych z algebry, które znowu zasadzają się na pewnikach wiadomych: i tak, mając $A = B + C$, jeżeli każdą stronę pomnożymy przez M , będzie $A \times M = B \times M + C \times M$; podobnie jeżeli mamy $A = B + C$ i $D = E - C$, dodawszy te ilości do siebie i w summie drugą opuszczywszy $+ C$ i $- C$, które niszczą się wzajemnie, otrzymamy $A + D = B + E$ i t. d. Wszystko to jest samo przez się widoczne, lecz w razie trudności należy poradzić się

dział algebry i łączyć takim sposobem uczenie się dwóch nauk.

PODANIE I.

Twierdzenie.

Dwa równoległoboki, mające podstawy i wysokości równe, są sobie równoważne.

Niech będzie (fig. 96) AB podstawą wspólną dwóch równoległoboków ABCD i ABEF, które mając jednakową wysokość będą miały podstawy górne DC i EF na jednej linii równoległej do AB. Z własności równoległoboków mamy $AD = BC$ i $AF = BE$; dla tejże przyczyny jest $DC = AB$ i $FE = AB$, a tém samém $DC = FE$; więc odjąwszy od linii DE raz DC i drugi raz FE, otrzymamy reszty CE i DF równe sobie.

Ztąd wynika że trójkąty DAF i CBD są równoboczne, a tém samém równe sobie.

Jeżeli od czworokąta ABED odejmiemy trójkąt ADE, pozostanie równoległobok ABEF; odjąwszy zaś od tegoż czworokąta trójkąt CBE, pozostanie równoległobok ABCD; więc dwa równoległoboki ABCD i ABEF, mające podstawy i wysokości równe, są równoważne.

Wniosek. Równoległobok (fig. 97) ABCD jest równoważny prostokątowi ABEF, mającemu z nim jednakową podstawę i wysokość.

PODANIE II.

Twierdzenie.

Wszelki trójkąt ABC (fig. 98) jest półową równoległoboku ABCD, mającego z nim jednakową podstawę i wysokość.

Gdyż dwa trójkąty ABC i ACD są sobie równe (pod. 28 ks. I).

Wniosek I. Trójkąt ABC jest półową prostokąta BCEF, mającego z nim wspólną podstawę BC i wysokość AO; gdyż prostokąt BCEF jest równoważny z równoległobokiem ABCD.

II. Wszystkie trójkąty, mające podstawy i wysokości równe, są z sobą równoważne.

PODANIE III.

Twierdzenie.

Dwa prostokąty, mające równe wysokości, są do siebie w stosunku swoich podstaw.

Niech będą (fig. 99) ABCD i AEFD dwa prostokąty, mające wspólną wysokość AD, mówię, że one mieć się będą do siebie jak ich podstawy.

Przypuśćmy naprzód, że podstawy AB i AE są współmierne, i że mają

się do siebie w stosunku liczb 7 i 4; podzieliwszy AB na 7 części równych, AE będzie mieściła w sobie takich części 4; wyprowadziwszy z każdego punktu podziału prostopadłą do podstawy, pierwszy prostokąt zostanie podzielony na 7 prostokątów cząstkowych równych, a prostokąt drugi na 4 takich samych prostokątów cząstkowych; a zatem prostokąt ABCD tak się ma do prostokąta AEFD, jak 7 do 4, czyli jak AB do AE. Toż samo rozumowanie możnaby powtórzyć przy każdym innym stosunku podstaw; a tém samym, skoro podstawy są współmierne, będzie:

$$ABCD : AEFD = AB : AE.$$

Przypuśćmy po 2^o, że podstawy AB i AE (fig. 100) są niewspółmierne, mówię że będzie także:

$$ABCD : AEFD = AB : AE.$$

Jeżeli bowiem ta proporcya nie jest prawdziwa, trzy pierwsze jęj wyrazy mogą pozostać, lecz wyraz czwarty powinien być albo większy, albo mniejszy od AE. Przypuśćmy że powinien być większy, a w takim razie będzie:

$$ABCD : AEFD = AB : AO.$$

Podzielimy linię AB na części równe, mniejsze od EO, w takim razie przynajmniej jeden punkt podziału J przypadnie między E i O; z punktu J wyprowadźmy linię JK prostopadłą do AJ. Podstawy AB i AJ będą współmierne, a tém samém, podług tego co już dowiedziono, będzie:

$$ABCD : AJKD = AB : AJ,$$

lecz z przypuszczenia mamy,

$$ABCD : AEFD = AB : AO;$$

ponieważ poprzedniki w tych proporcjach są sobie równe, więc ich następni stanowią proporcję:

$$AJKD : AEFD = AJ : AO.$$

Ponieważ AO jest większe od AJ, więc, aby ta proporcya miała miejsce, potrzeba żeby prostokąt AEFD był większy od AJKD, że zaś on jest mniejszy, przeto proporcya przypuszczona nie może mieć miejsca; a tém samém nie może się mieć ABCD do AEFD, jak się ma AB do linii większej od AE.

Podobnież możnaby okazać że czwarty wyraz proporcji założonej nie może być mniejszy od AE; a tém samém on jest równy AE.

A zatém, jakikolwiek jest stosunek podstaw, dwa prostokąty ABCD i AEFD, mające jednakowe wysokości, mają się do siebie jak podstawy AB i AE:

PODANIE IV.

Twierdzenie.

Dwa prostokąty ABCD i AEGF jakikolwiek (fig. 101) mają się do siebie
12*

bie jak ich podstawy pomnożone przez wysokości; i będzie, $ABCD:AEFG=AB \times AD:AE \times AF$.

Postawiwszy te dwa prostokąty tak, aby kąty przy A były wierzchołkiem stykającemi się, przedłużmy boki GE i CD do spotkania się z sobą w H. Dwa prostokąty ABCD i AEHD, mając wspólną wysokość AD, mają się do siebie jak ich podstawy AB i AE; podobnie dwa prostokąty AEHD i AFGE, mając wspólną wysokość AE, mają się do siebie jak ich podstawy AD i AF, a zatem mamy:

$$ABCD:AEHD = AB:AE,$$

$$AEHD:AFGE = AD:AF.$$

Pomnożywszy przez siebie wyrazy odpowiednie tych proporcji i w otrzymanej proporcji opuściwszy czynnik AEHD, wspólny dla obu wyrazów pierwszego jęj stosunku, będzie:

$$ABCD:AFGE = AB \times AD:AE \times AF.$$

Uwaga. Według tego za miarę powierzchni prostokąta można wziąć iloczyn z jego podstawy przez wysokość; rozumiejąc przez to iloczyn z dwóch liczb, z których jedna jest liczbą jedności podłużnych zawartych w podstawie, a druga liczbą takich samych jedności zawartych w wysokości.

Ta miara nie jest bezwzględna, lecz stosunkowa; przypuszczamy bowiem że podobnie obliczono powierzchnię innego prostokąta, mierząc podstawę i wysokość jego, zapomocą takiej samęj jedności podłużnej; pomnożywszy przez siebie dwie liczby ztąd wypadłe, otrzymamy drugi iloczyn, a stosunek dwóch iloczynów jest równy stosunkowi prostokątów, stosownie do twierdzenia poprzednio dowiedzonego.

Naprzykład, jeżeli podstawa prostokąta A zawiera 3 jedności a wysokość 10, prostokąt wyrazi się iloczy-

nem 3×10 , t. j. liczbą 30; ta liczba oddzielnie uważana nie wyraża. Lecz powierzchnia drugiego prostokąta B, którego podstawa zawiera 12 i wysokość 7 jedności, wyrazi się przez 12×7 , czyli 84; ztąd wniesiemy, że prostokąty A i B mają się do siebie, jak 30 do 84; jeżeliby więc zgodzono się wziąć prostokąt A za jedność mierzenia powierzchni, natenczas bezwzględna miara powierzchni prostokąta B byłaby równa $\frac{84}{30}$, to jest: on zawierałby w sobie $\frac{84}{30}$ jedności miar powierzchni takich jak A.

Zwykle i to jest daleko prościej, biorą za jedność do mierzenia powierzchni kwadrat, którego bok jest równy jedności miary podłużnej; natenczas miara, którą uważaliśmy za stosunkową, staje się bezwzględną; np. liczba 30, zapomocą której mierzyliśmy prostokąt A, przedstawia 30 jedności miar powierz-

chni, albo 30 kwadratów, gdzie boki każdego jest jedność; fig. 102 przedstawia to najwidoczniej.

W geometryi często iloczyn dwóch linii biorą za prostokąt z tychże linii; to wyrażenie używa się nawet w arytmetyce dla oznaczenia iloczynu z dwóch liczb nierównych; podobnie używa się wyrazu *kwadrat*, dla oznaczenia iloczynu z liczby przez nią samą.

Kwadraty liczb 1, 2, 3 i t. d. są 1, 4, 9, i t. d. I tak (fig. 103) widzimy że kwadrat z linii 2 razy większej od danej, jest 4 razy większy od kwadratu z linii danej; kwadrat z linii 3 razy większej, jest większy 9 razy i t. d.

PODANIE V.

Twierdzenie.

Powierzchnia jakiegokolwiek równoległoboku jest równa iloczynowi z jego podstawy przez wysokość.

Gdyż równoległobok ABCD (fig. 97) jest równoważny z prostokątem ABEF, mającym też samą podstawę AB i wysokość BE (pod. 1); ponieważ zaś powierzchnia prostokąta jest równa $AB \times BE$ (pod. 4) zatem i powierzchnia równoległoboku, z nim równoważnego, jest równa $AB \times BE$.

Wniosek. Równoległoboki mające równe podstawy są do siebie w stosunku swoich wysokości, a mające równe wysokości mają się jak podstawy; gdyż jeżeli mamy trzy jakiekolwiek wielkości A, B i C, zawsze będzie $A \times C : B \times C = A : B$.

PODANIE VI.

Twierdzenie.

Powierzchnia trójkąta jest równa iloczynowi z jego podstawy przez pół wysokości.

Gdyż trójkąt ABC (fig. 104) jest połową równoległoboku ABCE, mającego z nim jednakową podstawę BC i wysokość AD (pod. 2); że zaś powierzchnia równoległoboku $= BC \times AD$ (pod. 5), przeto powierzchnia trójkąta $= \frac{1}{2} BC \times AD$, albo $BC \times \frac{1}{2} AD$.

Wniosek. Dwa trójkąty, mające równe wysokości, są do siebie w stosunku swoich podstaw, a trójkąty mające równe podstawy, mają się do siebie jak wysokości.

PODANIE VII.

Twierdzenie.

Powierzchnia trapeza ABCD (fig. 105) jest równa jego wysokości EF, pomnożonej przez półową summy podstaw równoległych AB i CD.

Przez środek J boku CB, poprowadźmy linię KL równoległą do boku przeciwległego AD, i przedłużmy DC do spotkania się z KL.

Trójkąty JBL i JCK mają bok JB = JC z wykreślenia, kąt LJB = CJK, i kąt JBL = JCK, bo linie CK i BL są równoległe (pod. 24 ks. I); więc te trójkąty są sobie równe (pod. 7 ks. I) i tém samym trapez ABCD jest równoważny z równoległobokiem ADKL, a tém samym jego powierzchnia = $EF \times AL$.

Lecz mamy $AL = DK$, adla równości trójkątów JBL i KCK, bok BL = CK, więc $AB + CD = AL + DK = 2AL$; i tak AL jest połową summy podstaw AB i CD; więc nakoniec powierzchnia trapeza ABCD jest równa wysokości EF, pomnożonej przez połowę summy podstaw AB i CD, co da się wyrazić przez: $ABCD = EF \times \left(\frac{AB + CD}{2}\right)$.

Uwaga. Przez punkt J, który jest środkiem boku CB, poprowadziwszy linię JH równoległą do podstawy AB, punkt H będzie także środkiem boku AD; gdyż czworokąty AHJL i DHJK, mając boki przeciwne równoległe, są równoległobokami; a zatem mamy $HA = JL$ i $DH = JK$, przeto i $AH = DH$.

Łatwo dostrzedz że linia $HJ = AL = \frac{AB + CD}{2}$, a zatem powierzchnię trapeza można wyrazić przez $EF \times HJ$, to jest: *powierzchnia trapeza także jest równa iloczynowi z wysokości przez linię łączącą środki dwóch boków nierównoległych.*

PODANIE VIII.

Twierdzenie.

Podzieliwszy linię AC (fig. 106) na dwie części AB i BC, kwadrat z całej

linii AC będzie mieścić w sobie; kwadrat z części AB, kwadrat z drugiej części BC i dwa prostokąty z części jednej przez drugą; to jest: $\overline{AC}^2$, albo $(AB+BC)^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + 2.AB \times BC$.

Wystawmy kwadrat ACDE, odelnijmy AF=AB, poprowadźmy EG równoległą do AC, i BH równoległą do AE.

Kwadrat ACDE podzielił się na 4 części: pierwsza z nich ABJF jest kwadratem z linii AB, gdyż wzięto AF=AB; część druga JGDH jest kwadratem z linii BC, gdyż mamy AC=AE i AB=AF, a tém samém i różnica AC—AB jest równa różnicy AE—AF, czyli BC=EF; lecz dla równoległości, JG=BC i DG=EF, przeto czworokąt JGDH jest kwadratem z linii AB. Odjąwszy te dwie części od całego kwadratu, pozostaną dwa prostokąty BCGJ i EFJH, z których każdy ma za miarę

AB X BC; przeto kwadrat z linii AC i t. d.

Uwaga. To podanie jest to samo, co twierdzenie, dowodzone w algebrze, o składzie kwadratu z dwumianu, to jest:

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2.ab.$$

PODANIE IX.

Twierdzenie.

Jeżeli linia AC (fig. 107) jest różnicą dwóch linii AB i BC, kwadrat wystawiony na niej będzie równy: kwadratowi z AB, więcej kwadratem z BC, mniej dwa razy wzięty prostokąt wystawiony na liniach AB i BC; to jest: $\overline{AC}^2$, czyli $(AB-BC)^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - 2.AB \times BC$.

Wystawmy kwadrat ABJF, weźmy AE=AC, poprowadźmy linię CG ró-

wnoległą do BJ, HK równoległą do AB i wystawmy kwadrat EFLK.

Każdy z prostokątów CBJG i GLKD ma za miarę $AB \times BC$; jeżeli je odejmiemy od całej figury ABJLKEA, która znaczy $\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$, pozostanie kwadrat ACDE; przeto i t. d.

Uwaga. To podanie sprowadza się do formuły algebraicznój:

$$(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab.$$

PODANIE X.

Twierdzenie.

Prostokąt z summy przez różnicę dwóch linii jest równy różnicy kwadratów z tychże linii; t. j. $(AB + BC) \times (AB - BC) = \overline{AB}^2 - \overline{BC}^2$, (fig. 108).

Na liniach AB i AC wystawmy kwadraty ABJF i ACDE, przedłużmy AB tak, aby przedłużenie BK było równe BC, i wystawmy prostokąt AKLE.

Podstawa AK prostokąta AKLE jest równa summie linii AB i BC, a jego wysokość AE jest różnicą tychże samych linii; przeto prostokąt $AKLE = (AB + BC) \times (AB - BC)$. Lecz ten prostokąt składa się z dwóch części: ABHE i BHLK, część BHLK jest równa prostokątowi EDGF, gdyż $BH = DE$ i $BK = EF$; więc $AKLE = ABHE + EDGF$. Że zaś te dwie części stanowią kwadrat ABJF zmniejszony czworokątem DHJG, który jest kwadratem z linii BC; przeto na koniec $(AB + BC) \times (AB - BC) = \overline{AB}^2 - \overline{BC}^2$.

Uwaga. To twierdzenie jest wysłowieniem wzoru algebraicznego:

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2.$$

PODANIE XI.

Twierdzenie.

W trójkącie prostokątnym kwadrat z przeciwprostokątnej jest równy sumie kwadratów, wystawionych na ramionach kąta prostego.

Niech będzie (fig. 109) ABC trójkąt prostokątny przy A , wystawiwszy na każdym boku jego kwadrat, z wierzchołka kąta prostego spuścimy prostopadłą AD na przeciwprostokątną, i przedłużmy ją do przecięcia się z FG w punkcie E , następnie poprowadźmy przekątne AF i CH .

Kąt ABF składa się z kąta ABC i kąta prostego CBF , kąt CBH składa się z tegoż samego kąta ABC i z kąta prostego ABH ; przeto kąt $ABF = HBC$. Lecz nadto $AB = BH$, jako boki jednego kwa-

dratu, i $BF = BC$ dla téj samej przyczyny; zatem trójkąty ABF i HBC , mając po kącie równym, utworzonym przez boki odpowiednio równe, są sobie równe.

Trójkąt ABF jest półową prostokąta $DEFB$, mającego z nim wspólną podstawę BF i jednakową wysokość BD (pod. 2). Podobnie trójkąt HBC jest półową kwadratu $ABHL$; gdyż, ponieważ kąty BAC i BAL są proste, linie AC i AL stanowią jedną linię prostą, równoległą do HB ; zatem trójkąt HBC , mając wspólną podstawę BH i wysokość AB z kwadratem $ABHL$, jest jego półową.

Już dowiedziono, że trójkąt ABF jest równy trójkątowi HBC ; a zatem prostokąt $BDEF$, dwa razy większy od trójkąta ABF , jest równoważny z kwadratem $ABHL$, dwa razy większym od trójkąta HBC . Podobnie można do-

wieść że prostokąt CDEG jest równoważny z kwadratem ACJK. Lecz dwa prostokąty BDEF i CDEG stanowią kwadrat BCGF; przeto kwadrat BCGF, wystawiony na przeciwprostokątnej, jest równy summie kwadratów ABHL i ACJK, wystawionych na ramionach kąta prostego, czyli $\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$.

Wniosek I. Więc kwadrat z któregokolwiek ramienia kąta prostego jest równy kwadratowi z przeciwprostokątnej, zmniejszonemu kwadratem z drugiego ramienia kąta prostego; t. j. $\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 - \overline{AC}^2$.

II. Niech będzie kwadrat ABCD (fig. 118), i AC jego przekątna; ponieważ trójkąt ABC jest prostokątny i równoramienny, przeto $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = 2.\overline{AB}^2$, t. j. kwadrat z przekątnej AC, jest dwa razy większy od kwadratu z boku AB.

Tę własność kwadratu uczynimy widoczną, poprowadziwszy przez punkta A i C linie równoległe do BD i przez punkta B i D linie równoległe do AC; takim sposobem utworzy się nowy kwadrat EFGH, który będzie kwadratem z AC. Widzimy że kwadrat EFGH zawiera w sobie ośm trójkątów równych ABE, a kwadrat ABCD mieści ich tylko cztery; przeto kwadrat EFGH jest dwa razy większy od kwadratu ABCD.

Ponieważ $\overline{AC}^2 : \overline{AB}^2 = 2 : 1$, przeto wyciągnąwszy pierwiastki kwadratowe z wyrazów téj proporcji będzie, $AC : AB = \sqrt{2} : 1$; a zatem, przekątna kwadratu i bok jego są linie niewspółmierne.

Obszerniej to rozwiniemy na inném miejscu.

III. Dowiedziono że kwadrat ABHL jest równoważny z prostokątem BDEF;

dla wspólnej wysokości BJ, kwadrat BCGF tak się ma do prostokąta BDEF, jak podstawa BC do podstawy BD; a zatem

$$\overline{BC}^2 : \overline{AB}^2 = BC : BD,$$

więc, kwadrat z przeciwprostokątnej tak się ma do kwadratu z ramienia kąta prostego, jak się ma przeciwprostokątna do odcinka, przyległego temuż ramieniu. Odcinkiem nazywa się każda z dwóch części, na które przeciwprostokątna została podzielona, przez prostopadłą spuszczoną na nią z wierzchołka kąta prostego; i tak: BD jest odcinkiem przyległym ramieniu AB, a DC jest odcinkiem przyległym ramieniu AC. Podobnie otrzymalibyśmy:

$$\overline{BC}^2 : \overline{AC}^2 = BC : CD.$$

IV. Prostokąty BDEF i DCGE, mając wspólną wysokość DE, mają się do siebie jak podstawy BD i CD; ponieważ

zaś te prostokąty są równoważne z kwadratami ABHL i ACJK, więc będzie:

$$\overline{AB}^2 : \overline{AC}^2 = BD : DC.$$

Przeto, kwadraty z ramion kąta prostego mają się do siebie, jak odcinki przeciwprostokątnej, przyległe tymże ramionom.

PODANIE XII.

Twierdzenie.

W trójkącie ABC (fig. 110) kwadrat z boku AB, przeciwległego kątowi ostremu C, jest mniejszy od summy kwadratów z ramion tegoż kąta; i jeżeli spuścimy prostopadłą AD na BC, różnica będzie równa dwa razy wziętemu prostokątowi BC X CD, i będzie:

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 - 2BC \times CD.$$

Tutaj byź mogą dwa przypadki:

1. Kiedy prostopadła znajduje się wewnątrz trójkąta ABC, wtedy $BD = BC - CD$, a zatem (pod. 9) $\overline{BD}^2 = \overline{BC}^2 \pm \overline{CD}^2 - 2.BC \times CD$. Dodając do każdej z tych ilości $\overline{AD}^2$ i uważając że trójkąty prostokątne ABD i ADC dają: $\overline{AD}^2 + \overline{BD}^2 = \overline{AB}^2$ i $\overline{AD}^2 + \overline{DC}^2 = \overline{AC}^2$, będzie $\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2 - 2.BC \times CD$.

2. Jeżeli prostopadła AD pada zewnątrz trójkąta ABC, będzie $BD = CD + BC$, i zatem (pod. 9) $\overline{BD}^2 = \overline{CD}^2 + \overline{BC}^2 + 2.CD \times BC$. Dodając do każdej strony $\overline{AD}^2$ i postępując jak wyżej, otrzymamy:

$$\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2 + 2.BC \times CD.$$

PODANIE XIII.

Twierdzenie.

W trójkącie ABC (fig. 111), kwadrat z boku AB, przeciwległego kątowi

rozwartemu C, jest większy od summy kwadratów z ramion kąta C, i spuściwszy prostopadłą AD na BC, różnica będzie równa dwa razy wziętemu prostokątowi BCXCD, i będzie:

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 + 2.BC \times CD.$$

Prostopadła AD nie może upaść wewnątrz trójkąta; gdyż jeżeliby ona przeszła np. przez punkt E, trójkąt ACE miałby jeden kąt prosty E i drugi rozwarty C, co byż nie może (pod. 19 ks. I), a zatem prostopadła pada zewnątrz i mamy $BD = BC + CD$, z kąd wynika (pod. 8) $\overline{BD}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 + 2.BC \times CD$. Dodając do każdej strony $\overline{AD}^2$ i sprowadziwszy wyrażenie otrzymane do najprostszej formy, podobnie jak w dowodzeniu twierdzenia poprzedzającego, otrzymamy $\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2 + 2.BC \times CD$.

Uwaga. Tylko w trójkącie prostokątnym summa kwadratów z dwóch jego boków jest równa kwadratowi z boku trzeciego; gdyż, jeżeli kąt pomiędzy bokami zawarty jest ostry, summa kwadratów wystawionych na niek jest większa, jeżeli zaś kąt jest rozwarty, summa kwadratów z ramion jego jest mniejsza od kwadratu z boku przeciwległego.

POŁANIE XIV.

Twierdzenie.

W jakimkolwiek trójkącie ABC (fig. 112), połączysz wierzchołek jego ze środkiem podstawy linią AE, będzie

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2\overline{AE}^2 + 2\overline{BE}^2.$$

Spuścimy prostopadłą AD na podstawę BC, trójkąt AEC (pod. 12) da:

$$\overline{AC}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{EC}^2 - 2\overline{EC} \times \overline{ED}.$$

Z trójkąta ABE (pod. 13) otrzymamy:

$$\overline{AB}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{EB}^2 + 2\overline{EB} \times \overline{ED}.$$

Dodawszy do siebie otrzymane wyrażenia, i pamiętając że $\overline{EB} = \overline{EC}$, będzie:

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2\overline{AE}^2 + 2\overline{EC}^2.$$

Wniosek. Zatem, w każdym równoległoboku summa kwadratów z boków jest równa summie kwadratów z przekątnych.

Gdyż przekątne AC i BD (fig. 113) dzielą się wzajemnie na dwie części równe w punkcie E (pod. 31 ks. I); więc trójkąt ABC daje:

$$\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = 2\overline{AE}^2 + 2\overline{BE}^2.$$

Podobnie trójkąt ADC daje:

$$\overline{AD}^2 + \overline{DC}^2 = 2\overline{AE}^2 + 2\overline{DE}^2.$$

Dodając strony odpowiednie tych wyrażen i pamiętając że $\overline{BE} = \overline{DE}$, będzie:

$$\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{AD}^2 + \overline{DC}^2 = 4\overline{AE}^2 + 4\overline{DE}^2.$$

Że zaś $4.AE^2$ jest kwadratem z $2.AE$ czyli z AC , a $4.DE^2$ jest kwadratem z $2.DE$ czyli z BD , przeto:

$$\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{AD}^2 + \overline{DC}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BD}^2.$$

t. j. summa kwadratów z boków równoległoboku jest równa summie kwadratów z jego przekątnych.

PODANIE XV.

Twierdzenie.

Linia DE (fig. 114), równoległa do podstawy trójkąta ABC, dzieli jego boki AB i AC na części proporcjonalne, t. j. $AD:DB = AE:EC$.

Połączmy punkt B z E i D z C liniami prostymi BE i DC: dwa trójkąty BDE i DEC mają wspólną podstawę DE, ponieważ zaś ich wierzchołki B i C leżą na linii równoległej do pod-

stawy, przeto mają wysokość wspólną i są sobie równoważne (pod. 2 wn. 2).

Trójkąty ADE i BDE, mając wspólny wierzchołek E, mają wspólną wysokość, a tém samym mają się do siebie jak ich podstawy AD i DB (pod. 6), t. j.

$$ADE:BDE = AD:DB.$$

Trójkąty ADE i DEC, których wspólnym wierzchołkiem jest D, mają jednakową wysokość, i tém samym są do siebie w stosunku swoich podstaw AE i EC, to jest:

$$ADE:DEC = AE:EC.$$

Że zaś trójkąt BDE = DEC, więc te dwie proporcye, dla wspólnego stosunku ADE:DEC, dają,

$$AD:DB = AE:EC.$$

Wniosek I. Z téj proporcyi wypada $AD+DB:DB = AE+EC:EC$, czyli $AB:DB = AC:EC$, i także $AB:AD = AC:AE$.

II. Linie równoległe AC, EF, GH, BD i t. d., przecinając dwie jakiegolwiek linie AB i CD, podzielią je na części proporcjonalne, i będzie $AE : CF = EG : FH = GB = HD$.

Gdyż niech będzie O punktem przecięcia się linii AB i CD; w trójkącie OEF, linia AC jest równoległa do podstawy EF, a tém samym $OE : AE = OF : CF$, albo $OE : OF = AE : CF$. W trójkącie OGH podobnie $OE : EG = OF : FH$ czyli $OE : OF = EG : FH$, a zatem, dla stosunku wspólnego OE:OF, te dwie proporcye dają $AE : CF = EG : FH$. Takim samym sposobem można okazać że $EG : FH = GB : HD$, i tak dalej; a zatem linie AB i CD są podzielone przez linie równoległe EF, GH, i t. d. na części proporcjonalne.

PODANIE XVI.

Twierdzenie.

Odwrotnie, jeżeli boki AB i AC (fig. 106) trójkąta ABC przez linię DE są podzielone na części proporcjonalne, tak że mamy $AD : DB = AE : EC$, mówię że linia DE jest równoległa do podstawy CB.

Jeżeli bowiem linia DE nie jest równoległa do BC, przypuśćmy że jest taką linia DO; wówczas, podług twierdzenia poprzedzającego, będzie $AD : DB = AO : OC$. Że zaś podług założenia mamy $AD : BD = AE : EC$, a zatem byłaby proporcya $AO : OC = AE : EC$, która nie może mieć miejsca gdyż poprzednik AO jest mniejszy od poprzednika AE, a następnik OC jest większy od następnika EC; zatem linia równoległa do BC, przez punkt D popro-

wadzona, nie może się różnić od DE, i tén samém DE jest tą równoległą.

Uwaga. Takiż sam wniosek uczynilibyśmy mając proporcję $AB:AD = AC:AE$; gdyż ta proporcja dałaby $AB - AD:AD = AC - AE:AE$, czyli $BD:AD = CE:AE$.

PODANIE XVII.

Twierdzenie.

Linia AD (fig. 117), dzieląca kąt BAC trójkąta na dwie części równe, dzieli bok jemu przeciwległy BC na dwa odcinki BD i DC, proporcjonalne bokom AB i AC przyległym tymże odcinkom i będzie $BD:DC = AB:AC$.

Przez punkt C poprowadźmy linię CE równoległą do AD i przedłużmy ją do spotkania się z przedłużeniem BA.

W trójkącie BCE jest linia AD równoległa do podstawy CE, przeto (pod. 15):

$$BD:DC = AB:AE.$$

Lecz trójkąt ACE jest równoramien-ny; gdyż dla równoległości linii AD i CE kąt $ACE = DAC$ i kąt $AEC = BAD$ (pod. 24 ks. I), że zaś z przypuszczenia kąt $DAC = BAD$, więc kąt $ACE = AEC$ i tén samém $AE = AC$ (pod. 13 ks. I); a zatem, podstawivszy w poprzedzającej proporcji AC na miejsce AE, otrzymamy,

$$BD:DC = AB:AC.$$

PODANIE XVIII.

Twierdzenie.

Dwa trójkąty równokątne mają boki odpowiednie proporcjonalne i są sobie podobne.

Niech będą dwa trójkąty ABC i CDE (fig. 119), mające kąty odpowiednio równe, a mianowicie $\angle BAC = \angle CDE$, $\angle ABC = \angle DCE$, i $\angle ACB = \angle DEC$; powiadam że boki odpowiednie, t. j. bokileżące przy kątach równych, będą proporcjonalne, i będzie $BC : CE = AB : DC = AC : DE$.

Ustawmy dwa trójkąty tak, aby one, mając wspólny jeden wierzchołek, miały boki odpowiednie skierowane w jedne strony, i przedłużmy boki AB i ED do spotkania się z sobą w punkcie F .

Ponieważ BCE jest linią prostą, a $\angle BCA = \angle CED$, przeto linia AD jest równoległa do DC ; a zatem czworokąt $ACDF$ jest równoległobokiem.

Ponieważ w trójkącie BFE linia AC jest równoległa do podstawy FE , przeto mamy $BC : CE = BA : AF$ (pod. 15).

Podstawiając CD zamiast jemu równego AF , będzie,

$$BC : CE = BA : CD.$$

W tymże trójkącie BFE , uważając BF za podstawę, linia CD jest równoległa do podstawy i mamy proporcję $BC : CE = FD : DE$. Podstawiając AC w miejsce FD , będzie,

$$BC : CE = AC : DE.$$

Nakoniec z tych dwóch proporcji, mających stosunek wspólny $BC : CE$, wypada:

$$AC : DE = BA : CD.$$

A zatem, trójkąty ABC i CDE mające kąty równe, mają boki odpowiednio proporcjonalne; że zaś, według opisu 2, dwa wielokąty, mające kąty odpowiednio równe i boki odpowiednie proporcjonalne, są sobie podobne, przeto trójkąty BAC i CDE są sobie podobne.

Wniosek. Dla podobieństwa trójkątów dosyć jest, aby miały po dwa kąty odpowiednio równe; gdyż w takim razie i trzeci kąt jednego będzie równy trzeciemu kątowi drugiego trójkąta, i dwa trójkąty będą równokątne.

Uwaga. W trójkątach podobnych boki odpowiednie leżą naprzeciw kątów równych, i tak jeżeli kąt ACB jest równy DEC, bok AB jest odpowiedni bokowi DC; podobnie boki AC i DE, jako leżące naprzeciw kątów ABC i DCE równych, są sobie odpowiednie. Rozpoznawszy boki odpowiednie, można z nich natychmiast ułożyć proporcję,

$$AB : CD = AC : DE = BC : CE.$$

PODANIE XIX.

Twierdzenie.

Dwa trójkąty, mające boki odpowiednie proporcjonalne, są równokątne i tém samém podobne sobie.

Przypuśćmy że jest (fig. 120) $BC : EF = AB : DE = AC : DF$, powiadam że trójkąty ABC i DEF będą miały kąty równe, a mianowicie $A = D, B = E, C = F$.

Przy punkcie E nakreślmy kąt $FEG = B$, i przy punkcie F kąt $EFG = C$, kąt trzeci G będzie równy kątowi A, i dwa trójkąty ABC i EFD będą równokątne, a zatem, podług twierdzenia poprzedzającego, będzie $BC : EF = AB : EG$; że zaś podług przypuszczenia mamy $BC : EF = AB : DE$, przeto $EG = DE$. Podług tegoż samego twierdzenia

nia będzie, $BC:EF = AC:FG$, że zaś podług założenia $BC:EF = AC:DF$, przeto $FG = DF$; więc dwa trójkąty EGF i DEF , mając po trzy kąty odpowiednio równe i bok EF wspólny, są sobie równe (pod. 11 ks. I). Że zaś podług wykreślenia trójkąt EGF jest równokątny z trójkątem ABC , przeto dwa trójkąty DEF i ABC są równokątne i podobne sobie.

Uwaga I. Ostatnie dwa twierdzenia dają poznać, że w trójkątach równość kątów sprowadza proporcjonalność boków, i odwrotnie; tak że dość jest jednego z tych warunków, aby być pewnym że trójkąty są sobie podobne. Lecz nie tak jest z wielokątami o większej liczbie boków; gdyż w czworokącie, nie zmieniając jego kątów, można zmienić stosunek pomiędzy bokami; a zatem równość kątów nie po-

ciąga za sobą proporcjonalności boków, i proporcjonalność boków nie sprowadza równości kątów. Widzimy np. (fig. 121) że w czworokącie $ABCD$ poprowadziwszy linię EF równoległą do BC , otrzymamy czworokąt $AEFD$, którego kąty są równe kątom danego czworokąta, lecz stosunek pomiędzy bokami jest inny; podobnie, nie zmieniając boków AB , BC , CD i AD , można punkt B przybliżyć albo oddalić od D , co wpłynie na zmianę kątów.

II. Dwa ostatnie podania, które właściwie stanowią jedno, łącznie z twierdzeniem o kwadracie z przeciwprostokątnej są najważniejsze w geometryi i najobszerniejsze w zastosowaniu: one same wystarczają do rozwiązania niemal wszystkich zagadnień; wszystkie albowiem wielokąty można podzielić na trójkąty, a każdy trójkąt na dwa trójkąty prostokątne. A zatem ogólne własności

trójkątów mieszczą w sobie własności wszystkich wielokątów.

PODANIE XX.

Twierdzenie.

Dwa trójkąty, mające po kącie równym, utworzonym przez boki odpowiednio proporcjonalne, są sobie podobne.

Niech będzie kąt $A = D$, i $AB : DE = AC : DF$ (fig. 122), mówię że trójkąt ABC jest podobny trójkątowi DEF.

Weźmy $AG = DE$, i poprowadźmy linię GH, równoległą do BC; kąt AGH będzie równy ABC (pod. 24 ks. I), i trójkąt AGH będzie równokątny z trójkątem ABC, więc będzie $AB : AG = AC : AH$; że zaś podług przypuszczenia $AB : DE = AC : DF$, a podług wykreślenia $AG = DE$, przeto $AH = DF$. Dwa trójkąty

AGH i DEF, mają po kącie równym, utworzonym przez boki odpowiednio równe, a zatem są sobie równe; ponieważ zaś trójkąt AGH jest podobny trójkątowi ABC, przeto i jemu równy trójkąt DEF jest także podobny trójkątowi ABC.

PODANIE XXI.

Twierdzenie.

Dwa trójkąty są sobie podobne, kiedy boki jednego są równoległe, albo prostopadłe do boków drugiego trójkąta.

Gdyż, 1^o jeżeli bok AB (fig. 123) jest równoległy do DE, a bok BC do EF, będzie kąt $ABC = DEF$ (pod. 27 ks. I); jeżeli nadto bok AC jest równoległy do DF, kąt ACB będzie równy DFE i BAC równy EDF; prze-

to dwa trójkąty ABC i DEF , będąc z sobą równokątne, są sobie podobne.

2^{re} Niech będzie bok DE (fig. 124) prostopadły do AB , bok DF prostopadły do AC ; w czworokącie $AJDH$ dwa kąty J i H są proste, że zaś suma wszystkich kątów jego jest równa czterem kątom prostym (pod. 20 ks. I), przeto dwa pozostałe JAH i JDH czynią sumę równą dwóm kątom prostym. Lecz dwa kąty EDF i JDH także składają dwa kąty proste; przeto kąt EDF jest równy JAH , albo kątowi BAC . Jeżeli trzeci bok EF jest prostopadły do BC , podobnie dowiedziemy że kąt $DFE = C$, i $DEF = B$; przeto dwa trójkąty, mające boki wzajemnie prostopadłe, są równokątne, a tem samém podobne sobie.

Uwaga. W przypadku równoległości boków trójkątów, boki równoległe są sobie odpowiednie, w przypadku zaś

ich prostopadłości boki prostopadłe są odpowiednie. I tak w drugim przypadku boki odpowiednie są DE i AB , DF i AC , EF i BC .

Kiedy boków dwóch trójkątów są do siebie wzajemnie prostopadłe, mogłoby się zdarzyć, że położenie względne dwóch trójkątów byłoby różne od tego, jakie przypuściliśmy w fig. 124; lecz zawsze możnaby dowieść równości kątów odpowiednich albo zapomocą czworokątów takich jak $AJDH$, w którym dwa kąty są proste, albo też porównyując dwa trójkąty, któreby razem z kątami wierzchołkami stykającemi się, miały po kącie prostym; z resztą zawsze można przypuścić, że wewnątrz trójkąta ABC wystawiono trójkąt DEF , którego boki są równoległe bokom trójkąta porównywanego z ABC , i natenczas dowodzenie byłoby sprowadzone do tego, jakie podano na fig. 124.

PODANIE XXII.

Twierdzenie.

Linie AF, AG, i t. d. (fig. 125) jakkolwiek poprowadzone przez wierzchołek trójkąta, dzielą jego podstawę BC i linię do niej równoległą DE na części proporcjonalne, tak że będzie DJ:BF=JK:FG=KL:GH i t. d.

Ponieważ linia DJ jest równoległa do BF, przeto trójkąty ADJ i ABF są równokątne i tém samém mamy proporcję DJ:BF=AJ:AF; podobnie, ponieważ linia JK jest równoległa do FG, przeto AJ:AF=JK:FG; dla stosunku AJ:AF wspólnego, będzie DJ:BF=JK:FG. Podobnie znajdziemy JK:FG=KL:GH i t. d.; przeto linia DE jest podzielona w punktach J, K, L na części proporcjonalne czę-

ściom podstawy BC, podzielonej w punktach F, G, H.

Wniosek. Jeżeli więc linia BC jest podzielona w punktach F, G, H na części równe, linia do niej równoległa DE będzie także podzielona w punktach J, K, L na części równe sobie.

PODANIE XXIII.

Twierdzenie.

W trójkącie prostokątnym, spuściwszy z wierzchołka kąta prostego A (fig. 126) prostopadłą na przeciwprostokątną,

1) *dwa trójkąty cząstkowe ABD i ADC będą podobne sobie i całemu trójkątowi;*

2) *każdy z boków AB i AC będzie średnio geometrycznie proporcjonalny*

między przeciwprostokątną BC i odcinkiem jemu przyległym BD, albo DC; 3) prostopadła AD będzie średnio geometrycznie proporcjonalna między dwoma odcinkami BD i DC.

Gdyż 1-ód trójkąty BAD i BAC mają kąt B wspólny, nadto kąt prosty BDA jest równy kątowi prostemu BAC, a zatem trzeci kąt BAD jednego jest równy trzeciemu kątowi C drugiego trójkąta; więc te trójkąty są równokątne i podobne sobie. Podobnie można dowieść że trójkąt DAC jest podobny trójkątowi BAC; więc wszystkie trzy trójkąty są sobie podobne.

2-e Dwa trójkąty BAD i BAC, będąc sobie podobne, mają boki odpowiednio proporcjonalne. Bok BD trójkąta mniejszego jest odpowiedni bokowi BA większego trójkąta, bo leżą naprzeciw kątów równych BAD i BCA; przeciwprostokątna BA mniejszego, jest

odpowiednia przeciwprostokątnej BC większego trójkąta; przeto można ułożyć proporcję $BD : BA = BA : BC$. Podobnie otrzymalibyśmy $DC : AC = AC : BC$; przeto 2-e każdy z boków AB i AC jest średnio geometrycznie proporcjonalny między przeciwprostokątną i odcinkiem jemu przyległym.

3-e Nakoniec dwa trójkąty podobne ABD i ADC dają proporcję $BD : AD = AD : DC$; więc, 3-e prostopadła AD jest średnio geometrycznie proporcjonalna między odcinkami BD i DC przeciwprostokątnej.

Uwaga. Z proporcji $BD : AB = AB : BC$ mamy $\overline{AB}^2 = BD \times BC$, z proporcji $DC : AC = AC : BC$ mamy $\overline{AC}^2 = DC \times BC$, więc będzie $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = BD \times BC + DC \times BC$; druga strona tej równości jest to samo co $(BD + DC) \times BC$, czyli $BC \times BC$, albo $\overline{BC}^2$, a zatem

$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BC}^2$; przeto kwadrat z przeciwprostokątnej BC jest równy summie kwadratów z ramion AB i AC kąta prostego. Dochodzimy więc znowu do twierdzenia okwadracie z przeciwprostokątnej drogą różną od tej, jaką postępowaliśmy poprzednio; zład widzimy że twierdzenie o kwadracie z przeciwprostokątnej wypada z proporcjonalności boków w trójkątach równokątnych. A zatem główne twierdzenia geometryi sprowadzają się, że tak powiem, do tego jednego, że trójkąty równokątne mają boki odpowiednio proporcjonalne.

Często się zdarza, jak tego dopiero napolkaliśmy przykład, że wyprowadzając wnioski z jednego lub kilku twierdzeń, natrafiamy na podania już dowiedzione poprzednio. W ogólności łącząc z sobą jakimkolwiek sposobem twierdzenia geometryczne, byleby ro-

zumowanie nie było fałszywe, dojdziemy zawsze do wypadków prawdziwych; to jest cechą odznaczającą twierdzenia geometryi i służy za niezbity dowód ich prawdziwości. Nie tak by się rzecz miała, jeżeliby niektóre twierdzenia były zupełnie fałszywe, lub też prawdziwe na szczególne przypadki; w takim razie łączenie twierdzeń pomiędzy sobą powiększałoby błędy i czyniłoby je widocznymi. Widzieliśmy tego przykłady we wszystkich dowodzeniach, w których użyliśmy sposobu sprowadzania *ad absurdum*. Jeżeli w podobnych dowodzeniach mamy na celu okazać, że dwie ilości są sobie równe: staramy się dać poznać że jeżeliby te ilości były nierówne, natenczas doszlibyśmy przez szereg rozumowań do wypadku widocznie fałszywego; a zład wnieśliśmy że te dwie ilości muszą być sobie równe.

Wniosek. Jeżeli przez punkt A (fig. 127) obrany na okręgu koła poprowadzimy dwie cięciwy AB i AC do końców średnicy BC, trójkąt BAC będzie prostokątny przy A (pod. 18 ks. II); i tém samym 1) *prostopadła* AD będzie *średnio geometrycznie proporcjonalna między dwoma odcinkami* BD i DC *średnicy*, albo co jest to samo $\overline{AD}^2 = \overline{BD} \times \overline{DC}$.

2) Cięciwa AB jest *średnio geometrycznie proporcjonalna między średnicą* BC *i odcinkiem* BD *przyległym téjże cięciwie*, czyli co jest to samo $\overline{AB}^2 = \overline{BD} \times \overline{BC}$. Podobnie mamy $\overline{AC}^2 = \overline{CD} \times \overline{BC}$; a zatem $\overline{AB}^2 : \overline{AC}^2 = \overline{BD} : \overline{DC}$; a porównawszy $\overline{AB}^2$ z $\overline{BC}^2$ wypada $\overline{AB}^2 : \overline{BC}^2 = \overline{BD} : \overline{BC}$, podobnież $\overline{AC}^2 : \overline{BC}^2 = \overline{DC} : \overline{BC}$. Te stosunki pomiędzy kwadratami z ramion kąta prostego po-

równywanemi bądź to pomiędzy sobą, bądź z kwadratem z przeciwprostokątnej, już były podane we wn. 3 i 4 pod. 11.

PODANIE XXIV.

Twierdzenie.

Dwa trójkąty mające po kącie równym mają się do siebie, jak prostokąty z boków obejmujących te kąty; t. j. (fig. 128) trójkąt ABC ma się do trójkąta ADE, jak prostokąt AB X AC do prostokąta AD X AE.

Poprowadźmy BE; dwa trójkąty ABE i ADE, mające wspólny wierzchołek E i podstawy na jednej linii prostej, mają wspólną wysokość, a tém samym mają się do siebie w stosunku swoich podstaw AB i AD (pod. 6), więc, $\text{ABE} : \text{ADE} = \text{AB} : \text{AD}$.

Dla téjże przyczyny mamy:

$$ABC:ABE=AC:AE.$$

Pomnożywszy wyrazy odpowiadające tych proporcij przez siebie i opuściwszy czynnik ABE, wspólny dla wyrazów pierwszego stosunku, będzie:

$$ABC:ADE=AB \times AC:AD \times AE.$$

Wniosek. Dwa trójkąty ABC i ADE byłyby sobie równoważne, gdyby prostokąt $AB \times AC$ był równy prostokątowi $AD \times AE$, albo jeżeliby było $AB:AD=AE:AC$, co wtenczas mogłoby nastąpić, kiedyby linia DC była równoległa do BE.

PODANIE XXV.

Twierdzenie.

Dwa trójkąty podobne mają się do siebie, jak kwadraty z boków odpowiednich.

Niech będzie (fig. 122) kąt $A=D$ i kąt $B=E$; dla równości kątów A i D, podług podania poprzedzającego, będzie,

$$ABC:DEF=AB \times AC:DE \times DF.$$

Z podobieństwa trójkątów wypada,

$$AB:DE=AC:DF.$$

Pomnożywszy wyrazy téj proporcji przez wyrazy odpowiednie proporcji

$$AC:DF=AC:DF,$$

będzie,

$$AB \times AC:DE \times DF=\overline{AC}^2:\overline{DF}^2.$$

A zatem,

$$ABC:DEF=\overline{AC}^2:\overline{DF}^2.$$

Przeto dwa trójkąty ABC i DEF mają się do siebie, jak kwadraty z boków odpowiednich AC i DF, albo też jak kwadraty z którychkolwiek boków odpowiednich.

PODANIE XXVI.

Twierdzenie.

Dwa wielokąty podobne składają się z jednakowej liczby trójkątów odpowiednio podobnych i podobnie ułożonych.

W wielokącie ABCDE (fig. 129) poprowadźmy przekątne AC, AD, od wierzchołka kąta A do wierzchołków innych kątów. W drugim wielokącie EFGHK poprowadźmy przekątne FH, FJ, od od wierzchołka kąta F, odpowiedniego kątowi A, do wierzchołków innych kątów.

Dla podobieństwa wielokątów kąt ABC jest równy kątowi FGH (op. 2), i boki AB i BC są proporcjonalne bokom FG i GH, to jest: $AB:FG = BC:GH$; ztąd wypada, że trójkąty ABC i FGH, mając po kącie równym, utwo-

rzonym przez boki proporcjonalne, są sobie podobne (pod. 20): a zatem kąt BCA jest równy kątowi GHE. Od kątów równych BCD i GHJ odjawszy kąty równe BCA i GHJ, pozostaną reszty ACD i FHJ równe sobie; że zaś dla podobieństwa trójkątów ABC i FGH jest $AC:FH = BC:GH$, a dla podobieństwa wielokątów $BC:GH = CD:HJ$, zatem $AC:FH = CD:HJ$; więc dwa trójkąty ACD i FHJ, mając po kącie równym utworzonym przez boki proporcjonalne, są sobie podobne. Podobnie dowiedlibyśmy podobieństwa innych trójkątów, jakakolwiek by była liczba boków wielokątów danych; więc dwa wielokąty podobne składają się z jednakowej liczby trójkątów odpowiednio podobnych i podobnie ułożonych.

Uwaga. Równie jest sprawiedliwe twierdzenie odwrotne: *Jeżeli każdy z*

dwóch wielokątów, składa się z jednakowej liczby trójkątów odpowiednio podobnych i podobnie ułożonych, dwa wielokąty są sobie podobne.

Gdyż dla podobieństwa trójkątów mamy $\angle ABC = \angle FGH$, $\angle BCA = \angle GHF$, $\angle ACD = \angle FHJ$; więc $\angle BCD = \angle GHJ$, $\angle CDE = \angle HJK$ i t. d. Nadto będzie $AB : FG = BC : GH = AC : FH = CD : HJ$ i t. d., więc dwa wielokąty, mają kąty równe i boki odpowiednio proporcjonalne, a tém samém są sobie podobne.

PODANIE XXVII.

Twierdzenie.

Obwody dwóch wielokątów podobnych mają się do siebie, jak boki odpowiednie; a ich powierzchnie, jak kwadraty z tychże boków.

Gdyż, 1) z podobieństwa wielokątów mamy (fig. 129) $AB : FG = BC : GH = CD : HJ$, i t. d. a z tego szeregu stosunków równych można wyprowadzić: jak się ma summa poprzedników $AB + BC + CD +$ i t. d., czyli obwód pierwszego wielokąta, do summy następników $FG + GH + HJ$ i t. d., czyli do obwodu drugiego wielokąta, tak się ma którykolwiek poprzepnik do swego następnika, czyli tak się ma np. bok AB jednego wielokąta, do boku jemu odpowiedniego FG w drugim wielokącie.

2) Ponieważ trójkąty ABC i FGH są sobie podobne, więc $ABC : FGH = \overline{AC}^2 : \overline{FH}^2$; podobnie dwa trójkąty podobne ACD i FHJ dają $ACD : FHJ = \overline{AC}^2 : \overline{FH}^2$; więc, dla wspólnego stosunku $\overline{AC}^2 : \overline{FH}^2$, będzie:

$$ABC : FGH = ACD : FHJ.$$

Podobnie rozumując znaleźlibyśmy:
 $ACD : FHJ = ADE : FJK$,
 i t. d., jeżeli liczba trójkątów jest wię-
 ksza. Z tego szeregu stosunków ró-
 wnych otrzymamy, jak się ma summa
 poprzedników $ABC + ACD + ADE$, czy-
 li wielokąt $ABCDE$, do summy następ-
 ników $FGH + FHJ + FJK$, czyli do
 wielokąta $FGHJK$, tak się ma poprze-
 dnik ABC do swego następnika FGH ,
 czyli tak się ma $\overline{AB}^2$ do $\overline{FG}^2$; więc po-
 wierzchnie dwóch wielokątów podo-
 bnych mają się do siebie, jak kwadra-
 ty z boków odpowiednich.

Wniosek. Nakreśliwszy trzy wielo-
 kąty podobne, którychby boki odpo-
 wiednie były równe bokom trójkąta
 prostokątnego, wielokąt nakreślony na
 boku większym będzie równy summie
 dwóch innych; gdyż te trzy wielokąty
 mają się do siebie jak kwadraty z bo-

ków odpowiednich, że zaś kwadrat
 z przeciwprostokątnej jest równy sum-
 mie kwadratów z dwóch innych bo-
 ków trójkąta prostokątnego, więc i t. d.

PODANIE XXVIII.

Twierdzenie.

*Części dwóch cięciw AB i CD (fig.
 130), przecinających się w kole, są so-
 bie odwrotnie proporcjonalne, to jest:*
 $AO : DO = CO : OB$.

Połączmy punkta A i C tudzież B
 i D liniami AC i BD, dwa trójkąty
 ACO i BOD mają kąty przy O, jako
 wierzchołkiem stykające się, równe so-
 bie; kąt A jest równy kątowi D, gdyż
 oba są wpisane w jeden odcinek (pod.
 18 ks. II); dla téjże przyczyny kąt C =
 B; więc te trójkąty są sobie podobne,

i hoki ich odpowiednie stanowią proporcję, $AO : DO = CO : OB$.

Wniosek. Z tej proporcji wypada $AO \times OB = DO \times CO$; t. j. prostokąt wystawiony na częściach jednej cięciwy, jest równy prostokątowi z części cięciwy drugiej.

PODANIE XXIX.

Twierdzenie.

Jeżeli z punktu O, wziętego za kołem, poprowadzimy sieczne OB i OC, kończące się na łuku wklęsłym, całe sieczne będą odwrotnie proporcjonalne częściom ich zewnętrzny, t. j. będzie $OB : OC = OD : OA$.

Gdyż, połączwszy A z C i B z D liniami prostymi AC i BD, dwa trójkąty OAC i OBD, mając kąt O wspólny, kąt B = C (pod. 18 ks. II), są so-

bie podobne, i tém samém ich hoki odpowiednie stanowią proporcję:

$$OB : OC = OD : OA.$$

Wniosek. Więc prostokąt $OA \times OB$ jest równy prostokątowi $OC \times OD$.

Uwaga. Łatwo dostrzedz, że to twierdzenie ma wiele podobieństwa z poprzedzającym, i że tém tylko różni się od niego iż dwie cięciwy AB i CD, zamiast przecinać się wewnątrz, przecinają się zewnątrz koła. Twierdzenie następujące także może bydź uważane, jako przypadek szczególny tego samego twierdzenia.

PODANIE XXX.

Twierdzenie.

Przez punkt O (fig. 132), wzięty za kołem, poprowadziwszy styczną OA i sieczną OE, styczna będzie średnio geo-

metrycznie proporcjonalna między całą sieczną i częścią jej zewnętrzną, t. j. będzie $OC:OA=OA:OD$.

Gdyż połączwszy punkta A i D, tudzież A i C liniami AD i AC, trójkąty OAD i OAC mają kąt O wspólny; nadto kąt OAD utworzony przez styczną i cięciwę, ma za miarę połowę łuku AD i kąt C ma za miarę połowę tegoż łuku, więc kąt $OAD=C$, a tém samém trójkąty są sobie podobne a boki ich dają proporcye,

$$CO:OA=OA:OD.$$

Wniosek. Więc kwadrat OA^2 , jest równy prostokątowi $CO \times OD$.

PODANIE XXXI.

Twierdzenie.

W trójkącie ABC (fig. 133) podzieliwszy kąt A linią prostą AD na dwie

części równe, prostokąt z boków AB i AC będzie równy prostokątowi z odciinków BC i DC, więcej kwadratem z siecznej AD.

Przez trzy punkta A, B i C poprowadźmy okrąg koła, przedłużmy AD do przecięcia się z okręgiem i połączmy z sobą punkta C i E, linią prostą CE.

Trójkąt BAD jest podobny trójkątowi EAC; gdyż, podług przypuszczenia kąt $BAD=EAC$, i nadto kąt $B=E$, bo każdy z nich ma za miarę połowę łuku AC; więc te trójkąty są sobie podobne i boki ich odpowiednie dają proporcye: $BA:AE=AD:AC$, zkład wypada $BA \times AC=AE \times AD$; lecz $AE=AD+DE$, więc $BA \times AC=(AD+DE) \times AD=\overline{AD^2}+AE \times AD$; że zaś $AD \times DE=BD \times DC$ (pod. 28), więc nakoniec,

$$BA \times AC = \overline{AD^2} + BD \times DC.$$

PODANIE XXXII.

Twierdzenie.

W każdym trójkącie ABC (fig. 134) prostokąt z dwóch jego boków AB i AC jest równy prostokątowi, wystawionemu na średnicy CE, koła opisanego na trójkącie, i na prostopadłej AD, spuszczonej na bok jego trzeci BC.

Gdyż połączymy punkta A i E, trójkąty ABD i AEC są prostokątne, jeden przy punkcie D a drugi przy A, nadto kąt $B = E$; więc te trójkąty są sobie podobne i dają proporcję $AB : CE = AD : AC$ z kąd $AB \times AC = CE \times AD$.

Wniosek. Pomnożywszy każdą z tych ilości równych przez BC, otrzymamy $AB \times AC \times BC = CE \times AD \times BC$. Że zaś $AD \times BC$ jest dwa razy wzięta powierz-

chnia trójkąta (pod. 6), przeto iloczyn z trzech boków trójkąta, jest równy iloczynowi z jego powierzchni przez dwa razy wziętą średnicę koła na nim opisanego.

Uwaga. Można też dowieść, że powierzchnia trójkąta jest równa iloczynowi z jego obwodu przez półowę promienia koła wpisanego.

Gdyż trójkąty (fig. 87) AOD, BOC i AOC mając wspólny wierzchołek w punkcie O, mają za wspólną wysokość promień koła wpisanego; że zaś summa powierzchni tych trójkątów jest równa iloczynowi z summy ich podstaw AB, BC i AC przez pół promienia OD, więc powierzchnia trójkąta ABC jest równa iloczynowi z jego obwodu przez pół promienia koła wpisanego.

PODANIE XXXIII

Twierdzenie.

W czworokacie wpisanym ABCD (fig. 135) prostokąt z przekątnych AC i BD, jest równy summie prostokątów z boków przeciwległych, to jest: $AC \times BD = AB \times CD + AD \times BC$.

Weźmy łuk $CO = AD$, i poprowadźmy linię BO , która przetnie przekątną AC w punkcie J .

Kąt $ABD = CBJ$; gdyż pierwszy ma za miarę pół łuku AD , a drugi pół łuku CO , równego AD ; kąt $ADB = BCJ$, gdyż oba są wpisane w odcinek AOB ; więc trójkąt ABD jest podobny trójkątowi JBC , i tém samém mamy proporcję $AD : CJ = BD : BC$; zkad $AD \times BC = CJ \times BD$. Powiadam nadto, że trójkąt ABJ jest podobny trójkątowi BDC ;

gdyż, jeżeli do każdego z łuków równych AD i CO dodamy łuk OD , będzie łuk $AO = DC$, a zatém kąt $ABJ = DBC$; nadto kąt $BAJ = BDC$, jako kąty wpisane w jeden odcinek; więc trójkąty ABJ i DBC są sobie podobne, i ich boki odpowiednie dają proporcję, $AB : BD = AJ : CD$; zkad wypada $AB \times CD = AJ \times BD$.

Dodając do siebie dwa znalezione wypadki, i uważając że $AJ \times BD + CJ \times BD = (AJ + CJ) \times BD = AC \times BD$, otrzymamy $AD \times BC + AB \times CD = AC \times BD$.

Uwaga. Takim samym sposobem można dowieść jeszcze innego twierdzenia o czworokacie wpisanym w koło.

Trójkąty podobne ABD i BJC dają proporcję $BD : BC = AB : BJ$, zkad $BJ \times BD = BC \times AB$. Połączywszy punkta C i O , utworzy się trójkąt JOC podobny ABJ , który będzie

podobny trójkątowi BDC, a tém samym, $BD:CO = DC:OJ$; zkład $OJ \times BD = CO \times DC$, albo ponieważ $CO = AD$, będzie $OJ \times BD = AD \times DC$. Dodając do siebie dwa wypadki znalezione i uważając że $BJ \times BD + OJ \times BD$ sprowadza się do $BO \times BD$, będzie,
 $BO \times BD = AB \times BC + AD \times DC$.

Wziąwszy $BP = AD$, i poprowadzwszy CKP znaleźlibyśmy zapomocą podobnego rozumowania,

$$CP \times CA = AB \times AD + BC \times CD.$$

Lecz ponieważ łuk BP jest równy CO, więc dodawszy do każdego z nich BC, będzie łuk CBP = BCO, a zatem cięciwa CP jest równa cięciwie BO, i następnie prostokąty $BO \times BD$ i $CP \times CA$ mają się do siebie jak BD do CA; więc,

$$BD:CA = AB \times BC + AD \times DC:AD \times AB + BC \times CD.$$

A zatem, dwie przekątne czworokąta wpisanego w koło mają się do siebie, jak summy prostokątów z boków dotykających końców przekątnych.

Te dwa twierdzenia mogą służyć do znalezienia przekątnych, mając wiadome boki czworokątów.

PODANIE XXXIV.

Twierdzenie.

Niech będzie punkt P (fig. 136), dany wewnątrz koła na promieniu AC, obierzmy na przedłużeniu zewnętrzném promienia punkt Q w takiej odległości, aby było $CP:CA = CA:CQ$; jeżeli jakkolwiek punkt M obrany na okręgu połączymy z punktami P i Q liniami MP i MQ, mówię że stosunek pomiędzy temi liniami wszędzie jest jednaki, i będzie $MP:MQ = AP:AQ$.

Gdyż podług przypuszczenia mamy $CP:CA=CA:CQ$; podstawivszy CM zamiast CA, będzie $CP:CM=CM:CQ$; więc trójkąty CPM i CQM mają kąt C wspólny, utworzony przez boki proporcjonalne, a zatem są sobie podobne (pod. 20), więc trzeci bok MP ma się do trzeciego boku MQ jak CP do CM albo do CA. Że zaś proporcja $CP:CA=CA:CQ$ daje, $CP:CA=CA-CP:CQ-CA$ czyli $CP:CA=AP:AQ$, więc $MP:MQ=AP:AQ$.

ZAGADNIENIA.

DO KSIĘGI TRZECIEJ.

ZAGADNIENIE I.

Daną linię prostą podzielić na ilekolwiek części równych, albo na części proporcjonalne danym liniom.

I. Niech będzie dana linia AB (fig. 137), do podzielenia na 5 części równych; przez punkt A poprowadźmy linię nieograniczoną AG i wzięwszy dowolną wielkość AC, przenieśmy ją na linię AG razy pięć. Połączmy ostatni punkt podziału G z końcem B li-

nią BG, i poprowadźmy do niej równoległą CJ; a powiadam, że AJ będzie piątą częścią linii AB, i że tém samem przeniosłszy AJ na AB razy pięć, linia AB zostanie podzielona na pięć części równych.

Gdyż, linia CJ równoległa do GB dzieli boki AB i AG proporcjonalnie w punktach C i J (pod. 15); że zaś AC jest piątą częścią AG, więc AJ jest piątą częścią linii AB.

2. Niech będzie dana linia AB (fig. 138) do podzielenia na części proporcjonalne liniom P, Q i R. Przez koniec A poprowadźmy linię nieograniczoną AG i weźmy na niej $AC = P$, $CD = Q$, $DE = R$, połączmy końce E i B linią prostą GB, a przez punkta C i D poprowadźmy linie CJ i DK równoległe do EB; mówię że linia AB będzie podzielona na części AJ, JK i KB, proporcjonalne liniom danym P, Q i R.

Gdyż, dla równoległości linii CJ, DK i EB, części AJ, JK i KB są proporcjonalne częściom AC, CD i CE (pod. 15), które podług wykreślenia są równe liniom danym P, Q i R.

ZAGADNIENIE II.

Do trzech linii danych A, B i C znaleźć czwartą geometrycznie proporcjonalną.

Poprowadźmy dwie linie nieograniczone DE i DF (fig. 139), któreby czyniły z sobą kąt jakikolwiek. Na linii DE odetnijmy część $DA = A$ i $DB = B$, na DF weźmy $DC = C$, połączmy punkt A z C, a przez punkt B poprowadźmy linię BX równoległą do AC; mówię że DX będzie czwartą proporcjonalną żadaną; gdyż linia BX jest

równoległa do AC, więc $DA:DB = DC:DX$; ponieważ zaś trzy pierwsze wyrazy tej proporcji są równe trzem liniom danym, przeto DX jest żądaną linią.

Wniosek. Podobnież można znaleźć trzecią geometrycznie proporcjonalną do dwóch linii A i B; gdyż ona będzie to samo, co czwarta geometrycznie proporcjonalna do trzech linii A, B i C.

ZAGADNIENIE III.

Znaleść średnio geometrycznie proporcjonalną do dwóch danych linii A i B.

Na linii nieograniczonej DF (fig. 140) weźmy $DE = A$ i $EF = B$: na całej linii DF, jako na średnicy, opiszmy półokrąg DGF, z punktu E wystawmy linię EG prostopadłą do średnicy, któ-

ra przetnie się z okręgiem w punkcie G; powiadam że EG będzie średnio geometrycznie proporcjonalną żądaną.

Gdyż prostopadła GE, spuszczone na średnicę z punktu G, obranego na okręgu koła, jest średnio geometrycznie proporcjonalna między dwoma odciinkami DE i EF średnicy (pod. 13), równemi danym liniom A i B.

ZAGADNIENIE IV.

Daną linię AB (fig. 141) podzielić na takie dwie części, aby część większa była średnio geometrycznie proporcjonalna między całą linią i częścią jej mniejszą.

Z końca B linii AB wyprowadźmy do niej prostopadłą BC, równą połowie linii AB, z punktu C jako ze środka, promieniem BC opiszmy okrąg koła, poprowadźmy linię AC, która przetnie

się z okręgiem w punkcie D, a wzięwszy na danej linii $AF=AD$, mówię że linia AB w punkcie F będzie podzielona w sposób żądany, t. j. że będzie $AB:AF=AF:FB$.

Linia AB, jako prostopadła do promienia BC, przechodząca przez koniec jego, jest styczną z kołem; więc, przedłużwszy AC do przecięcia się z okręgiem w E, będzie $AE:AB=AB:AD$, i $AE-AB:AB=AB-AD:AD$. Że zaś promień BC jest połową linii AB, więc średnica DE jest równa linii AB, i tym samym $AE-AB=AD=AF$; ponieważ $AF=AD$, przeto $AB-AD=FB$; a zatem mamy $AF:AB=FB:AF$, i odmieniwszy porządek między wyrazami, będzie $AB:AF=AF:FB$.

Uwaga. Ten sposób dzielenia linii AB nazywa się dzieleniem jej w stosunku średnim i skrajnym; później ujrzymy

jego zastosowania. Można dostrzedz że sieczna AE w punkcie D jest podzielona w stosunku średnim i skrajnym; gdyż, dla równości AB i DE, mamy $AE:DE=DE:AD$.

ZAGADNIENIE V.

Przez punkt A, dany między ramionami kąta BCD (fig. 142), poprowadzić linię prostą, którejby części AB i AD, zawarte między punktem A i ramionami kąta, były sobie równe.

Przez punkt A poprowadźmy linię AE równoległą do CD, odetnijmy $BE=CE$, a linia BAD, poprowadzona przez punkta B i A, będzie żadaną.

Gdyż, dla równoległości AE i CD, mamy $BE:EC=BA:AD$; że zaś $BE=EC$, przeto i $BA=AD$.

ZAGADNIENIE VI.

Wystawić kwadrat równoważny z równoległobokiem, lub trójkątem danym.

1. Niech będzie dany równoległobok ABCD (fig. 143), którego podstawą jest AB, a wysokością DE; znajdziemy średnio geometrycznie proporcjonalną XY między AB i DE (zag. 3); mówię, że kwadrat wystawiony na linii XY, będzie równoważny z równoległobokiem ABCD. Gdyż z wykreślenia mamy $AB:XY=XY:DE$; więc $XY^2=AB \times DE$; że zaś $AB \times DE$ jest miarą danego prostokąta, a XY^2 znalezionego kwadratu, przeto znaleziony kwadrat jest równoważny z prostokątem danym.

2. Niech będzie dany trójkąt ABC (fig. 144), którego podstawą jest BC, a wysokością AD; znajdziemy średnio

geometrycznie proporcjonalną XY między BC i półową AD; mówię że kwadrat wystawiony na linii XY, będzie równoważny z trójkątem ABC.

Gdyż z proporcji $BC:XY=XY:\frac{1}{2}AD$ wypada $XY^2=BC \times \frac{1}{2}AD$; przeto kwadrat z XY jest równoważny trójkątowi ABC.

ZAGADNIENIE VII.

Na linii danej AD (fig. 145) wystawić prostokąt ADEX równoważny prostokątem danym ABFC.

Wynajdziemy czwartą geometrycznie proporcjonalną AX do trzech linii AD, AB i AC; mówię że prostokąt wystawiony na liniach AD i AX, będzie równoważny prostokątowi ABFC.

Gdyż z proporcji $AD:AB=AC:AX$ wypada $AD \times AX=AB \times AC$; więc

prostokąt ADEX jest równoważny prostokątowi ABFC.

ZAGADNIENIE VIII.

Znaleść w liniach stosunek prostokąta z dwóch danych linii A i B (fig. 148), do prostokąta z dwóch innych linii C i D.

Niech będzie X czwartą geometrycznie proporcjonalną do trzech linii B, C i D, a mówię, że stosunek linii A i X będzie równy stosunkowi pomiędzy prostokątami AXB i CXD.

Gdyż z proporcji $B:C=D:X$ wypada $C \times D = B \times X$, a zatem $A \times B : C \times D = A \times B : B \times X = A:X$.

Wniosek. Więc aby mieć stosunek pomiędzy kwadratami z linii A i C, należy znaleźć trzecią geometrycznie proporcjonalną X do dwóch linii A i C.

tak aby było $A:C=C:X$, a będzie $A^2:C^2=A:X$.

ZAGADNIENIE IX.

Znaleść stosunek w liniach iloczynu z trzech linii A, B i C (fig. 149), do iloczynu z trzech innych linii P, Q i R.

Znajdźmy czwartą geometrycznie proporcjonalną X do trzech linii P, A i B, do trzech linii C, Q i R znajdziemy także czwartą geometrycznie proporcjonalną Y: a dwie linie X i Y mieć się będą do siebie jak iloczyny $A \times B \times C$ i $P \times Q \times R$.

Gdyż z proporcji $P:A=B:X$, wypada $A \times B = P \times X$; pomnożywszy obie ilości przez C, będzie $A \times B \times C = C \times P \times X$. Podobnie z proporcji $C:Q=R:Y$, wypada $Q \times R = C \times Y$, a pomnożywszy obie ilości przez P będzie $P \times Q \times R = P \times C \times Y$; więc

iloczyn $A \times B \times C$ tak się ma do $P \times Q \times R$ jak $C \times P \times X$ do $P \times C \times Y$, czyli jak się ma X do Y .

ZAGADNIENIE X.

Znaleść trójkąt równoważny danemu wielokątowi.

Niech będzie dany wielokąt ABCDE (fig. 146). Poprowadźmy przekątną CE, która oddzieli trójkąt CDE; przez punkt D przeciągnijmy DF równoległą do CE, a ta spotka się z przedłużeniem boku AE w punkcie F; połączmy punkta C i F, a wielokąt dany ABCDE będzie równoważny z wielokątem ABCE, który ma mniej jednym bokiem od tamtego.

Gdyż trójkąty CDE i CFE, mając wspólną podstawę CE, mają także wspólną wysokość, bo wierzchołki ich

D i F leżą na linii prostej DF równoległej do podstawy; więc są sobie równoważne. Dodając do każdego z tych trójkątów wielokąt ABCE, otrzymamy wielokąty ABCDE i ABCEF sobie równoważne.

Podobnież na miejsce trójkąta ABC, można otrzymać trójkąt jemu równoważny AGC, i takim sposobem pięciokąt ABCDE zamieni się na trójkąt GCF, z nim równoważny.

Toż samo postępowanie możnaby zastosować do każdego innego wielokąta; bo otrzymując za każdym działaniem wielokąt mający mniej jednym bokiem od poprzedzającego, dojdziemy nakoniec do trójkąta równoważnego z danym wielokątem.

Uwaga. Widzieliśmy już że każdy trójkąt można zamienić na kwadrat jemu równoważny (zag. 6); więc zawsze można otrzymać kwadrat równoważny

jakiemubądź wielokątowi prostokreślnemu: co nazywa się *kwadraturą* wielokątów prostokreślnych.

Zadanie *kwadratury koła* ma na celu, znalezienie kwadratu równoważnego z kołem danej średnicy.

ZAGADNIENIE XI.

Znaleść kwadrat równy summie lub różnicy dwóch kwadratów danych.

Niech będą A i B boki kwadratów danych.

1) Jeżeli mamy znaleźć kwadrat równy summie tych kwadratów, poprowadźmy dwie linie nieograniczone (fig. 147) ED i EF prostopadłe do siebie, odetnijmy $ED=A$ i $EG=B$, a linię prostą DG , łączącą punkta D i G będzie bokiem żadanego kwadratu.

Gdyż w trójkącie prostokątnym DEG kwadrat z DG jest równy summie kwadratów z ramion kąta prostego ED i EG .

2) Jeżeli mamy znaleźć kwadrat równy różnicy dwóch kwadratów danych, nakreślmy podobnież kąt prosty FEH , odetnijmy GE równe bokowi mniejszemu z dwóch danych, i promieniem GH równym drugiemu bokowi opiszmy z punktu G , jako ze środka, łuk, któryby się przeciął z EH w punkcie H : mówię że kwadrat wystawiony na EH , będzie równy różnicy kwadratów z boków danych A i B .

Gdyż trójkąt GEH jest prostokątny, jego przeciwprostokątna $GH=A$, i bok $GE=B$; więc kwadrat wystawiony na EH i t. d.

Uwaga. Tym sposobem można otrzymać kwadrat równy summie tylu kwadratów, ilu się podoba; gdyż wykreślenie, które służy do zamiany dwóch na jeden, doprowadzi też do dwóch kwadratów na miejsce trzech, i do utrzymania jednego na miejsce dwóch

ostatnich kwadratów; toż samo rozumieć i o większej ich liczbie. Podobnie postępowałibyśmy, gdyby potrzeba było, odjąć kwadrat którykolwiek od summy innych.

ZAGADNIENIE XII.

Znaleść kwadrat, któryby się miał do kwadratu danego ABCD, jak się ma linia M do linii N (fig. 150).

Na linii nieograniczonej EG weźmy $EF=M$ i $FG=N$: na EG jako na średnicy opiszmy półkole, i z punktu F wystawmy prostopadłą FH do średnicy. Przez punkt H poprowadźmy cięciwy HG i HE, weźmy na pierwszej z nich HK, równe bokowi AB danego kwadratu; przez punkt K poprowadźmy linię KJ równoległą do EG, a HJ będzie bokiem kwadratu szukanego.

Gdyż dla równoległości linii KJ i GE, mamy $HJ:HK=HE:HG$, i tém samym $\overline{HJ}^2:\overline{HK}^2=\overline{HE}^2:\overline{HG}^2$; a że w trójkącie prostokątnym EHG (pod. 23) $\overline{HE}^2:\overline{HG}^2=EF:GF$, czyli $\overline{HE}^2:\overline{HG}^2=M:N$, więc $\overline{HJ}^2:\overline{HK}^2=M:N$; że zaś $HK=AB$, przeto kwadrat z HJ tak się ma do kwadratu z AB, jak M do N.

ZAGADNIENIE XIII.

Na boku FG (fig. 129) odpowiednim bokowi AB, nakreślić wielokąt podobny wielokątowi danemu ABCDE.

W wielokącie danym poprowadźmy przekątne AC i AD: na boku FG, przy punkcie F nakreślmy kąt $GFH=BAC$, i przy punkcie G kąt $FGH=ABC$; linie FH i GH przetną się z sobą w punkcie H i dadzą trójkąt FGH, podobny trój-

kątowi ABC: podobnież na boku FH odpowiednim bokowi AC, wystawmy trójkąt FJH podobny trójkątowi ADC, i na FJ odpowiednim AD wystawmy trójkąt FJK podobny ADE. Wielokąt FGHJK będzie wielokątem żądanym, podobnym wielokątowi ABCDE.

Gdyż te dwa wielokąty składają się z jednakowej liczby trójkątów podobnych i podobnie ułożonych (pod. 26).

ZAGADNIENIE XIV.

Mając dane dwa wielokąty podobne, wystawić trzeci podobny każdemu, i równy ich summie, lub różnicy.

Niech będą A i B boki odpowiednie dwóch wielokątów danych, znajdziemy bok X kwadratu równego summie, lub różnicy kwadratów wystawionych na A i B: a X będzie boki wielokąta

szukanego, odpowiednim bokom A i B wielokątów danych. Sam zaś wielokąt nakreślimy podług zagadnienia poprzedzającego.

Gdyż wielokąty podobne mają się do siebie, jak kwadraty z boków odpowiednich; że zaś kwadrat z boku X jest równy summie, albo różnicy kwadratów z linii A i B, przeto wielokąt z boku X jest równy summie, albo różnicy wielokątów jemu podobnych, wystawionych na bokach A i B.

ZAGADNIENIE XV.

Wystawić wielokąt podobny wielokątowi danemu, któryby się miał do niego, jak się ma M do N.

Niech będzie A boki wielokąta danego, a X boki jemu odpowiednim w wielokącie szukanym; potrzeba aby się miał

kwadrat z X do kwadratu z A, jak się ma M do N (pod. 27): znajdziemy X zapomocą zagadnienia XII, a znając X, uskutecznimy resztę podług zagadnienia XIII.

ZAGADNIENIE XVI.

Wystawić wielokąt podobny wielokątowi P i równoważny z wielokątem Q (fig. 151).

Znajdźmy bok M kwadratu równoważnego z wielokątem P, i bok N kwadratu równoważnego z wielokątem Q. Niech będzie X czwartą geometrycznie proporcjonalną do trzech linii danych M, N i AB; a wielokąt podobny wielokątowi P, wystawiony na boku X, odpowiednim bokowi AB, będzie równoważny z wielokątem Q.

Gdyż oznaczywszy przez Y wielokąt wystawiony na X, będzie $P:Y = \overline{AB}^2$:

X^2 ; że zaś podług wykreślenia AB: $X = M:N$, albo $\overline{AB}^2 : X^2 = M^2 : N^2$, więc $P:Y = M^2 : N^2$. A że podług wykreślenia mamy, $M^2 = P$ i $N^2 = Q$, przeto $P:Y = P:Q$; zkaż $Y = Q$, i tym samym wielokąt Y jest podobny wielokątowi P i równoważny z wielokątem Q.

ZAGADNIENIE XVII.

Wystawić prostokąt równoważny z danym kwadratem C, którego boki przyległe czyniły sumę daną AB (fig. 152).

Na AB jako na średnicy, opiszmy półokrag koła; w odległości AD równiej bokowi danego kwadratu C, poprowadźmy linię DE równoległą do średnicy. Z punktu E, w którym równoległa przecina okrag, spuśćmy prostopadłą EF na śred-

dnicę: AF i FB będą bokami szukanego prostokątu.

Gdyż summa tych boków jest równa AB, a prostokąt z nich $AF \times FB$ jest równy kwadratowi z EF (pod. 25), czyli kwadratowi z AD; przeto prostokąt $AF \times FB$ jest równoważny z kwadratem danym C.

Uwaga. Aby zagadnienie było podobne do rozwiązania, potrzeba żeby odległość AD nie przechodziła promienia, to jest aby bok kwadratu C nie był większy od połowy linii AB.

ZAGADNIENIE XVIII.

Wystawić taki prostokąt równoważny z kwadratem C (fig. 153), aby różnica między jego bokami przyległymi była równa AB.

Na linii danéj AB, jako na średnicy, opiszmy okrąg koła, przez koniec

średnicy poprowadźmy styczną AD równą bokowi kwadratu C, przez punkt D i środek O poprowadźmy sieczną DE; powiadam że DE i DF będą bokami przyległymi żadanego prostokątu.

Gdyż 1) różnica pomiędzy temi bokami jest równa średnicy EF, czyli AB; 2) prostokąt $DE \times DF$ będąc równy AD^2 (pod. 30), jest równoważny z kwadratem danym C.

ZAGADNIENIE XIX.

Znaleść wspólną miarę, jeżeli się ona znajduje, między przekątną i bokiem kwadratu.

Niech będzie jakikolwiek kwadrat ABCG, i jego przekątna AC (fig. 154).

Aby rozwiązać zagadnienie potrzeba przenieść CB na CA tyle razy, ile razy można to uskutecznić (zag. 17 ks.

II), i dla tego niech będzie pół-kole DBE opisane promieniem CB ze środka C: wiemy że CB zawiera się w AC raz jeden z resztą AD, wypadkiem więc pierwszego działania jest iloraz 1 z resztą AD, którą należy porównać z BC, albo jemu równem AB.

Można odciąć $AF = AD$, i przenieść AF na AB, znaleźlibyśmy że mieści się dwa razy z resztą: ponieważ zaś ta reszta i następujące po niej, coraz bardziej zmniejszając się, dla swjej małości uchodziłyby naszej uwagi, przeto podobne postępowanie byłoby niedokładnym postępowaniem mechanicznym, które nie dałoby poznać, czyli linie AC i CB mają, lub nie mają wspólnej miary; lecz nastrocza się tutaj bardzo prosty sposób uniknięcia linii zmniejszających się, podług którego będziemy mieli do czynienia z liniami ciągle jednakowo wielkimi.

I tak, jeżeli kąt ABC jest prosty, linia AB jest styczną, i AE sieczną że zaś obie przechodzą przez jeden punkt, przeto mamy (pod. 30) $AD : AB = AB : AE$. W drugim więc działaniu, w którym idzie o porównanie AD z AB, można wziąć stosunek AB do AE, zamiast stosunku AD do AB; że zaś AB albo jemu równe CD mieści się w AE dwa razy z resztą AD, przeto w wypadku z drugiego działania będzie iloraz 2 z resztą AD, którą potrzeba porównywać z AB.

Działanie trzecie, w którym potrzeba porównywać AD z AB, sprowadzi się do porównywania AB, albo jemu równego CD z AE, i otrzymamy w ilorazie 2 i na resztę AD.

Ztąd widzimy że działanie nigdy się nie ukończy, i że tém samém przekątna i bok kwadratu nie mają wspólnej miary; ta prawda, którą już zna-

— 230 —

KSIĘGA CZWARTA.

O WIELOKĄTACH FOREMNYCH I

O MIERZENIU KOŁA.

Opisy.

Wielokąt równokątny i zarazem równoboczny, nazywa się *wielokątem foremnym*.

Wielokąty o jakiegokolwiek liczbie boków mogą być foremne. Trójkąt równoboczny jest wielokątem foremnym o trzech bokach; kwadrat jest wielokątem foremnym o czterech bokach.

PODANIE I.

Twierdzenie.

Dwa wielokąty foremne o jednakowej liczbie boków, są sobie podobne.

Niech będą np. dwa sześciokąty foremne ABCDEF i *abcdef* (fig. 155): suma kątów w obu wielokątach jest jednakowa, i w każdym z nich równa ośmiu kątom prostym (pod. 28 ks. I). Kąt A równie jak i kąt *a*, jest szóstą częścią tej sumy, a zatem kąty A i *a* są sobie równe; toż samo rozumieć o kątach B i *b*, C i *c*, i t. d.

Nadto, ponieważ z opisu wielokątów foremnych boki AB, BC, CD, i t. d. są sobie równe, i boki *ab*, *bc*, *cd* i t. d. także są sobie równe, przeto widocznie mamy proporcye $AB : ab = BC : bc = CD : cd$ i t. d. Więc dwa wielokąty

w mowie będące, mają kąty równe i boki odpowiednie proporcjonalne, a tém samém są sobie podobne (opis. 2, ks. III).

Wniosek. Obwody dwóch wielokątów foremnych o jednakowej liczbie boków, mają się do siebie jak boki odpowiednie, a ich powierzchnie jak kwadraty z tychże boków (pod. 27, ks. III).

Uwaga. Kąt wielokąta foremnego można oznaczyć, podobnie jak kąt wielokąta równokątnego (pod. 20, ks. I), mając wiadomą liczbę jego boków.

PODANIE II.

Twierdzenie.

Każdy wielokąt foremny może być wpisany i opisany na kole.

1) Niech będzie $ABCDE\dots$ wielokąt o którym mowa (fig. 156): wystawmy

sobie że przez trzy punkta A, B i C poprowadzono okrąg koła, którego środkiem jest punkt O , i OP prostopadłą spuszczoną ze środka na bok BC ; połączmy punkt A z O i O z D .

Dwa czworokąty $OPCD$ i $OPBA$ przystaną do siebie: i w rzeczy samej bok OP jest wspólny dla obu, kąt $OPC = OPB$ jako proste, przeto bok PC pójdzie po boku PB , i punkt C padnie na B . Nadto w wielokącie foremnym kąt $PCD = PBA$, a zatem bok CD pójdzie po BA , a ponieważ $CD = BA$, przeto punkt D padnie na A , i dwa czworokąty przystaną do siebie. Ponieważ odległość OD jest równa odległości OA , zatem okrąg koła przechodzący przez trzy wierzchołki wielokąta A, B i C , przejdzie i przez czwarty D : drogą podobnego rozumowania okażemy, że okrąg koła przechodzący przez trzy wierzchołki B, C i D , przejdzie i przez E , i

20*

t. d.; więc okrag koła poprowadzony przez trzy wierzchołki A, B i C przejdzie przez wszystkie inne, i wielokąt będzie wpisany w koło.

2. Wszystkie boki AB, BC, CD, i t. d. jako cięciwy równe, są równo oddalone od środka koła opisanego na danym wielokącie (pod. 8 ks. II); więc okrag koła opisany z punktu O jako ze środka promieniem OP, zetknie się z bokiem BC i z każdym innym w środku jego, a tém samém koło będzie wpisane w wielokąt, czyli wielokąt opisany na kole.

Uwaga I. Punkt który jest środkiem koła wpisanego i opisanego, może być uważany jako środek wielokąta, a ztąd kątem środkowym wielokąta nazywa się kąt AOB, utworzony przez dwa promienie poprowadzone do końców boku AB.

Ponieważ wszystkie cięciwy AB, BC i t. d. są sobie równe, przeto wszystkie kąty środkowe także są sobie równe; a tém samém znajdziemy wartość każdego z nich, dzieląc cztery kąty proste przez liczbę boków wielokąta.

II, Aby w dane koło wpisać wielokąt foremny o jakiegokolwiek liczbie boków, potrzeba okrag koła podzielić na tyle części równych, ile ma mieć boków wielokąt wpisany; gdyż jeżeli łuki będą równe i cięciwy AB, BC, CD i t. d. (fig. 158) podpierające je, będą także równe sobie; że zaś trójkąty ABO, BOC, COD i t. d. mając boki równe, są sobie równe, przeto wszystkie kąty ABC, BCD, CDE i t. d. będą sobie równe; i wielokąt ABCDE... będzie foremny.

PODANIE III.

Zagadnienie.

W dane koło wpisać kwadrat.

Poprowadźmy (fig. 157) dwie średnice AC i BD prostopadłe do siebie, połączmy z sobą końce A, B, C i D, a czworokąt ABCD będzie kwadratem wpisanym; gdyż kąty AOB, BOC i t. d. jako proste są sobie równe, a zatem i cięciwy AB, BC i t. d. są sobie równe.

Uwaga. Ponieważ trójkąt BOC jest prostokątny i równoramienny, przeto mamy (pod. 11 ks. III) $BC:BO = \sqrt{2}:1$; a zatem, bok kwadratu wpisanego w koło ma się do promienia, jak pierwiastek kwadratowy z 2 do 1.

PODANIE IV.

Zagadnienie.

W dane koło wpisać sześciokąt foremny i trójkąt równoboczny.

Przypuśćmy że zagadnienie jest rozwiązane, i że boki sześciokąta foremnego wpisanego (fig. 158) jest AB: poprowadziwszy promienie AO i OB, mówię że trójkąt AOB będzie równoboczny.

Gdyż kąt AOB jest szóstą częścią czterech kątów prostych; wzięwszy zatem kąt prosty za jedność, będzie $AOB = \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$; dwa inne kąty ABO i BAO razem wzięte ważą $2 - \frac{2}{3}$, czyli $\frac{4}{3}$, a ponieważ one są sobie równe, przeto każdy z nich $= \frac{2}{3}$; więc trójkąt ABO jest równoboczny, i tym samym bok sześciokąta foremnego wpisanego w koło, równy promieniowi.

Ztąd wypada, że aby w dane koło wpisać sześciokąt foremny, należy przenieść promień sześć razy na okrag, a dojdziemy do tego samego punktu, od którego podział zaczęliśmy uskuteczniać.

Mając wpisany sześciokąt foremny ABCDEF, otrzymamy trójkąt równoboczny wpisany: jeżeli połączymy pierwszy z trzecim i piątym, a piąty z trzecim wierzchołkiem sześciokąta.

Uwaga. Czworokąt ABCO jest kwadratem ukośnym, gdyż $AB = BC = CO = AO$; przeto summa (pod. 14, ks. III) kwadratów z przekątnych $\overline{AC}^2 + \overline{BO}^2$ jest równa summie kwadratów z boków $4 \overline{AB}^2$, czyli $4 \overline{BO}^2$; odjawszy z jednej i z drugiej strony $\overline{BO}^2$, zostanie $\overline{AC}^2 = 3 \overline{BO}^2$, przeto $\overline{AC}^2 : \overline{BO}^2 = 3 : 1$, czyli $AC : BO = \sqrt{3} : 1$; więc bok trójkąta równobocznego wpisanego w koło, tak się ma do promie-

nia tegoż koła, jak pierwiastek kwadratowy z 3 do jednośc.

PODANIE V.

Zagadnienie.

W dane koło wpisać dziesięciokąt foremny, a następnie pięciokąt i piętnastokąt.

Podzielmy promień AO (fig. 159) w stosunku średnim i skrajnym w punkcie M (zag. 4 ks. III), weźmy cięciwę AB równą części większej promienia, a ona będzie bokiem dziesięciokąta foremnego wpisanego, którą potrzeba przenieść na okrag razy dziesięć.

Gdyż połączymy B z M, mamy podług wykreślenia, $AO : OM = OM : AM$, a ponieważ $AB = OM$, przeto $AO : AB = AB : AM$; więc trójkąty ABO i ABM, mając kąt wspólny, utworzony przez

boki proporcjonalne, są sobie podobne, że zaś trójkąt OAB jest równoramienny, przeto i w trójkącie AMB mamy $AB = BM$; że zaś $AB = OM$, więc $MB = OM$ i trójkąt BMO jest równoramienny.

Kąt AMB, zewnętrzny względem trójkąta równoramiennego BMO, jest dwa razy większy od kąta wewnętrznego O (pod. 19 ks. I); że zaś kąt $AMB = MAB$, więc w trójkącie OAB każdy z kątów OAB i OBA, jest dwa razy większy od kąta przy wierzchołku O, a zatem trzy kąty trójkąta ważą pięć kątów O, i tym samym kąt O jest piątą dwóch, czyli dziesiątą częścią czterech kątów prostych; a zatem łuk AB jest dziesiątą częścią okręgu koła, a cięciwa AB jest bokiem dziesięciokąta foremnego.

Wniosek I. Połączwszy pierwszy z trzecim, trzeci z piątym, piąty z siódmym, siódmy z dziewiątym i dziewią-

ty z pierwszym wierzchołkiem dziesięciokąta foremnego, otrzymamy pięciokąt foremny ACEGJ.

II. Jeżeli AB jest bokiem dziesięciokąta foremnego, niech będzie AL bokiem sześciokąta, natenczas łuk $BL = \frac{1}{6} - \frac{1}{10} = \frac{1}{15}$ okręgu koła, więc cięciwa BL jest bokiem piętnastokąta foremnego wpisanego w koło. Widzimy zarazem, że łuk CL jest trzecią częścią łuku CB.

Uwaga. Mając wpisany wielokąt foremny, jeżeli podzielimy każdy z łuków, podpartych przez jego boki, na dwie części równe, i poprowadzimy cięciwy podpierające łuki wypadłe z podziału, natenczas otrzymamy wielokąt foremny wpisany w koło o dwa razy większej liczbie boków od danego: widzimy tedy, że kwadrat może posłużyć do wpisania w koło wielokątów fore-

mnych o 8, 16, 32, 64 i t. d. bokach. Podobnie sześciokąt posłuży do wpisania wielokątów foremnych o 12, 24, 48, i t. d. bokach; dziesięciokąt, o 20, 40, 80 i t. d., a piętnastokąt o 30, 60, 120 i t. d. bokach (*).

PODANIE VI.

Zagadnienie.

Mając dany wielokąt foremny ABCD... (fig. 160) wpisany w koło, opisać na témże kole wielokąt podobny.

(*) Długi czas mniemano, że zapomocą sposobów, które nam podaje geometrya elementarna, albo co jest to samo przez rozwiązanie równań stopnia pierwszego i drugiego, można wpisać i opisać na kole tylko wyżej wyliczone wielokąty; lecz Gauss w dziele *Disquisitiones arithmeticae*, Lipsiae 1801, dowiódł, że podobną drogą można wpisać wielokąt o siedemnastu bokach i w ogólności o $2^n + 1$ bokach, byleby $2^n + 1$ było liczbą pierwszą.

Przez środek T łuku AB poprowadźmy styczną GH, która będzie równoległa do cięciwy AB (pod. 10 ks. II), podobnież przez środek każdego innego łuku BC, CD i t. d. poprowadźmy styczną, a one przecinając się wydadzą wielokąt opisany GHJK.... podobny wielokątowi wpisanemu.

Łatwo dostrzedz że trzy punkta O, B i H leżą w linii prostej: trójkąty OTH i OHN mając przeciwprostokątną OH wspólną i bok OT = ON, są sobie równe (pod. 18 ks. I), a zatem kąt TOH = HON, i tém samym linia OH przechodzi przez środek B łuku TN; dla podobnej przyczyny punkt J znajduje się na przedłużeniu OC, i t. d. Ponieważ linia GH jest równoległa do AB, a HJ do BC, przeto kąt GHJ = ABC (pod. 26 ks. I); podobnież kąt HJK = BCD, i t. d.; więc

kąty wielokąta opisanego są równe kątom wielokąta wpisanego, i t. samém są równe pomiędzy sobą. Nadto, dla równoległości tych samych linii, mamy $GH:AB = OH:OB$, i $HJ:BC = OH:OB$, więc $GH:AB = HJ:BC$, że zaś $AB = BC$ przeto $GH = HJ$. Dla podobnej przyczyny $HJ = JK$, i t. d.; więc i boki wielokąta opisanego są sobie równe, a zatem ten wielokąt jest foremny i podobny wielokątowi wpisanemu.

Wniosek I. Odwrotnie, jeżeliby potrzeba było, wpisać w koło wielokąt $ABC...$, mając wielokąt na niém opisany $GHJK...$, byłoby dostatecznym poprowadzić przez wierzchołki $G, H, J, K, ...$ wielokąta danego linie OG, OH , i t. d., któreby się przecięły z okręgiem w punktach $A, B, C, ...$ a poprowadzwszy cięciwy AB, BC , i t. d. otrzymalibyśmy wielokąt żądany. Można

także w tym przypadku połączyć z sobą punkta zetknięcia T, N, P , i t. d. liniami TN, NP i t. d., a ztąd wyniknie wielokąt wpisany podobny opisanemu.

II. Ztąd wynika że można na daném kole opisać wielokąty foremne takie, jakie umiemy wpisywać.

PODANIE VII.

Twierdzenie.

Powierzchnia wielokąta foremnego jest równa iloczynowi z jego obwodu przez pół promienia koła wpisanego.

Niech będzie (fig. 160) wielokąt foremny $GHJK...$, powierzchnia trójkąta $GOH = GH \times \frac{1}{2}OT$, powierzchnia trójkąta $OHJ = HJ \times \frac{1}{2}ON$, że zaś $ON = OT$, więc powierzchnia obu trójkątów $= (GH + HJ) \times \frac{1}{2}OT$. Postępując tak

samo z innemi trójkątami znajdziemy, że powierzchnia summy wszystkich trójkątów, czyli powierzchnia całego wielokąta jest równa iloczynowi z summy podstaw GH, HJ, JK, i t. d., czyli z obwodu wielokąta przez $\frac{1}{2}OT$, to jest przez pół promienia koła wpisanego.

Uwaga. Promieniem OT koła wpisanego jest prostopadła, spuszczone z środka na bok którykolwiek.

PODANIE VIII.

Twierdzenie.

Obwody dwóch wielokątów foremnych o jednakowej liczbie boków mają się do siebie, jak promienie kół opisanych, albo jak promienie kół wpisanych; a ich powierzchnie jak kwadraty z tych samych promieni.

Niech będzie AB (fig. 161) bokiem jednego z wielokątów w mowie będących,

punkt O jego środkiem, a tem samem AO promieniem koła opisanego, a linia OD, prostopadła do AB promieniem koła wpisanego; podobnież niech będzie ab bokiem drugiego wielokąta podobnego tamtemu, o jego środkiem, oa i od promieniem koła wpisanego i opisanego. Obwody dwóch wielokątów mają się do siebie jak boki AB i ab; że zaś kąty A i a są sobie równe, jako połowy kątów w wielokątach, podobnież kąty B i b są sobie równe, więc trójkąty ABO i abo są sobie podobne, równie jak i trójkąty ADO i ado; więc $AB : ab = AO : ao = OD : od$; a zatem obwody wielokątów mają się do siebie, jak promienie AO i ao kół opisanych, albo jak promienie OD i od kół w nie wpisanych.

Powierzchnie tych samych wielokątów mają się do siebie, jak kwadraty z boków odpowiednich AB i ab; a tem

samém one mają się do siebie, jak kwadraty, z promieni OD i od kół wpisanych, albo jak kwadraty z promieni AO i ao kół na nich opisanych.

PODANIE IX

Twierdzenie.

Wszelka linia krzywa, albo łamana otaczająca od jednego do drugiego końca linie wypukłą AMB, jest dłuższa od linii otoczonej AMB (fig. 162).

Już wyżej powiedziano że linia wypukłą nazywamy linie krzywą, albo łamaną, lub też w części krzywą a w części łamaną, która linia prosta nie może przeciąć w większej liczbie punktów nad dwa. Jeżeliby linia AMB miała wklęsłości, natenczas nie byłaby wypukłą; gdyż łatwo dostrzedz, że linia prosta mogłaby ją przeciąć w więcej nad

dwa punkta. Łuki kół są wypukłe; lecz podanie obecne rozciąga się na linie jakiekolwiek, które czynią zadosyć wspomnianemu warunkowi.

To założywszy, jeżeliby linia AMB nie była mniejsza od każdej ją otaczającej linii, natenczas pomiędzy ostatniemi byłaby jedna krótsza od innych, i zarazem mniejsza od AMB, albo przynajmniej jej równa. Niech taką linią będzie ACDEB; pomiędzy liniami AMB i ACDEB poprowadźmy gdziekolwiek linie prostą PQ, która nie przecina linii AMB, lub też jest do niej styczną: linia prosta PQ krótsza od PCDEQ, a zatem podstawivszy zamiast części PCDEQ linie prostą PQ otrzymamy linie obejmującą APQB mniejszą od APDQB. Że zaś podług przypuszczenia linia APDQB miała być najkrótszą ze wszystkich otaczających, przeto to przypuszczenie nie może mieć

miejsca i t $\acute{e}$ m sam $\acute{e}$ m ka $\acute{z}$ da linia otaczająca jest d $\acute{l$ u $\acute{z}$ sza od AMB.

Uwaga. Zupełnie takim samym sposobem dowiedziemy, że wszelka linia wypukła i zamknięta AMB (fig. 163) jest krótsza od ka $\acute{z$ d $\acute{e}$ j linii ze wszech stron ją otaczającej, bądź to linia otaczająca FGH dotyka się linii AMB w jednym, lub kilku punktach, bądź też nie stykając się ją otacza.

PODANIE X.

Twierdzenie przybrane.

Mając dane dwa koła spółśrodkowe, zawsze można w większe wpisać wielokąt foremny, którego boki nie będą dotykały okręgu koła mniejszego, i na mniejsz $\acute{e}$ m można opisać wielokąt foremny, którego boki nie będą przecinały okręgu koła większego; to jest

tak w jednym jak w drugim przypadku boki wielokąta będą zawarte między dwóma okręgami.

Niech będą (fig. 164) CA i CB promienie danych kół spółśrodkowych. Przez punkt A poprowadźmy styczną kończącą się w punktach D i E, na okręgu większym. Wpiszmy w koło większe jeden z wielokątów jakie poprzednio nauczyliśmy się wpisywać, podzielmy następnie wszystkie łuki podparte przez boki wielokąta wpisanego na dwie części równe, i poprowadźmy cięciwy łuków wynikłych z podziału, a otrzymamy wielokąt foremny wpisany o dwa razy większ $\acute{e}$ j liczbie boków od poprzedniego. Dzielenie łuków na dwie części równe posuwajmy, dokąd nie dojdziemy do łuku mniejszego od DBE. Niech takim łukiem będzie MBN (przypuszczamy że jego środkiem jest B), widocznie że cięciwa MN jest bardzie $\acute{j}$

oddalona od środka jak DE, i że tém samém wielokąt, którego bokiem jest MN, nie może spotkać okręgu koła zakreślonego promieniem CA.

Toż samo założwszy, połączmy punkt C z M i N liniami CM i CN, które przetną się ze styczną w punktach P i Q; PQ będzie bokiem wielokąta opisanego na okręgu mniejszym, podobnego wielokątowi wpisanemu w koło większe, którego bokiem jest MN. Ponieważ CP jest mniejsze od CM, przeto wielokąt opisany nigdzie bokami swemi nie spotka się z okręgiem większym.

A zatem zapomocą jednego wykreślenia, można dojść do wielokąta wpisanego w koło większe, i wielokąta opisanego na kole mniejszem, których obwody będą zawarte między okręgami dwóch kół spółśrodkowych.

Uwaga. Mając dwa wycinki spółśrodkowe FCG i JCH można w wię-

kszej z nich wpisać *część wielokąta foremnego*, albo téż na mniejszym opisać *część wielokąta podobnego*, tak że obwody obu części będą zawarte między dwoma okręgami: dla tego dość będzie dzielić łuk na 2, 4, 8, i t. d. części równych dopóki nie dojdziemy do części mniejszej od DBE.

Częścią, albo *wycinkiem wielokąta foremnego* nazywamy figurę ograniczoną szeregiem cięciw równych, wpisanych w łuk FG od jednego końca jego do drugiego. Ta część ma główne własności wspólne z wielokątami foremnymi: kąty, a także i boki jej są sobie równe, można ją wpisać i opisać na kole; wszakże ona w ścisłym znaczeniu wyrazu nie stanowi pewnej części wielokąta foremnego, wyjąwszy jeżeliby łuk przez jej bok podparty, był jakąbądź częścią całego okręgu koła.

PODANIE XI.

Twierdzenie.

Okręgi kół mają się do siebie jak ich promienie, a powierzchnie jak kwadraty z tychże promieni.

Dla skrócenia oznaczmy przez *okr. CA* (fig. 165), okrąg koła, którego promieniem jest *CA*; mówię, że będzie $\text{okr. CA} : \text{okr. OB} = \text{CA} : \text{OB}$.

Jeżeli by bowiem ta proporcja nie miała miejsca, natenczas miałoby się *CA* do *OB*, jak się ma *okr. CA* do wyrazu czwartego większego, lub mniejszego od *okr. OB*; przypuśćmy że wyraz czwarty powinien być mniejszy, i dajmy na to że jest $\text{CA} : \text{OB} = \text{okr. CA} : \text{okr. OD}$. Wpiszmy w koło opisane promieniem *OB*, wielokąt foremny *EFGKLE*, którego by boki nie

dotykały okręgu opisanego promieniem *OD* (pod. 10), a w koło którego promieniem jest *CA* wpiszmy wielokąt *MNPSTM* podobny tamtemu.

To założwszy, ponieważ wielokąty są podobne, przeto ich obwody mają się do siebie jak promienie *CA* i *OB* kół na nich opisanych (pod. 8), i będzie $\text{MNPSTM} : \text{EFGKLE} = \text{CA} : \text{OB}$; że zaś podług przypuszczenia jest $\text{CA} : \text{OB} = \text{okr. CA} : \text{okr. OD}$, więc $\text{MNPSTM} : \text{EFGKLE} = \text{okr. CA} : \text{okr. OD}$. Lecz ta proporcja nie może mieć miejsca, gdyż obwód *MNPSTM* jest mniejszy od *okr. CA* (pod. 9), a obwód *EFGKLE* jest większy od *okr. OD*; a zatem nie może być, aby się miało *CA* do *OB*, jak się ma *okr. CA* do okręgu mniejszego od *okr. OB*, czyli mówiąc ogólniej, nie może być, aby się miał jeden promień do drugiego, jak się ma okrąg opisany pierwszym promieniem, do okręgu koła opi-

zanego promieniem mniejszym od drugiego.

Złąd wnoszę, że także nie może się mieć CA do OB, jak okr. CA do okręgu większego od okr. OB; gdyż jeżeliby taka proporeya miała miejsce, zmieniwszy porządek między wyrazami, otrzymalibyśmy że tak się ma OB do CA, jak okrąg koła większy od okr. OB do okr. CA, albo co jest to samo, jak okr. OB do okręgu mniejszego od okr. CA; a zatem miałby się promień do drugiego promienia, jak okrąg koła opisany pierwszym promieniem do okręgu koła opisanego promieniem mniejszym od drugiego, co bydź nie może jak to wyżej dowiedziono.

Ponieważ czwarty wyraz proporeyi $CA:OB = \text{okr. CA}:X$, nie może bydź ani większy od okr. OB, ani mniejszy od niego, przeto okręgi kół mają się do siebie w stosunku swoich promieni.

Rozumowanie i wykreślenie zupełnie podobne posłużyłoby do okazania, że powierzchnie kół mają się do siebie, jak kwadraty z ich promieni.

Nie wejdziemy w dalsze szczegóły ostatniego twierdzenia, które jest wnioskiem z twierdzenia następującego.

Wniosek. Łuki podobne (fig. 166) AB i DE mają się do siebie, jak promienie AC i DO, a wycinki podobne ACB i DOE mają się do siebie, jak kwadraty z tych samych promieni.

Gdyż, dla podobieństwa łuków kąt C jest równy kątowi O (opis. 3 ks. III), a zatem tak się ma kąt C do czterech kątów prostych, jak się ma łuk AB do całego okręgu koła opisanego promieniem AC (pod. 17 ks. II), i tak się ma kąt O do czterech kątów prostych, jak się ma łuk DE do całego okręgu koła opisanego promieniem OD; ponieważ zaś łuki AB i DE ma-

ją się do siebie jak okręgi kół których one są częściami, a okręgi kół mają się do siebie jak ich promienie, przeto $\text{łuk } AB : \text{łuk } DE = AC : DO$.

Dla téj saméj przyczyny wycinki ACB i DOE mają się do siebie jak całe koła, a koła jak kwadraty z promieni, przeto $\text{wyc. } ACB : \text{wyc. } DOE = \overline{AC}^2 : \overline{DO}^2$.

PODANIE XII.

Twierdzenie.

Powierzchnia koła jest równa iloczynowi z jego okręgu przez pół promienia.

Oznaczmy przez $\text{pow. } CA$ (fig. 167) powierzchnię koła opisanego promieniem CA ; mówię że $\text{pow. } CA = \frac{1}{2} CA \times \text{okr. } CA$.

Jeżeli bowiem $\frac{1}{2} CA \times \text{okr. } CA$ nie jest miarą powierzchni koła, którego promieniem jest CA , natenczas ta ilość będzie miarą koła większego, lub mniejszego. Przypuśćmy że jest miarą koła większego i niech będzie, jeżeli to bydź może, $\frac{1}{2} CA \times \text{okr. } CA = \text{pow. } CB$.

Na kole o promieniu CA , opiszmy wielokąt foremny $DEFG\dots$, którego boki nie przecinają okręgu koła opisanego promieniem CB (pod. 10); powierzchnia wielokąta jest równa jego obwodowi $DE + EF + FG + \text{i t. d.}$, pomnożonemu przez $\frac{1}{2} AC$ (pod. 7): że zaś obwód wielokąta, jako linia otaczająca, jest większy od okręgu koła wewnątrz wpisanego, przeto miara powierzchni wielokąta $DEFG\dots$ jest większa od iloczynu $\frac{1}{2} AC \times \text{okr. } AC$, który podług przypuszczenia, jest miarą koła opisanego promieniem CB ; więc wielokąt byłby większy od koła, gdy tymczasem przeciwnie on jest mniej-

szy, bo jest w niém zawarty. Więc bydz nie może, aby $\frac{1}{2}CA \times \text{okr. } CA$ było większe od *pow. CA*, czyli inaczej nie może bydz aby iloczyn z okręgu koła przez pół promienia był miarą powierzchni koła większego.

Powiadam daléj, że tenże iloczyn nie może bydz miarą powierzchni koła mniejszego; aby zaś nie zmieniać figury, przypuszczam że mamy koło, którego promieniem jest CB, potrzeba okazać że $\frac{1}{2}CB \times \text{okr. } CB$ nie może bydz miarą powierzchni koła mniejszego, np. koła o promieniu CA. W saméj rzeczy niech będzie, jeżeli to bydz może, $\frac{1}{2}CB \times \text{okr. } CB = \text{pow. } CA$.

Uskuteczniwszy takie same wykreślenie jak wyżej, miarą powierzchni wielokąta DEFG... będzie $(DE + EF + FG + \text{i t. d.}) \times \frac{1}{2}CA$; ponieważ zaś obwód $DE + EF + FG + \text{i t. d.}$ jest mniejszy od *okr. CB* przeto powierzchnia

wielokąta jest mniejsza od $\frac{1}{2}CA \times \text{okr. } CB$, i tém bardziej mniejsza od $\frac{1}{2}CB \times \text{okr. } CB$. Że zaś ostatnia ilość podług przypuszczenia, jest miarą powierzchni koła o promieniu CA, przeto powierzchnia wielokątu byłaby mniejsza od koła wén wpisanego, co bydz nie może; nie może bydz przeto, aby iloczyn z okręgu koła przez pół jego promienia, służył za miarę powierzchni koła mniejszego.

Więc nakoniec iloczyn z okręgu koła przez pół promienia jest miarą powierzchni tegoż samego koła.

Wniosek I. Powierzchnia wycinka kołowego jest równa iloczynowi z łuku przez pół promienia.

Gdyż wycinek (fig. 168) ACB ma się do całego koła, jak łuk AMB do okręgu ADBA (pod. 17, ks. II), lub jak $AMB \times \frac{1}{2}AC$ do $ABDA \times \frac{1}{2}AC$. Że zaś powierzchnia koła = $ABDA \times \frac{1}{2}AC$,

przeło i miarą powierzchni wycinka ACB jest $AMB \times \frac{1}{2} AC$.

II. Oznaczmy głoską π okrąg koła, którego średnica równa jedności; ponieważ okręgi kół mają się do siebie jak promienie, lub jak średnice, przeto można ułożyć proporcję, tak się ma średnica 1 do okręgu koła π jak średnica 2.CA do okręgu koła opisanego promieniem CA, t. j. $1:\pi = 2.CA:okr. CA$, zkąd $okr. CA = 2. \pi \times CA$. Pomnożywszy obie strony tej równości przez $\frac{1}{2} CA$, będzie $\frac{1}{2} CA \times okr. CA = \pi \times CA^2$, czyli $pow. CA = \pi \times CA^2$; a zatem *powierzchnia koła jest równa iloczynowi z kwadratu promienia przez liczbę stałą π , która oznacza okrąg koła w przypuszczeniu że średnica równa 1, czyli stosunek okręgu koła do średnicy.*

Podobnie powierzchnia koła, którego promieniem jest OB, będzie równa

$\pi \times BO^2$; więc $\pi \times CA^2 : \pi \times BO^2 = CA^2 : BO^2$, a zatem *powierzchnie kół mają się do siebie jak kwadraty z ich promieni, co się zgadza z twierdzeniem poprzedzającym.*

Uwaga. Już wyżej nadmieniono, że zagadnienie kwadratury koła ma za przedmiot, wyszukanie kwadratu równego co do powierzchni z kołem, którego promień wiadomy; a ponieważ, przedtem okazano, że koło jest równoważne z prostokątem z okręgu koła i półowy promienia, a ten prostokąt można zamienić na kwadrat z nim równoważny, biorąc średnio geometrycznie proporcjonalną między dwoma jego wymiarami (pod. 6 ks. III); przeto zadanie kwadratury koła sprowadza się do znalezienia okręgu mając wiadomą średnicę, do czego dość jest mieć wiadomy stosunek okręgu koła do średnicy.

Dotąd zdołano oznaczyć pomieniony stosunek sposobem przybliżonym, lecz przybliżenie posunęło do tego stopnia, że wynalezienie stosunku ścisłego nie przedstawiłoby żadnej korzyści. A nawet przedmiot ten, nad którym wiele pracowali geometrycy w czasach, kiedy sposoby przybliżenia były mniej wiadome, dzisiaj pozostawiono w liczbie tych pytań, które mogą być przedmiotem zatrudnień ludzi, posiadających zaledwie początkowe wiadomości geometryi.

Archimedes okazał, że stosunek okręgu koła do średnicy mieści się między $3\frac{10}{70}$ i $3\frac{1}{11}$; takim sposobem $3\frac{1}{7}$, albo $3\frac{2}{7}$ jest bardzo przybliżoną wartością liczby, którąśmy oznaczyli przez π ; ta wartość dla swój prostości używa się najczęściej. *Metius* znalazł wartość π nierównie bardziej przybliżoną $3\frac{55}{113}$. Nakoniec wartość π rozwinięta aż do

pewnego porządku cyfr dziesiętnych, znaleziona przez innych uczonych, jest 3,1415926535897932..., a nawet nie brakło cierpliwości niektórym na wyszukanie stu dwudziestu siedmiu i stu dwudziestu cyfr dziesiętnych. Widoczną jest rzeczą, że podobne przybliżenie jest jednoznaczne z dokładnością, i że nie lepiej nam są znane pierwiastki potęg niezupełnych.

W następujących zagadnieniach będą wyłożone dwa najprostsze sposoby elementarne, wyszukania przybliżonego stosunku okręgu koła do średnicy.

PODANIE XIII.

Zagadnienie.

Mając wiadomą powierzchnię wielokąta foremnego wpisanego i wielokąta foremnego, podobnego tamtemu, opisa-

nego nakole, znaleźć powierzchnią wielokąta foremnego wpisanego i opisanego o dwa razy większej liczbie boków.

Niech będzie (fig. 169) AB bok danego wielokąta foremnego wpisanego, bok EF równoległy do AB, boki wielokąta podobnego opisanego, i C środek koła; poprowadziwszy cięciwę AM i styczne AP i BQ: pierwsza będzie boki wielokąta foremnego o podwójnej liczbie boków względem danego wpisanego w koło, a dwie drugie bokami wielokąta jemu podobnego opisanego (pod. 6). To założywszy, ponieważ toż samo wykreślenie miałyby miejsce w innych kątach, równych kątowi ACM, przeto dość będzie uważać kąt ACM, a trójkąty w nim znajdujące się mieć się będą do siebie jak wielokąty, których one są częściami. Niech będzie A powierzchnia wielokąta, którego boki jest AB; B powierzchnia wielokąta jemu

podobnego opisanego; A' powierzchnia wielokąta, którego boki jest AM; B' powierzchnia wielokąta podobnego opisanego; A i B są wiadome, mamy oznaczyć A' i B'.

1. Trójkąty ACD i ACM mając wspólny wierzchołek A, mają się do siebie jak ich podstawy CD i CM; prócz tego te trójkąty mają się do siebie jak wielokąty, których one są częściami, a zatem $A : A' = CD : CM$. Trójkąty CAM i CME mając wspólny wierzchołek M, mają się do siebie w stosunku swoich podstaw CA i CE, że zaś trójkąty CMA i CME mają się do siebie jak wielokąty A' i B, których one są częściami, przeto $A' : B = CA : CE$. Że zaś dla równoległości linii AD i ME, jest $CD : CM = CA : CE$, więc $A : A' = A' : B$; a zatem A', to jest jeden z wielokątów szukanych, jest średnio-geometrycznie-proporcjonalny mię-

dzy wielokątami danemi A i B, a następnie mamy $A' = \sqrt{A \times B}$.

2. Trójkąty CPM i CPE mając wspólną wysokość CM, mają się do siebie jak podstawy PM i PE; że zaś linia CP dzieli kąt MCE na dwie części równe, przeto (pod. 17, ks. III) $PM:PE \parallel CM:CE = CD:CA = A:A'$; więc $CPM:CPE = A:A'$ i następnie $CPM:CPM+CPE$ albo $CME = A:A+A'$. Że zaś CMPA, czyli 2.CMP i CME mają się do siebie jak wielokąty B' i B, których one są częściami, przeto $B':B = 2A:A+A'$. Poprzednio już oznaczyliśmy A' , a z ostatniej proporcji znajdziemy B' , i będzie $B' = \frac{2A \times B}{A+A'}$; więc zapomocą wielokątów A i B, łatwo jest oznaczyć wielokąty A' i B' , mające dwa razy więcej boków od tamtych.

PODANIE XIV.

Zagadnienie.

Oznaczyć przybliżony stosunek okręgu koła do średnicy.

Niech będzie promień koła $= 1$, bok kwadratu w nie wpisanego będzie $= \sqrt{2}$ (pod. 3), a bok kwadratu opisanego będzie równy średnicy 2; a zatem powierzchnia kwadratu wpisanego $= 2$, a powierzchnia kwadratu opisanego $= 4$. Założywszy teraz, że $A=2$ i $B=4$, według zagadnienia poprzedzającego znajdziemy, że powierzchnia ośmiokąta wpisanego $A' = \sqrt{8} = 2,8284271$, i powierzchnia ośmiokąta opisanego $B' = \frac{16}{2 + \sqrt{8}} = 3,3137085$. Znajac ośmiokąt wpisany i opisany, znajdziemy powierzchnie wielokątów o dwa razy większej liczbie boków: dla

tego uczynimy znowu $A = 2,8284271$;
 $B = 3,3137085$, a znajdziemy $A' =$

$$V\sqrt{A \times B} = 3,0614674, \text{ i } B' = \frac{2 \cdot A \times B}{A + A'} =$$

3,1825979. Następnie wielokąt o 16 bokach posłuży do obliczenia wielokątów o 32 bokach, i tak dalej postępujemy, dopóki nie otrzymamy dla wielokąta wpisanego i opisanego wartości nie różniących się pomiędzy sobą w tylu cyfrach dziesiętnych, w ilu rachunek uskuteczniiono, a w przykładzie obecnym w siedmiu cyfrach. Doszedłszy do tego wniesiemy, że powierzchnia koła jest równa ostatniemu wypadkowi; gdyż koło zawsze jest większe od wielokąta w nie wpisanego a mniejsze od wielokąta na niem opisanego; jeżeli więc wielokąty nie różnią się od siebie w pewnej liczbie cyfr dziesiętnych, tém bardziej koło różnić się nie będzie od

któregokolwiek wielokąta w tej samej liczbie cyfr dziesiętnych.

Oto są wypadki z obliczenia wielokątów doprowadzone do takich, które nie różnią się od siebie w siedmiu cyfrach dziesiętnych.

Liczba boków. Wiel. wpisany. Wiel. opisany.

4 . .	2,0000000	. .	4,0000000
8 . .	2,8284271	. .	3,3137085
16 . .	3,0614674	. .	3,1825979
32 . .	3,1214451	. .	3,1517249
64 . .	3,1365485	. .	3,1441184
128 . .	3,1403311	. .	3,1422230
256 . .	3,1412772	. .	3,1417504
512 . .	3,1415138	. .	3,1416321
1024 . .	3,1415729	. .	3,1416025
2048 . .	3,1415877	. .	3,1415951
4096 . .	3,1415914	. .	3,1415933
8192 . .	3,1415923	. .	3,1415928
16384 . .	3,1415925	. .	3,1415927
32768 . .	3,1415926	. .	3,1415926

Zład wnoszę, że powierzchnia koła, którego promień 1, jest $= 3,1415926$. Dla błędu, który mógł powstać od opuszczonych cyfr dziesiętnych, możnaby bydz w niejakięj wątpliwości co do ostatniej cyfry dziesiętnej; lecz rachunek wykonano z 8 cyframi dziesiętnemi, aby bydz pewnym dokładności wszystkich cyfr dziesiętnych w wartościach przywiedzionych.

Ponieważ powierzchnia koła jest równa iloczynowi z półowy okręgu przez promień, a promień jest 1, przeto półokrąg $= 3,1415926$; jeżeli zaś średnica równa 1, okrąg koła $= 3,1415926$; a zatem stosunek okręgu koła do średnicy, który oznaczyliśmy wyżej przez $\pi = 3,1415926$.

PODANIE XV.

Twierdzenie przybrane.

Trójkąt (fig. 170) CAB jest równoważny trójkątowi równoramiennemu DCE, mającemu z nim kąt C wspólny i którego bok CE równy CD, jest średnio geometrycznie proporcjonalny między CA i CB. Nadto jeżeli kąt CAB jest prosty, prostopadła CF spuszczone na podstawę trójkąta równoramiennego, będzie średnio geometrycznie proporcjonalna między bokiem CA i półową summy boków CA i CB.

I. Gdyż dla kąta wspólnego C, trójkąt ABC tak się ma do trójkąta równoramiennego DCE, jak $AC \times CB$ do $DC \times CE$, czyli do $\overline{DC}^2$; przeto te trójkąty są sobie równoważne jeżeli $\overline{DC}^2 = AC \times BC$, czyli jeżeli DC jest średnio

geometrycznie proporcjonalną między AC i BC.

2. Ponieważ prostopadła CGF dzieli kąt ACB na dwie części równe, przeto $AG:GB=AC:CB$, z kąd $AG:AG+GB=AC:AC+CB$; że zaś AG tak się ma do AB, jak trójkąt ACG do trójkąta ACB, albo do 2.CDF; jeżeli nadto kąt A jest prosty, trójkąty prostokątne ACG i CDF będą podobne i dadzą $ACG:CDF=\overline{AC}^2:\overline{CF}^2$, więc $\overline{AC}^2:2\overline{CF}^2=AC:AC+CB$. Pomnożywszy wyrazy stosunku drugiego przez AC, poprzedniki będą sobie równe, a tym samym $2\overline{CF}^2=AC \times (AC+CB)$ czyli $\overline{CF}^2=AC \times \left(\frac{AC+CB}{2}\right)$; więc 2^o jeżeli kąt A jest prosty, prostopadła CF będzie średnio geometrycznie proporcjonalna między AC i półową summy boków AC i CB.

PODANIE XVI.

Zagadnienie.

Znaleść koło, któreby od wielokąta danego różniło się tak mało, jak się podoba.

Niech będzie np. kwadrat BMNP (fig. 171); ze środka C spuścimy prostopadłą CA na bok MB i połączmy punkta C i B linią prostą CB.

Koło zakreślone promieniem CA będzie wpisane w kwadrat, a koło zakreślone promieniem CB będzie opisane na tym samym kwadracie; pierwsze mniejsze, a drugie większe od kwadratu, idzie zaś o to aby ścieśnić te granice.

Weźmy CD i CE równe średnio geometrycznie proporcjonalnej między CA i CB i poprowadźmy ED; trójkąt równoramienny CDE będzie równowa-

żny z trójkątem CAB (pod. 15); uskuteczniwszy toż samo dla każdego z ośmiu trójkątów składających kwadrat, utworzy się ośmiokąt foremny, równoważny z kwadratem BMNP. Koło zakreślone promieniem CF, który jest średnio geometrycznie proporcjonalny między CA i $\frac{CA+CB}{2}$, będzie wpisane w ośmiokąt, a koło zakreślone promieniem CD będzie na nim opisane. A zatem koło pierwsze będzie mniejsze a drugie większe od kwadratu danego.

Podobnież zamieniwszy trójkąt prostokątny CDE na trójkąt równoramienny z nim równoważny, otrzymamy szesnastokąt foremny równoważny kwadratowi danemu. Koło wpisane w ten wielokąt będzie mniejsze, a koło na nim opisane będzie większe od kwadratu danego.

I tak dalej można postępować, dopóki stosunek między promieniem koła wpisanego i promieniem koła opisanego różni się tak mało od równości, ile się podoba. Natenczas jedno lub drugie koło będzie można uważać jako równoważne danemu kwadratowi.

Uwaga. Oto jest sposób obliczania promieni po sobie idących. Niech będzie a promień koła wpisanego w jeden z wielokątów znalezionych, b promień koła opisanego na tymże wielokącie; niech będą a' i b' promienie koła wpisanego i opisanego na wielokącie o podwójnej liczbie boków względem tamtego. Według tego co okazano, b' jest średnio geometrycznie proporcjonalne między a i b , a a' jest średnio geometrycznie proporcjonalne między a i $\frac{a+b}{2}$, tak że mamy $b' = \sqrt{a \times b}$, i $a' =$

$V_{a \times \left(\frac{a+b}{2}\right)}$; przeto mając wiadome promienie a i b dla jednego wielokąta, łatwo znaleźć promienie a' i b' dla wielokąta następującego: i tak będziemy postępowali, dopóki różnica między temi promieniami nie stanie się dostatecznie małą, a wtedy jeden, lub drugi będzie promieniem koła równoważnego z kwadratem, lub jakimkolwiek danym wielokątem foremnym.

Sposób ten jest łatwy do wykonania na liniach, gdyż sprowadza się do wynalezienia następnych średnio geometrycznie proporcjonalnych między liniami wiadomemi, lecz jeszcze łatwiej może być zastosowany do liczb; ten sposób jest jednym z najdogodniejszych, jakie geometrya elementarna może podać na szybkie obliczenie przybliżonego stosunku okręgu koła do średnicy. Niech będzie bok kwadratu $= 2$,

promień pierwszy CA koła wpisanego będzie 1, a pierwszy promień CB koła opisanego będzie $\sqrt{2}$, czyli 1,4142136. Uczyniwszy zatem $a=1$, i $b=1,4142136$, znajdziemy: $b' = 1,1892071$ i $a' = 1,0986841$. Te liczby posłużą do obliczenia następnych promieni.

Oto wypadek rachunku z siedmioma, lub ośmioma cyframi dziesiętnymi, za pomocą tablic logarytmów zwyczajnych uskutecznionego.

Promienie kół opis. Promienie kół wpis.

1,4142136 . .	1,0000000
1,1892071 . .	1,0986841
1,1430500 . .	1,1210863
1,1320149 . .	1,1265639
1,1292862 . .	1,1279257
1,1286063 . .	1,1282657

Ponieważ pierwsza połowa cyfr w wartościach obu promieni jest jednako-
wa, przeto zamiast średnio geometrycznie proporcjonalnych można wziąć

średnio arytmetycznie proporcjonalne, które różnią się od tamtych tylko cyframi następującymi. Takim sposobem rachunek bardzo się skróci i otrzymamy wypadki:

1,1284360	1,1283508
1,1283934	1,1283721
1,1283827	1,1283774
1,1283801	1,1283787
1,1283794	1,1283791
1,1283792	1,1283792

Przeto 1,1283792 jest przybliżoną wartością promienia koła równoważnego z kwadratem, którego bok = 2. Ztąd łatwo oznaczyć przybliżony stosunek okręgu koła do średnicy: gdyż okazało, że powierzchnia koła jest równa kwadratowi z promienia pomnożonemu przez liczbę π ; jeżeli więc podzielimy powierzchnię 4 przez kwadrat z 1,1283792, otrzymamy π ; wykonawszy działanie znajdziemy $\pi = 3,1415926..$, co już otrzymaliśmy poprzednio.

•••••

DODATEK DO KSIĘGI IV.

O p i s y.

1. *Maximum* nazywa się ilość największa z pomiędzy wszystkich jednego z nią gatunku, najmniejsza zaś nazywa się *minimum*. I tak średnica jest *maximum* pomiędzy liniami łączącemi punkta okręgu koła, a prostopadła jest *minimum* z pomiędzy linii poprowadzonych od punktu do linii prostój.

2. Figurami *izoperymetrycznemi* nazywają się figury, których obwody są sobie równe.

PODANIE I.

Twierdzenie.

Z pomiędzy wszystkich trójkątów mających równe obwody i wspólną podstawę ten jest maximum (największym), którego dwa inne boki są sobie równe.

Niech będzie (fig. 172) $AC=CB$ i $AM+MB=AC+CB$; powiadam, że trójkąt równoramienny ACB jest większy od trójkąta AMB , mającego jednakowy z nim obwód i wspólną podstawę.

Z punktu C jako ze środka, promieniem $AC=BC$ opiszmy okrąg koła, który przetnie się z przedłużeniem AG w punkcie D , połączmy punkt D z punktem B , a kąt DBA wpisany w półkole będzie prosty (pod 15, ks. II). Przedłużmy linię DB ku N , uczynimy $MN=MB$, i poprowadźmy AN , nako-

niec z punktów M i C spuścimy prostopadłe MP i CG do DN . Ponieważ $CB=CD$ i $MN=MB$, mamy $AC+CB=AD$, i $AM+MB=AM+MN$. Że zaś $AC+CB=AM+MB$, więc $AD=AM+MN$ i tym samym $AD>AN$; ponieważ pochyla AD jest dłuższa od AN , przeto $DB>BN$ (pod. 12 ks. I), więc BG połowa linii DB , będzie większa od BP połowy linii BN . Trójkąty ABC i ABM mające wspólną podstawę AB , mają się do siebie jak ich wysokości BG i BP , że zaś $BG>BP$, więc trójkąt równoramienny ABC jest większy od trójkąta nierównoramiennego AMB , mającego takiż sam obwód i wspólną podstawę.

PODANIE II.

Twierdzenie.

Wielokąt równoboczny jest maximum (największy) pomiędzy wielokątami z nim izoperymetrycznemi.

Gdyż niech będzie (fig. 173) wielokąt ABCDEF maximum; jeżeli bok jego BC nie jest równy CD, wystawmy na BD trójkąt równoramienny BOD izoperymetryczny z BCD: trójkąt BOD będzie większy od BCD (pod I), a następnie wielokąt ABODEF większy od ABCDEF; przeto ostatni nie byłby największy ze wszystkich, mających jednakowy obwód i liczbę boków, co się sprzeciwia założeniu. Powinno więc być $BC=CD$, dla téj saméj przyczyny będzie: $CD=DE$, $DE=EF$ i t. d; więc wszystkie boki wielokąta największego są sobie równe.

PODANIE III.

Twierdzenie.

Zpomiędzy wszystkich trójkątów, w których dwa dane boki tworzą kąt upodobany, maximum (największy) jest ten, w którym te dwa boki czynią kąt prosty.

Niech będą trójkąty BAC i BAD (fig. 174) mające bok AB wspólny i bok $AC=AD$; mówię że jeżeli kąt BAC jest prosty, trójkąt BAC będzie większy od trójkąta BAD, w którym kąt A jest ostry lub rozwarty.

Ponieważ podstawa AB jest wspólna, przeto trójkąty BAC i BAD mają się do siebie w stosunku swoich wysokości AC i DE; że zaś prostopadła DE jest krótsza od pochyłej AD, czyli jej równiej AC, przeto trójkąt BAD jest mniejszy od trójkąta BAC.

PODANIE IV.

Twierdzenie.

*Z pomiędzy wszystkich wielokątów o-
graniczonych przez boki dane i ostatni do-
wolny, ten jest maximum (największy),
którego wszystkie wierzchołki są na pół-
okręgu koła, mającego za średnicę bok
nieoznaczony.*

Niech będzie wielokąt ABCDEF (fig. 175) największy z pomiędzy wielokątów utworzonych przez boki dane AB, BC, CD, DE i EF, i ostatni dowolny AF; przeciągnijmy przekątne AD i DF. Jeżeli kąt ADF nie był prosty, natenczas uczyniwszy kąt ADF prostym możnaby było podług twierdzenia poprzedzającego powiększyć trójkąt ADF, przez co powiększyłby się i wielokąt ABCDEF; że zaś założono że wielokąt ABCDEF doszedł do swojego maximum i że tём samém zwiększyć się nie

może, przeto kąt ADF jest prosty, a jego wierzchołek D znajduje się na półokręgu, którego średnicą jest AF. Toż samo rozumieć o kątach ABF, ACF i AEF; więc wszystkie wierzchołki A, B, C, D, E i F wielokąta największego znajdują się na półokręgu koła, którego średnicą jest bok nieoznaczony AF.

Uwaga. To twierdzenie następcza pytanie: czyli mając dane wszystkie boki prócz ostatniego, który jest niewiadomy, można z nich kilkoma sposobami utworzyć wielokąt taki, aby ostatni bok był średnicą półkola, w któreby inne boki były wpisane. Wprzód nim rozwiążemy to pytanie uważmy, że jeżeli jedna i ta sama cięciwa AB (fig. 176) podpięra łuki opisane różnemi promieniami AC i AD, natenczas z pomiędzy kątów opartych o cięciwę, a mających wierzchołki w środkach kół, ten będzie mniejszy, który się znajduje w kole opisaném promieniem większym; t. j.

$ACB < ADB$. W saméj rzeczy kąt $ADO = ACD + CAD$ (pod 27, ks. I), przeto $ACD < ADO$, a pomnożywszy obie ilości przez 2, będzie $ACB < ADB$.

PODANIE V.

Twierdzenie.

Mając dane boki wielokąta i ostatni niewiadomy, mający być średnicą półkola, w któreby inne boki były wpisane, tylko jednym sposobem można z nich utworzyć wielokąt ABCDEF.

Przypuśćmy (fig. 175) albowiem, że znaleźliśmy koło, które odpowiada zagadnieniu; jeżeliby wzięto koło większe, cięciwy AB, BC, CD it. d. odpowiadałyby kątom środkowym mniejszym; a zatem summa kątów środkowych byłaby mniejsza od dwóch kątów prostych i tём samém końce boków danych nie

schodziłyby się z końcami średnicy. Przeciwna niedorzeczność miałaby miejsce, gdyby wzięto koło mniejsze; a zatem w mowie będący wielokąt może być tylko w jedno koło wpisany.

Uwaga. Można podług upodobania zmieniać porządek między bokami AB, BC, CD it. d., lecz średnica koła i powierzchnia wielokąta zawsze pozostaną też same; gdyż jakkolwiek będzie porządek łuków AB, BC it. d., jeżeli tylko ich summa stanowi półokręgu, wielokąt zawsze mieć będzie jednakową powierzchnię, która jest równa półkolu zmniejszonemu odcinkami AB, BC i t. d., których powierzchnia nie zmieni się nigdy.

PODANIE VI.

Twierdzenie.

Z pomiędzy wielokątów utworzonych przez boki dane, ten jest maximum

(największy), który może być wpisany w koło.

Niech będą wielokąty $ABODEF$ (fig. 177) i $abcdef$ utworzone przez boki dane, z których pierwszy może a ostatni nie może być wpisany w koło; mówię, że wielokąt pierwszy jest większy od drugiego.

Poprowadźmy średnicę EM , połączmy punkt M z A i B liniami AM i MB ; na $ab=AB$ nakreślmy trójkąt abm równy ABM i poprowadźmy em .

Na zasadzie podania IV, wielokąt $EFGAM$ jest większy od $efgam$, jeżeli ten ostatni nie może być wpisany w półkole, którego średnicą jest bok em , w przypadku zaś przeciwnym dwa wielokąty podług pod. V, byłyby sobie równe. Dla podobnej przyczyny wielokąt $EDCBM$ jest większy od $edcbm$, z warunkiem podobnym poprzedniemu, w braku którego dwa wielokąty byłyby sobie równe.

A zatem cały wielokąt $EFGAMBCDE$ jeżeli nie jest równy, to jest większy od $efgambcde$; że zaś wielokąty $EFGAMBCDE$ i $efgambcde$ nie są sobie równe, gdyż jeden z nich jest wpisany w koło, a drugi podług założenia nie może być wpisany; a zatem wielokąt pierwszy jest większy od drugiego. Odjawszy z obu stron trójkąty równe ABM i abm , pozostanie wielokąt wpisany $ABCDEF$ większy od wielokąta $abcdef$, którego wpisać nie można.

Uwaga. Podobnie jak w pod. V można okazać, że jedno jest tylko koło, i tym samym jeden wielokąt *maximum*, który czyni zadosyć pytaniu; powierzchnia zaś tego wielokąta pozostałaby zawsze jednakowa, jakkolwiek zmieniano by porządek między jego bokami.

PODANIE VII.

Twierdzenie.

Z pomiędzy wielokątów izoperymetrycznych mających jednakową liczbę boków wielokąt foremny jest maximum.

Gdyż podług twierdzenia II, boki wielokąta największego (*maximum*) są sobie równe, a podług twierdzenia poprzedzającego on może być wpisany w koło, przeto wielokąt foremny jest największy.

PODANIE VIII.

Twierdzenie przybrane.

Dwa kąty mające swoje wierzchołki w środkach kąt różnych, mają się do siebie jak łuki zawarte między ich ramionami, podzielone przez promienie tychże kąt.

o jest tak się mają kąt C (fig. 178) do kąta O jak stosunek $\frac{AB}{AC}$ do stosunku $\frac{DE}{DO}$.

Z punktu O promieniem OF równym AC, opiszmy łuk FG zawarty między przedłużonemi ramionami OD i OE; ponieważ promienie AC i OF są sobie równe, będzie C: O = AB: FG (pod. 17,

ks. II), czyli $= \frac{AB}{AC} : \frac{FG}{FO}$. Że zaś łuki

FG i DE są sobie podobne, przeto (pod. II) FG: DE = FO: DO; więc stosunek $\frac{FG}{FO}$ jest równy stosunkowi $\frac{DE}{DO}$, a tém

samém mamy C: O = $\frac{AB}{AC} : \frac{DE}{DO}$.

PODANIE IX.

Twierdzenie.

Z dwóch wielokątów izoperymetrycznych foremnych ten jest większy, który ma większą liczbę boków.

Niech będzie DE (fig. 179) półowa boku jednego z dwóch wielokątów, a O jego środkiem i OE promieniem koła weń wpisanego; niech będzie AB półowa boku drugiego wielokąta, C jego środkiem i CB promieniem koła weń wpisanego. Zakładamy że środki O i C są w dowolnej odległości od siebie, a promienie kół wpisanych OE i CB leżą w linii prostej OC, tak że kąty DOE i ACB są połowami kątów środkowych wielokątów; ponieważ zaś te kąty nie są sobie równe, linie CA i OD będąc przedłużone przetną się z sobą gdziekolwiek np. w punkcie F: z tego punktu spuścimy prostopadłą FG na OC, z punktów O i C jako ze środków, opiszmy łuki GJ i GH, kończące się na bokach OF i CF.

To założwszy podług twierdzenia poprzedzającego będzie $O: C = \frac{GJ}{OG} : \frac{GH}{CG}$;

że zaś DE tak się ma do obwodu pierwszego wielokąta, jak kąt O do czterech kątów prostych, przeto dla równości obwodów wielokątów, będzie DE: AB =

$$O: C, \text{ czyli } DE: AB = \frac{GJ}{OG} : \frac{GH}{CG}, \text{ pomno-$$

żywszy poprzedniki przez OG i następujki przez CG będzie $DEXOG: ABXCG = GJ: GH$. Lecz trójkąty podobne ODE i OFG dają $OE: OG = DE: FG$, z kąd $DEXOG = OEXFG$; podobnie znajdziemy $ABXCG = CBXFG$; a zatem $OEXFG: CBXFG = GJ: GH$, czyli $OE: CB = GJ: GH$. Jeżeli więc okażemy, że łuk GJ jest większy od GH, to stąd wypadnie że OE jest większe od CB.

Z drugiej strony boku CF nakreślmy figurę CKx równą figurze CGx, gdzie $CK = CG$, kąt $HCK = HCG$, i łuk $Kx = xG$; linia krzywa KxG otoczy łuk KHG i zatem będzie większa od niego (pod. 9);

więc półowa téj krzywój Gx , jest większa od GH półowy łuku; i tém bardziej GJ jest większe od GH .

Ztąd wynika że OE jest większe od OB ; że zaś dwa wielokąty mające równe obwody, mają się do siebie jak promienie kół wpisanych (pod. 7), przeto wielokąt, którego półową boku jest DE , jest większy od wielokąta, którego półową boku jest AB : że zaś pierwszy ma więcej boków, gdyż jego kąt środkowy jest mniejszy, przeto nakoniec z dwóch wielokątów izoperymetrycznych foremnych ten jest większy, który ma większą liczbę boków.

PODANIE X.

Twierdzenie.

Koło jest większe od wszelkiego wielokąta z niem izoperymetrycznego.

Już dowiedziono, że z pomiędzy wielokątów izoperymetrycznych o jednakowej liczbie boków największy jest wielokąt foremny; a zatem idzie już tylko o porównanie koła z jakim bądź wielokątem foremnym z niem izoperymetrycznym. Niech będzie (fig. 180) AJ półowa boku tego wielokąta, a C jego środkiem. Niech będzie w kole izoperymetryczném kąt $DOE = ACJ$, a tém samym łuk DE równy AJ . Wielokąt P tak się ma do koła C jak trójkąt ACJ do wycinka ODE ; a zatem będzie $P: C = \frac{1}{2} AJ \times CJ: \frac{1}{2} DE \times OE = CJ: OE$. Przez punkt poprowadźmy L styczną EG , która przetnie się z przedłużeniem OD w G ; trójkąty podobne ACJ i GOE dadzą proporcję $CJ: OE = AJ$ albo $DE: GE$, więc $P: C = DE: GE$, albo jak się ma $DE \times \frac{1}{2} OE$, które jest miarą wycinka DOE , do $GE \times \frac{1}{2} OE$, które jest miarą trójkąta GOE ; że zaś wycinek jest mniej-

szy od trójkąta, przeto P jest mniejsze od C, więc koło jest większe od wszelkiego wielokąta z niem izoperymetrycznego.

K O N I E C

S P I S Z E C Z Y .

	strona.
<i>Księga I.</i> Zasady	1
<i>Księga II.</i> O kole i mierzeniu kątów .	69
<i>Zagadnienia</i> , których rozwiązanie polega na wiadomościach objętych w dwóch pierwszych księgach	105
<i>Księga III.</i> O proporcjonalności figur	127
<i>Zagadnienia</i> do księgi trzeciej	203
<i>Księga IV.</i> O wielokątach foremnych i o mierzeniu koła	230
<i>Dodatek</i> do księgi czwartej	281

Fig 1

