JEOMETRYI

CZĘŚĆ I.

ułożona podług LACROIX,

przez

ś. p. X. A. DĄBROWSKIEGO S. P.

Byłego Professora Matematyki w Królewsko-Warszawskim Uniwersytecie.

Biblioteka Gimnazjum męsk. w Kaliszu
w Rządzie Polsk.
№ 1611
Dział A
Znak 235
№ inw. 3613
BIBLIOTEKA GIMNAZJUM GŁĘBOKIE
II-218

w WARSZAWIE 1826 Roku.

w Drukarni Xięży Piiarów.

2 Bibliotek 10 Dział
1834

JEOMETRYI

CZĘŚĆ I.

14/46.

ROZDZIAŁ I.

Wiadomości poprzednicze.

1. WSZYSTKIE rzeczy zmysłowe, zwane inaczéy *ciała*, choćby też były naydrobnieysze, są zawsze *rozciągłe*, to iest: maią długość, szerokość i wysokość czyli grubość. Spólna ta wszystkim ciałom własność, o którey nas zmysł widzenia i dotykania przekonywa, sama iedna tylko zaymuie uwagę naszę, kiedy ciała iakiego wielkość zmierzyć, lub ią z wielkością innego ciała porównać chcemy: w ten czas bowiem nie zważaiąc na inne ciała tego własności, do mierzenia żadnego wpływu nie maiące, samą się tylko iego rozciągłością zaprzątamy. Nauka podaiąca sposoby mierzenia rozciągłości, nazywa się nauką *mierniczą*, czyli *Jeometryą*.

2. Rozciągłość uważa się rozmaicie, i ma rozmaite nazwiska. Jeżeli dla wymierzenia wielkości iakiego ciała uważamy razem iego długość, szerokość i wysokość, czyli grubość; rozciągłość pod temi trzema wymiarami razem wzięta, zowie

się *bryłowatością*, albo *obiętością* tego ciała, *volumen*, a ciała, których wielkość pod temi trzema wymiarami uważamy, zowią się *bryły*: i tak kamień, kula, belka, budynek i t. d. są to bryły, których obiętość iest mieysce wzdłuż, wszerz i wzwyż rozległe, przez te bryły zaięte. Bryły podług rozmaitego kształtu są rozmaite, okrągłe, graniaste, kończate i t. d. i maią rozmaite nazwiska, iak to na swoiém mieyscu wyłożymy.

3. Częstokroć w mierzeniu ciał uważamy tylko ich długość i szerokość, bez żadnego względu na grubość. I tak dla wymierzenia pola, ogrodu, posadzki w pokoiu, obicia na ścianie i t. d. dosyć iest zmierzyć ich długość i szerokość. Rozciągłość pod temi dwoma wymiarami uważana, bez względu na wysokość czyli grubość, zowie się *powierzchnią*, *superficies*. Powierzchnia podług kształtu ciała, do którego należy, iest albo równa czyli płaska, zwana inaczéy *płaszczyzna*, *planum*; iak iest powierzchnia papiéru, tablicy, stołu, posadzki, ieziora, pola równego i t. d. albo nierówna czyli krzywa, to iest wklęsła lub wypukła; iak powierzchnia naczynia wklęsłego, kuli, armaty, góry, doliny i t. d. Tu iuż łatwo wnieść można, że powierzchnie równe czyli płaszczyzny różnią się tylko między sobą swoią rozległością czyli wielkością: powierzchnie zaś krzywe tak co do rozległości, iak i co do kształtu swego muszą bydź rozmaite.

4. Często nawet i na szerokość nie daiemy żadnego względu, lecz tylko samę długość uważamy. I tak podróżny nie pyta się o szerokość drogi, którą ma przebyć, ale tylko uważa odległość mieysca do którego dąży: probuiący dzielności strzelby mierzy tylko długość drogi, którą

kula przebiegła, i t. d. Rozległość taka wzdłuż tylko uważana, bez względu na szerokość i grubość, zowie się *liniią*, a końce linii nazywaią się *punktami*. Punkt zatém, ściśle biorąc rzeczy, nie ma żadnéy rozciągłości: gdyż iest końcem linii, która nie ma ani szerokości ani grubości. Mówimy tu, *ściśle biorąc rzeczy*, gdyż punkta znaczone na tablicy lub na papierze nie mogą być bez rozciągłości, równie iako i liniie, które kredą, ołówkiem, albo piórem kréślimy, muszą mieć koniecznie szerokość, choćby też były iak naycieńsze. Ale w ścisłem znaczeniu, kiedy płaszczyzna będąca końcem czyli granicą ciała iakiego, ma tylko długość i szerokość bez grubości, liniia będąca granicą czyli końcem płaszczyzny, mieć tylko może długość bez szerokości i grubości; punkt zaś, iako granica czyli koniec linii, nie może mieć żadnéy rozciągłości.

5. Liniia iest albo prosta, albo złamana czyli z kilku prostych złożona, albo krzywa. Liniia prosta iest naykrótszą drogą z iednego punktu do drugiego, iak iest liniia AB. *Figura.* 1. Wszelka zaś inna liniia, która nie iest naykrótszą drogą z jednego punktu do drugiego, iest albo liniia złamana, czyli z prostych złożona, iak iest liniia ACDB; albo krzywa, iak są liniie AEB, AFB, które są tém dłuższe, im się bardziéy oddalaią od naykrótszéy drogi z punktu A do B, czyli od linii prostéy AB.

6. Z tego cośmy dotąd o linii prostéy powiedzieli, wypada *1ód*, że przez ieden punkt tyle liniy prostych prowadzić można, ile się podoba: co iest przez się widoczna; *2re* że przez dwa punkta iedna tylko liniia prosta przechodzić może: bo od iednego punktu do drugiego iedna iest tylko

naykrótsza droga; liniy zaś krzywych i złamanych tyle przez dwa punkta prowadzić można, ile się podoba: dla tego też liniie krzywe i złamane oznaczaią się kilką głoskami; na oznaczenie zaś linii prostéy, dosyć iest dwóch tylko głosek, które, ieżeli długość linii prostéy iest wyznaczona, kładą się przy iéy końcach; ieżeli długość linii nie iest wyznaczona, kładą się w dwóch którychkolwiek iéy punktach. 3*cie* że gdy dwie liniie proste maią dwa punkta spólne, dwie te liniie czynią iednę tylko liniią prostą: bo przez dwa punkta iedna tylko liniia prosta przechodzić może; 4*te* że gdy się dwie liniie proste z sobą przecinaią, przecięciem ich iest tylko ieden punkt: bo gdyby się we dwóch punktach przecinały, na ten czas maiąc dwa punkta spólne, czyniłyby iednę liniią prostą. 5*te* że nakoniec liniie proste różnią się między sobą tylko długością swoią: lubo i ta różnica nie iest tak wielką iak się z początku zdaie, gdy zważymy, że każda liniia prosta może być, w myśli przynaymniéy w obie strony tak daleko przedłużona, iak się podoba; gdy tym czasem liniie złamane i krzywe tak co do długości, iako i co do kształtu swego, mogą bydź rozmaite.

7. Między liniiami krzywemi, nayznaczniey-sza iest liniia kolista, zwana *okręgiem koła*, *linea circularis*, *circumferentia circuli*; iaka iest *fig.* 2. ABCDEA, która zwyczaynie kreśli się za pomocą narzędzia cyrklem zwanego, lecz którą wykreślić także można sposobem następuiącym: wziąwszy nitkę lub drócik długości *np.* linii AS, i ieden iego koniec utwierdziwszy na stole lub na tablicy w punkcie S. tak, aby około tego punktu mógł się obracać; do drugiego końca A, przyłóżmy ołówek lub kredę, i obrocmy drócik wraz

z kredą około punktu *S.* tak, aby powrócił na to samo mieysce, z którego obracać się począł: ślad na tablicy od kredy zostawiony iest okręgiem. Płaszczyzna tą liniią krzywą określona zowie się *kołem circulus*. Część iakakolwiek okręgu AED, BCD i t. d. nazywa się *łukiem arcus*.

8. Własność okręgu z samego wykréślenia wypływaiąca iest ta, że każdy punkt na nim wzięty znayduie się w równéy odległości od punktu S: odległością bowiem tą iest drócik AS, którego długość w czasie obrotu iest nieodmienna. Punkt S zowie się dla téy przyczyny *środkiem* koła, *centrum*, a liniia prosta SA, SB, i t. d. środek koła z punktem którymkolwiek na okręgu wziętym łącząca, nazywa się *promieniem*, *radius*. Wszystkie zatém promienie koła są równe: bo wszystkie punkta okręgu są w równéy od środka koła odległości. Inne własności okręgu wyłożymy na swoiém mieyscu; tu tylko przestaiemy na tych, które nam do początkowych wiadomości o liniiach prostych będą potrzebne.

9. Co się tycze innych liniy krzywych, kształtem swoim i innemi własnościami od okręgu różniących się, te należą do Jeometryi dalszéy, którą poprzedzić powinna wiadomość własności liniy prostych, płaszczyzn i brył, co iest przedmiotem ninieyszego dzieła.

ROZDZIAŁ II.

O liniiach prostych przecinaiących się, o kątach i tróykątach.

10. Mieysce nieograniczone ACB, *fig.* 3. zawarte między dwiema liniiami prostemi AC i BC.

które się z sobą przecinaią w punkcie C, i które mogą być tak przedłużone, iak się podoba, nazywa się *kątem*, *angulus*. Liniie AC, BC, przecięciem swoiém kąt tworzące, zowią się *ramionami* kąta, *crura* a punkt C. w którym się te dwie liniie przecinaią, nazywa się *wierzchołkiem* kąta, *vertex*.

11. Kąt zwyczaynie oznacza się iedną głoską iakąkolwiek, która się kładzie przy iego wierzchołku. Lecz gdy dwa lub więcéy kątów maią spólny wierzchołek, iak iest na figurze 4, na ten czas kąt oznacza się trzema głoskami, z których iedna kładzie się przy iego wierzchołku; a dwie przy końcach ramion. A że częstokroć końce ramion są wierzchołkami innych kątów, iak *np.* na *fig.* 11, przeto dla dokładnego oznaczenia kątów, zgodzono się w wymawianiu tych głosek zachować następuiący porządek: wymówić naprzód głoskę będącą przy końcu iednego ramienia, potém głoskę będącą przy wierzchołku, nakoniec głoskę będącą przy końcu drugiego ramienia. I tak *fig.* 4 kąt zawarty między ramionami BC, DC, iest BCD, lub DCB; kąt ACD, lub DCA iest kąt zawarty między ramionami AC, DC i t. d.

12. Ramiona kąta mogą się bardziéy lub mniéy rozchodzić: kąty też pod tym względem są większe lub mnieysze. I tak *fig.* 4. kąt ACB iest większy od kąta DCB; gdyż ramiona pierwszego bardziéy się rozchodzą, niż ramiona drugiego. Kąty równe są te, których ramiona równie się rozchodzą, i które tém samém przystać mogą do siebie, gdy ieden na drugim będzie położony. I tak, położywszy *bc*, ramie kąta *bca*, na BC, ramieniu kąta BCA, w ten sposób, aby punkt *c* padł na C, ieżeli ramie *ac*, póydzie po ramieniu AC, kąt

bca, iest równy kątowi BCA, chociażby ramiona *bc*, *ac*, były dłuższe lub krótsze od ramion BC, AC: gdyż ramiona kąta iako liniie proste mogą być podług potrzeby przedłużone. Jeżeli zaś, położywszy *bc* na BC, ramie *ac* wezmie takie położenie, iak CD, lub iak CE; kąt *bca* iest w piérwszym przypadku mnieyszy, w drugim większy od kąta BCA, chociażby ramiona *bc*, *ac* były równe ramionom BC, AC. Wielkość zatém kąta nie zależy od długości ramion, lecz od ich roztwartości, czyli, co na iedno wychodzi, od położenia względem siebie dwóch liniy przecięciem swoiém kąt tworzących.

13. Gdy liniia DC *fig.* 5. takie ma względem linii AB położenie, że z nią tworzy dwa kąty ACD, BCD między sobą równe: kąty te zowią się *proste*, *recti*, a liniia DC iest *prostopadła*, *perpendicularis*, do linii AB. Wszelki kąt mnieyszy od prostego, iak iest, *np. fig.* 6, kąt ECB, zowie się *ostry*, *acutus*; wszelki kąt większy od prostego, iak iest *np.* kąt ACE, zowie się *roztwarty*, *obtusus*.

14. Kąty tak ostre iako też i roztwarte mogą się bardziéy lub mniéy przybliżać do prostego; przeto też tak ostre iako i roztwarte, co do wielkości swoiéy, są między sobą rozmaite. Lecz kąty proste wszystkie sobie są równe, i mogą do siebie przystać. Jakoż *fig.* 5, położywszy *cb* ramie kąta prostego *dcb*, na CB ramieniu kąta prostego DCB, gdyby ramie *cd* nie poszło po ramieniu CD, padłoby albo z prawéy strony linii CD, *np.* na liniią CE; albo z lewéy strony téyże linii CD, *np.* na liniią CF; i kąt *dcb* w piérwszym przypadku byłby równy kątowi ECB, który iest ostry, iako mnieyszy od prostego DCB;

w drugim przypadku kąt *dcb* byłby równy kątowi FCB, który iest roztwarty, iako większy od prostego DCB. A że kąt *dcb* nie iest ani ostry, ani roztwarty; więc i ramie *cd* nie póydzie ani po linii CE, ani po linii CF, lecz po linii CD; a zatém będzie kąt prosty *dcb* równy prostemu DCB.

15. Gdy liniia CE, *fig.* 6. z liniią AB tworzy dwa kąty nie równe, ieden ECB ostry, czyli mnieyszy od prostego DCB, drugi ACE roztwarty, czyli większy od prostego ACD; summa tych dwóch kątów ECB, ACE przy sobie leżących, zwanych inaczéy *przyległemi, adjacentes*, równa się dwom kątom prostym. Jakoż kąt ostry ECB od prostego DCB mnieyszy iest kątem DCE; kąt zaś roztwarty ACE od drugiego prostego ACD większy iest tymże samym kątem DCE; więc obadwa kąty przyległe ECB, ACE, równe są dwom kątom prostym DCB i ACD.

16. Stąd wypadaią następuiące wnioski: 1*ód* że kiedy ieden z dwóch kątów przyległych iest prosty, drugi także prosty być powinien: gdyż obadwa czynią dwa kąty proste.

2*re*. Że wszystkie kąty *fig.* 7. ACE, ECD, DCF, FCB, leżące z jednéy strony linii AB, i maiące spólny wierzchołek C, ważą dwa kąty proste: bo wystawiwszy sobie, że z punktu C. iest wyprowadzona CM, prostopadła do AB; summa tych wszystkich kątów równa się widocznie dwom kątom prostym ACM, BCM.

3*cie*. Że gdy się dwie liniie proste, *fig.* 8 AB, DE, przecinaią w punkcie C. summa cztérech kątów ACD, DCB, BCE, ECA, równa się cztérem kątom prostym: gdyż kąty ACD i DCB iako przyległe, ważą dwa kąty proste, i kąty ACE i ECB dla téyże przyczyny ważą dwa kąty proste.

4*te*. Że przez punkt C, *fig.* 9. poprowadziwszy iakąkolwiek liczbę liniy prostych AC, BC, DC, EC, FC; summa wszystkich kątów ACB, BCD, DCE, ECF, FCA, maiących spólny wierzchołek w punkcie C. równa się cztérem kątom prostym: gdyż przedłużywszy którąkolwiek liniią *np.* DC do H, summa kątów HCA, ACB, BCD, równa się dwom kątom prostym, i summa kątów HCF, FCE, ECD równa się także dwom kątom prostym, podług wniosku drugiego.

17. Uważać tu potrzeba, że kiedy dwa kąty przyległe, *fig.* 6. ACE, ECB ważą dwa kąty proste, dwa ich ramiona AC i BC są w jednéy linii; to iest, AC ramie kąta ACE, iest przedłużeniem CB ramienia kąta ECB. Kąty *np. fig.* 7. ACD i DCF nie ważą dwóch kątów prostych, chociaż leżą przy sobie, i maią spólny wierzchołek C: bo ramiona ich AC i CF nie są w iednéy linii.

18. Gdy dwie liniie proste, *fig.* 8. AC, DC przecinaiące się w punkcie C przedłużone będą, pierwsza do B, druga do E; dwa kąty ACD, BCE maiące spólny wierzchołek C zowią się kątami *w wierzchołku przeciwległemi, ad verticem oppositi.*. Kąty ACE, DCB są także w wierzchołku przeciwległe, gdyż obadwa maią spólny wierzchołek C, a ramiona iednego z nich *np.* kąta ACE, są przedłużeniem ramion drugiego kąta DCB. Kąty, *fig.* 9. ACB, FCE, lubo maią spólny wierzchołek C, nie są iednak w wierzchołku przeciwległe: gdyż ramiona iednego z nich nie są przedłużeniem ramion drugiego.

19. Kąty ACD, BCE, *fig.* 8. *w wierzchołku przeciwległe, są sobie równe.* Jakoż summa dwóch kątów przyległych ACD i ACE, równa się

dwom kątom prostym; podobnież summa dwóch kątów przyległych BCE i ACE równa się dwom kątom prostym. Więc odiąwszy od obudwu summ spólny kąt ACE, zostanie kąt ACD, równy kątowi BCE.

20. Stąd wypada *lód* że przedłużywszy liniią DC, *fig.* 10, która z liniią AB czyni dwa kąty ACD i BCD proste, przedłużenie iéy CE utworzy z drugiéy strony linii AB dwa kąty ACE, BCE proste: gdyż kąty te są wierzchołkiem przeciwległe kątom DCB, ACD prostym;

2*re*. Że kiedy liniia DE iest prostopadła do AB, wzaiemnie też i liniia AB iest prostopadła do DE: bo że liniia DE iest prostopadła do AB, idzie zatém, iż kąt ACD iest równy kątowi przyległemu BCD, i że obadwa te kąty są proste (13). Lecz że kąt BCD iest prosty, idzie zatém że i kąt ACE przeciwległy wierzchołkiem iest prosty; więc kąt ACE=ACD, a tém samém liniia AB iest prostopadła do linii DE.

21. Mieysce trzema liniiami prostemi określone zowie się *tróykątem*, *triangulum*. I tak *fig.* 11. ACB iest tróykąt: liniie AB, AC, BC przecięciem swoiém tworzące tróykąt, zwać będziemy *bokami*, *latera*. Boki te są oraz ramionami trzech kątów A, B, C. W tróykącie zatém, oprócz powierzchni, sześć rzeczy uważać należy: trzy boki i trzy kąty.

22. Summa dwóch którychkolwiek boków tróykąta, *np.* summa dwóch boków AC i BC, większa iest od boku trzeciego AB: gdyż liniia prosta AB iest naykrótszą drogą od punktu A do B (5), a tém samém krótsza iest od ACB linii złamanéy z punktu A do B poprowadzonéy. Dla

téyże przyczyny summa dwóch innych którychkolwiek boków większa iest od boku trzeciego,

23. Wziąwszy wewnątrz tróykąta ACB, *fig.* 12. punkt od upodobania D i do dwóch końców któregokolwiek boku, *np.* AB poprowadziwszy liniie proste AD, BD; będzie summa dwóch innych boków AC, BC większa od dwóch liniy AD, BD. Własność ta iest wnioskiem tego, cośmy powiedzieli wyżéy, (5). Można ią okazać sposobem następuiącym:

Przedłużywszy liniią AD aż do przecięcia się z bokiem CB w punkcie F, będzie w tróykącie ACF summa dwóch boków AC i CF większa od boku trzeciego AF; czyli większa od linii AD i DF; gdyż bok AF składa się z dwóch tych liniy AD i DF. Podobnież w tróykącie BDF summa dwóch boków BF i DF większa iest od boku trzecie, o BD; czyli dla krótkości w tłumaczeniu się używaiąc skroconych znaków w tróykącie ACF iest AC+CF > AF; czyli AC + CF > AD + DF. Podobnież w tróykącie BDF, iest BF+DF>BD.

W ostatnich dwóch wyrażeniach dodawszy strony odpowiadaiące sobie, będzie AC + CF + BF + DF > AD+DF+BD; czyli AC + CB + DF > AD + DF+BD: gdyż CF+ BF=CB. Odiąwszy po obudwu stronach DF, zostanie AC+CB>AD+BD to iest: summa dwóch boków AC i BC większa od dwóch liniy AD i BD.

24. Twierdzenie. *Dwa tróykąty mogą przystać do siebie, a tém samém są sobie równe, gdy dwa boki i kąt między niemi zawarty w jednym, równe są dwom bokom i kątowi między niemi zawartemu w drugim tróykącie.*

Dowodzenie. Niech będą dwa tróykąty, *fig.* 13. ABC, *abc* w których bok AC = *ac*, bok BC=*bc*, i kąt C zawarty między temi bokami AC, BC równy kątowi *c* zawartemu między bokami *ac*, *bc;* mamy okazać, że bok AB = *ab*, kąt A=*a*, kąt B=*b*, to iest, że dwa te tróykąty przystaną do siebie.

Jakoż wystawmy sobie, że tróykąt *abc* iest z mieysca swego oderwany i położony na tróykącie ABC tak, aby punkt *c* padł na punkt C, i bok *ac* poszedł po boku AC: w takiém położeniu punkt *a* padnie na punkt A: gdyż bok *ac* =AC z założenia; bok *bc* póydzie po boku BC: gdyż kąt *c*=C (12) punkt *b* padnie na punkt B: gdyż bok *bc*=BC. A gdy punkt *a* padł na A i punkt *b* padł na B; więc i bok *ab* przystanie do boku AB: gdyż przez dwa punkta A i B iedna tylko liniia prosta przechodzić może (6); a zatém i kąty *a*, *b*, przystaną do kątów A, B, (12) i cały tróykąt *abc* przystanie do tróykąta ABC.

25. Uważać tu potrzeba, że boki równe we dwóch tróykątach leżą na przeciwko równych kątów; i odwrotnie kąty równe leżą na przeciwko równych boków. I tak bok *ab* równy bokowi AB, leży na przeciwko kąta *c* równego kątowi C, kąt *b* równy kątowi B leży na przeciwko boku *ac* równego bokowi AC i t. d.

26. Twierdzenie. *Dwa tróykąty mogą do siebie przystać, gdy dwa kąty i bok przy nich leżący w jednym, równe są dwom kątom i bokowi przy nich leżącemu w drugim tróykącie.*

Dowodzenie. Niech będą dwa tróykąty, *fig.* 13. ABC, *abc*, w których kąt A = *a*, kąt B = *b* i bok AB = *ab*: mamy dowieśdź że, bok AC

=*ac*, bok BC=*bc*, i kąt C=*c*, czyli że dwa te tróykąty przystaną do siebie.

Wystawmy sobie, że tróykąt *abc* iest położony na tróykącie ABC tak, aby punkt *a* padł na A, i bok *ab* poszedł po boku AB; ponieważ dwa te boki są równe z założenia, więc punkt *b* padnie na punkt B: a że kąt *a*=A, więc bok *ac* póydzie po boku AC (12), a tém samem punkt *c* padnie na którykolwiek punkt linii AC. Podobnież dla równości kątów *b* i B, bok *bc* póydzie po boku BC, a tém samém punkt *c* padnie na którykolwiek punkt linii BC. A zatém punkt *c*, który musi się znaydować razem na dwóch liniiach AC i BC, padnie na spólne ich przecięcie C: więc tróykąt *abc* przystanie do tróykąta ABC.

27. Twierdzenie. *Jeżeli we dwóch tróykątach dwa boki iednego, są równe dwom bokom drugiego tróykąta, a kąty między temi bokami nie są równe, ten z boków przeciwnych tym nierównym kątom iest większy, który leży naprzeciwko większego kąta: i odwrótnie, ten z dwóch kątów zawartych między równemi bokami we dwóch tróykątach iest większy, który leży naprzeciwko większego boku.*

Dowodzenie. Niech będą dwa tróykąty *fig.* 14. ABC, *abc*, w których bok AB=*ab*, bok BC. =*bc*, a kąt B, zawarty między dwoma pierwszemi większy iest od kąta *b* zawartego między dwoma drugiemi bokami: trzeba dowieśdź, że bok AC przeciwny kątowi B w tróykącie ABC, większy iest od boku *ac* przeciwnego kątowi *b* w tróykącie *abc*.

Położywszy tróykąt *abc* na tróykącie ABC tak, aby bok *ab* przystał do boku AB, boki *ac*, *bc* wezmą albo takie położenie, iak na figurze

pod liczbą 1, gdzie punkt *c* znayduie się na boku AC; albo takie iak na fig. 2, gdzie punkt *c* znayduie się wewnątrz tróykąta ABC; albo nakoniec takie, iak na fig. 3, gdzie punkt c znayduie się za tróykątem ABC.

W 1*wszym* przypadku bok AC widocznie iest większy od Ac, iako całość od swoiéy części: a że Ac=*ac* z wykréślenia, więc bok AC większy iest także od *ac*.

W 2*gim* przypadku *fig.* 2. AC + BC>Ac +Bc; (23) czyli AC + BC>Ac +BC: gdyż podług założenia bok Bc=*bc*=BC.

Odiąwszy po obudwu stronach BC, zostanie AC>Ac. A że Ac = *ac*, z wykréślenia, będzie więc AC>*ac*, to iest, bok AC większy iest od boku *ac*.

W 3*cim* przypadku, *fig.* 3 w tróykącie, Ac D, AD+Dc>Ac (22); Podobnież w tróykącie BDC, DC+DB>BC. Dodawszy strony odpowiadaiące sobie, będzie AD + DC + Dc + DB>Ac+BC; czyli AC + Bc>Ac+BC, (gdyż na figurze AD + DC=AC, Dc + DB =Bc) czyli AC+BC> Ac+BC (gdyż Bc=*bc*=BC z założenia). Odiąwszy BC po obu stronach, będzie AC> Ac; czyli AC>*ac*: gdyż Ac=*ac* z wykréślenia.

Odwrótnie. Jeżeli we dwóch tróykątach ABC, *abc*, *fig.* 14, bok AB = *ab*, bok BC = *bc*, a bok AC>*ac*; będzie kąt B>*b*. Jakoż gdyby kąt B nie był większy od kąta *b*, byłby albo mu równy, albo od niego mnieyszy. W pierwszym przypadku dwa te tróykąty przystałyby do siebie (24), a tém samém byłby bok *ac*=AC, co być nie może, iako przeciwne założeniu. W drugim przypadku byłby bok *ac*>AC podług pierwszéy części ninieyszego twierdzenia, co się także sprzeciwia założeniu; a tém samém być nie może. Kiedy więc kąt B nie może być ani równy kątowi *b*, ani od niego mnieyszy, więc musi być od niego większy.

28. Twierdzenie. *Dwa tróykąty mogą do siebie przystać, gdy trzy boki iednego, równe są trzem bokom drugiego tróykąta.*

Dowodzenie. Niech będą dwa tróykąty *fig.* 13 ABC, *abc*, w których bok AB=*ab*, bok AC =*ac*; bok BC=*bc*; trzeba dowieśdź że kąt A=*a*, kąt B=*b* i kąt C=*c*, czyli że dwa te tróykąty przystaną do siebie.

Gdyby *np.* kąt *b* nie był równy kątowi B, tedy byłby od niego albo większy albo mnieyszy. W piérwszym przypadku, ponieważ boki *ab*, *bc* tróykąta *abc* równe są podług założenia, bokom AB, BC tróykąta ABC, bok *ac*, przeciwny większemu kątowi *b*, byłby większy od boku AC przeciwnego mnieyszemu kątowi B, podług twierdzenia poprzedzaiącego; co być nie może, gdyż podług założenia bok *ac*=AC.

W drugim przypadku, gdyby kąt *b* był mnieyszy od kąta B; bok AC przeciwny kątowi B większemu, byłby większy od boku *ac* przeciwnego kątowi *b* mnieyszemu (27); co być nie może: gdyż, podług założenia, bok AC=*ac*. Kiedy więc kąt *b* nie może być ani większy, ani mnieyszy od kąta A, musi być mu równy. Dwa zatém tróykąty ABC, *abc*, w których dwa boki AB, BC i kąt B między niemi zawarty w jednym, równe są bokom *ab*, *bc* i kątowi *b* między niemi zawartemu w drugim tróykącie, przystaną do siebie (24). (*)

(*) Zastanowiwszy się nad twierdzeniem piérwszém i drugiém o przystawaniu tróykątów, postrzeżemy, że w drugiém równość trzech części we dwóch tróykątach iest dana, których

29. Twierd. *W tróykącie maiącym dwa boki równe, kąty przeciwne bokom równym są równe.*

równość w twierdzeniu piérwszém trzeba było dowodzić, i odwrótnie w twierdzeniu piérwszém równość tych części była dana, których równości w twierdzeniu drugiém trzeba było dowodzić. Takie dwa twierdzenia zowią się *odwrotne, reciproca*, iedno względem drugiego. Twierdzenie trzecie o przystawaniu tróykątów nie ma téy własności i nie można twierdzić, *że ieżeli we dwóch tróykątach trzy kąty iednego równe są trzem odpowiadaiącym kątom drugiego; będą też trzy boki piérwszego równe trzem odpowiadaiącym bokom drugiego tróykąta:* gdyż łatwo poiąć, że boki iednego mogą być po kilka razy większe od boków drugiego, chociaż kąty odpowiadaiące w obu będą równe, iak się o tém późniéy dokładnie przekonamy. Okazuie się stąd 1*ód*, że w Jeometryi, tak iak we wszystkich umieiętnościach i naukach, nie wszystkie twierdzenia czyli nie wszystkie prawdy maią swoie dowodzenia czyli prawdy odwrotne; 2*re* że tém samém w Jeometryi, tak iak we wszystkich umieiętnościach i naukach, twierdzeń czyli prawd odwrotnych potrzeba dowodzić.

Każde twierdzenie Jeometryczne składa się z dwóch części: piérwsza nazywa się *Założenie, Hypothesis*, druga *Wnioskowanie, Conclusio*. W założeniu wymienione są prawdy wiadome z przypuszczenia, których tém samém dowodzić nie potrzeba; wnioskowanie wylicza prawdy które dowodzone być powinny. I tak: w Twier. 1. o przystawaniu tróykątów założenie iest: *ieżeli w dwóch tróykątach dwa boki AC, BC; i kąt C między niémi zawarty w iedném, równe są dwom bokom ac, bc i kątowi c między niémi zawartemu w drugim tróykącie*; wnioskowanie zaś, którego następnie dowodzimy, iest: *będzie też bok trzeci* AB i *dwa przyległe mu kąty* A i B *piérwszego, równe bokowi trzeciemu* ab i *dwóm przyległym mu kątom a* i *b drugiego tróykąta*. W drugiém twierdzeniu założeniem iest wnioskowanie tw. 1go a wnioskowaniem założenie tegoż tw. 1go. W trzeciém, iak uważaliśmy, założenie, w którém przypuszczamy równość trzech boków we dwóch tróykątach, nie może być wzięte za wnioskowanie, ani wnioskowanie, podług którego dowodzić trzeba równości trzech kątów w tychże dwóch tróykątach, nie może być wzięte za założenie. Wszystkie także twierdzenia nie maią twierdzeń odwrotnych.—

Dowod. Niech będzie tróykąt fig. 15. ABC w którym bok AC=BC; trzeba dowieśdź, że kąt B=A.

Przypuściwszy że trzeci bok AB podzielony iest na dwie równe części w punkcie D, i poprowadziwszy liniią CD; w dwóch tróykątach ACD, BCD. bok AC piérwszego, równy iest bokowi BC drugiego tróykąta, podług założenia; bok AD pierwszego, równy iest bokowi BD drugiego tróykąta podług wykréślenia; bok CD iest dla obudwu tróykątów spólny: a zatém dwa te tróykąty przystaną do siebie (28); a w szczególności, kąt A przystanie do kąta B; więc dwa te kąty są równe.

30. Stąd wypada, że w tróykącie ACB, fig. 16 maiącym wszystkie trzy boki między sobą równe, wszystkie też trzy kąty są między sobą równe: gdyż kąt A równy iest kątowi B, dla równości boków AC. BC; a że też boki AB i AC są równe, więc kąt B równy iest kątowi C.

31. Tróykąt maiący trzy boki równe zowie się *równoboczny*, *aequilaterum*; tróykąt maiący dwa boki równe, zowie się *równoramienny*, *aequicrurum* albo *isoscele*; tróykąt maiący trzy boki nierówne, zowie się *różnoboczny*, *scalenum*.

W tróykącie równoramiennym ACB fig. 15 trzeci bok AB zowie się zwyczaynie *podstawą*, *basis*, a kąt C przeciwny podstawie nazywa się *wiérzchołkiem* tróykąta, *vertex*. W innych tróykątach którykolwiek bok można wziąć za podstawę, a kąt mu przeciwny za wierzchołek.

Powyższe zatém twierdzenie (29) możnaby tak wysłowić: *w tróykącie równoramiennym kąty przy podstawie są równe.*

32. Twierdz. *W tróykącie maiącym dwa kąty równe, boki przeciwne kątom równym są równe.*

Dowód. Niech będzie tróykąt ABC fig. 17. w którym kąt A = B; trzeba dowieśdź; że bok BC = AC, czyli że tróykąt ten iest równoramienny.

Na okazanie tego, daymy że bok trzeci AB w punkcie F podzielony iest na dwie równe części, i poprowadziwszy liniią CF. przedłużmy ią doD tak, aby byłoDF=CF, poprowadziwszy potém liniią AD i BD; w dwóch tróykątach AFC, BFD, bok AF = BF z wykreślenia; bok CF = DF z wykreślenia; i kąt AFC=BFD (19); więc dwa te tróykąty przystaną do siebie (24); a w szczególności bok AG=BD, i kąt FAC=FBD. A że kąt FAC=FBC z założenia, więc i kąt FBD =FBC. Podobnym że sposobem dowiedziemy przez przystanie do siebie dwóch tróykątów CFB, AFD, że kąt FAD.=FAC. Więc dwa tróykąty ACB, ADB maiące bok AB spólny, i kąty przy nim leżące przy A i B równe, przystaną do siebie (26); a w szczególności bok BC=BD: a że bok BD = AC podług dowodzenia, więc i BC=AC.

33. Stąd wypada: że ieżeli w tróykącie wszystkię trzy kąty są równe, będą też i wszystkie trzy boki równe.

34. Twierd. *W tróykącie różnobocznym bok większy, przeciwny iest większemu kątowi, i odwrotnie kąt większy, przeciwny iest większemu bokowi.*

Dowod. 1od Niech będzie tróykąt, fig. 18. ABC, w którym kąt CAB iest większy od kąta B: trzeba dowieśdź, że bok BC przeciwny większemu kątowi CAB, iest większy od boku AC przeciwnego mnieyszemu kątowi B.

Daymy, że z punktu A poprowadzona iest liniia AD tak, iżby kąt DAB był równy kątowi B, w tróykącie równoramiennym DAB iest bok AD = DB (32). W tróykącie ACD iest CD + AD > AC (22); czyli CD + DB > AC: gdyż AD = DB; czyli CB > AC; to iest: bok CB przeciwny większemu kątowi CAB iest większy od boku AC przeciwnego mnieyszemu kątowi B.

2re. W tróykącie ABC, w którym bok BC > AC, będzie kąt CAB przeciwny większemu bokowi BC, większy od kąta B przeciwnego mnieyszemu bokowi AC.

Jakoż gdyby kąt CAB nie był większy od kąta B, byłby albo równy kątowi B, albo od niego mnieyszy. Gdyby kąt CAB był równy kątowi B, bok BC byłby równy bokowi AC (32); co się sprzeciwia założeniu. Gdyby kąt CAB był mnieyszy od kąta B, bok BC przeciwny kątowi CAB mnieyszemu, byłby mnieyszy od boku AC przeciwnego kątowi większemu, podług pierwszéy części ninieyszego twierdzenia; co się także sprzeciwia założeniu. Kiedy zatém kąt CAB nie może być ani równy kątowi B, ani od niego mnieyszy, musi więc być od niego większy.

35. Dla dowiedzenia ostatnich trzech twierdzeń, trzeba było bok AB fig. 15 i 17 dzielić na dwie równe części, i wykreślić kąt DAB fig. 18 równy kątowi B. Ułatwią to następuiące zagadnienia:

Zagadnienie I. *Maiąc dane dwa punkta A i B. fig. 19. znaleźć punkt trzeci, któryby od obudwu był w iednakowéy odległości.*

Rozwiązanie. Z punktu A, promieniem iakimkolwiek, byle większym niż iest połowa odległości dwóch danych punktów, nakreślmy łuk DE, a z punktu B tymże samym promieniem nakreślmy łuk FG, który z łukiem pierwszym przecina się w punkcie C: punkt C iest punktem szukanym.

Uwaga. Uważać tu potrzeba, iż promień którym kreślimy dwa łuki przecinaiące się, powinien być większy, niż iest połowa odległosci dwóch punktów danych, gdyż inaczéy dwa łuki wykreślone przeciąćby się z sobą nie mogły, iak są *np.* łuki *de* i fg.

36. Zagad. 2. *Daną liniią prostą AB. fig.* 20. *podzielić na dwie równe części.*

Rozwiąz. Znaydźmy, podług poprzedzaiącego zagadnienia, punkt C będący w iednakowéy odległości od obudwu końców danéy linii AB; podobnież z drugiéy strony linii AB znaydźmy punkt D będący w iednakowéy odległości od tychże końców. Punkt C złączmy z punktem D liniią prostą CD, która daną linią AB podzieli w punkcie F na dwie części równe. Jakoż poprowadziwszy liniie proste, AC, CB, BD, DA, dwa tróykąty CAD, CBD, w których bok AC = CB (35) bok AD=BD, a bok CD spólny, przystaną do siebie (28) a w szczególności kąty przy C, są równe. Dwa zatém tróykąty ACF, BCF, w których bok AC=BC, bok CF spólny i kąty przy C równe, przystaną do siebie (24), a w szczególności AF = BF. Więc liniia AB. w punkcie F podzielona iest na dwie części równe.

37. Tym samym sposobem możnaby liniią AF i BF podzielić na dwie równe części, a tém samém linia AB byłaby podzielona na części równych 4. Możnaby potém każdą czwartą część linii AB podzielić tymże sposobem na dwie równe części, a zatém liniia AB byłaby podzielona na części równych 8 i t. d. Lecz sposób ten nie iest dostateczny do podzielenia linii danéy na części równych 3, 5, 6 i t. d. Podamy na to sposób niżéy.

38. Zagad. 3. *Maiąc dane dwie liniie proste, znaleźć ich spólną miarę.*

Rozwiąz. Niech będą dwie liniie AB i CD fig. 21: mnieyszą CD przenieśmy na większą tyle razy, ile można: daymy że liniia CD mieści się w linii AB trzy razy, począwszy od A do E, i że zostanie część EB; będzie więc

$$AB = 3\,CD + EB.$$

Niech znowu liniia EB przeniesiona na liniią CD mieści się w niéy cztery razy począwszy od C do F, i zostaie część FD; będzie więc

$$CD = 4\,EB + FD.$$

Podobnież FD przeniesiona na EB, mieści się w niéy raz od E do G, i zostaie część BG; będzie więc $EB = FD + BG$.

Nakoniec BG przeniesiona na FD, mieści się w niéy trzy razy zupełnie: będzie więc

$$FD = 3\,BG.$$

A zatém

$$EB = FD + BG = 3\,BG + BG = 4\,BG.$$
$$CD = 4EB + FD = 16\,BG + 3BG = 19\,BG.$$
$$AB = 3CD + EB = 57\,BG + 4BG = 61\,BG.$$

To iest, liniia BG iest spólną miarą dwóch liniy AB i CD: w pierwszéy bowiem mieści się razy 61, w drugiéy razy 19; i dwie te liniie AB, CD są do siebie iak dwie liczby 61 i 19.

Uwaga. Sposób ten szukania spólnéy miary dwóch liniy danych, zupełnie iest podobny do tego, który podaie Arytmetyka, gdy idzie o zna-

lezienie spólnego dzielnika dwóch liczb danych, z tą tylko różnicą, że dwóch iakichkolwiek liczb ieżeli nie inna iaka liczba, to przynaymniéy iedność iest spólnym dzielnikiem, czyli spólną miarą; w szukaniu zaś spólnéy miary dwóch liniy danych trafić się częstokroć może, iż się nigdy nie doydzie do takiéy części pozostałéy, którąby się w poprzedzaiącéy zupełnie mieściła, choćby działanie to naydaléy posunięte było. Na ten czas dwie dane liniie nie maią spólnéy miary. Liniie takie i wszystkie ilości nie maiące spólnéy miary, nazywaią się *niespółmierne*, *incommensurabiles*.

39. Zagad. 4 *Narysowac tróykąt równy danemu tróykątowi ABC fig.* 13.

Rozwiąz. Poprowadziwszy liniią $ab = AB$, z punktu *a* promieniem równym bokowi AC, kreślę łuk; z punktu *b*, promieniem równym bokowi BC, kreślę łuk drugi, z pierwszym w punkcie *c* przecinaiący się; punkt *c* łączę z punktem *a* i *b*, liniiami prostemi *ac*, *bc*, tróykąt *abc* iest szukany: gdyż dwa te tróykąty mogą do siebie przystać (28).

40. Zagad. 5. *Maiąc dany kąt A. fig.* 22. *wykreślić kąt drugi równy danemu, któregoby wierzchołkiem był punkt* a *na danéy linii* ab.

Rozwiąz. Na ramionach danego kąta A, biorę dwa punkta C, D od upodobania, i łączę ie liniią prostą CD. Na linii *ab*, wziąwszy $ad = AD$, z punktu *a* promieniem równym linii AC kreślę łuk, z punktu *d* promieniem równym linii CD kreślę drugi łuk z pierwszym w punkcie *c* przecinaiący się; punkt przecięcia *c* łączę z punktem *a* liniią *ac*; kąt *cab* iest szukany: gdyż poprowadziwszy liniią prostą *cd*, dwa tróykąty *cad*, CAD przystaną do siebie (28), a w szczególności kąt $a = A$.

41. Zagad. 6. *Maiąc dane dwie liniie proste na dwa boki tróykąta, i kąt maiący być między temi bokami zawarty, narysować tróykąt.*

Rozwiąz. Nakreśliwszy kąt równy danemu, maiący za ramiona dwie dane liniie, i końce tych ramion złączywszy liniią prostą; będzie tróykąt szukany (24).

42. Zagad. 7. *Maiąc daną liniią prostą i dwa kąty, wyrysować tróykąt, w którymby dwa kąty i bok im przyległy były równe dwom danym kątom i danéy linii.*

Rozwiąz. Poprowadzić liniią równą danéy, i przy obudwu iéy końcach wykreślić dwa kąty równe danym, i maiące za ramie spólne liniią daną; drugie dwa ramiona tych kątów przedłużywszy, póki się z sobą nie przetną, będzie tróykąt szukany (26).

43. Zagad. 8. *Maiąc dane trzy liniie na trzy boki tróykąta, narysować tróykąt.*

Rozwiąz. Poprowadziwszy liniią równą któréykolwiek z trzech liniy danych, i wykreśliwszy na niéy tróykąt, daiąc mu dwa drugie boki równe dwom pozostałym liniiom danym, będzie tróykąt szukany (28).

Uwaga. Ponieważ w tróykącie summa dwóch boków iest większa od trzeciego; Zagadnienie to w ten czas tylko może być rozwiązane, kiedy każda z danych liniy mnieysza iest od dwóch innych razem wziętych.

44. Zagad. 9. *Wykreślić tróykąt równoramienny, maiąc daną liniią na podstawę i kąt*

maiący być przy niéy, albo też maiąc dany kąt przy wierzchołku i iedno ramie; albo nakoniec maiąc dane dwie liniie na podstawę i na ieden z dwóch boków równych szukanego tróykąta (1).

Rozwiąz. W piérwszym przypadku poprowadziwszy linią równą danéy i przy obudwu iéy końcach nakreśliwszy dwa kąty równe między sobą i kątowi danemu; ramiona tych kątów przedłużam póki się z sobą nie zeydą, będę miał tróykąt szukany (32).

W drugim przypadku, nakreśliwszy kąt równy danemu, daiąc mu za ramiona liniie równe ramieniu danemu; koniec tych liniy złączywszy liniią prostą, będzie tróykąt szukany (29).

W przypadku trzecim, wyrysować tróykąt któregoby podstawą była liniia mnieysza z dwóch danych, i któregoby każdy z dwóch boków równych między sobą, równał się drugiéy linii danéy.

---

(1) Prawda ta w art. 22 przytoczona iako wniosek tego, cośmy wyżéy (5) o liniiach prostych i łamanych powiedzieli, może być teraz następuiącym sposobem okazana.

W tróykącie ACD, fig. 18, summa dwóch którychkolwiek boków, *np.* summa dwóch boków CD i AD, iest większa od boku trzeciego AC. Jakoż przedłużywszy bok CD do B tak, aby było DB = AD, i punkt B złączywszy z punktem A liniią prostą AB; w tróykącie ABC kąt BAC iest większy od kąta B równego kątowi BAD (29), który iest częścią kąta BAC; a tém samém bok CB > AC (34), czyli CD + DB > AC, czyli CD + AD > AC.

Uwaga. W przypadku ostatnim bierze się liniia mnieysza z dwóch danych za podstawę: gdyż między dwiema danemi liniiami może być tak wielka różnica, iż liniia mnieysza dwa razy wzięta, iest albo równa linii większéy danéy, albo od niéy mnieysza; a w tym przypadku wziąwszy liniią większą z dwóch danych za podstawę, tróykąt nie mogłby być wykreślony (43).

45. Zagad. 10. *Na danéy linii wystawić tróykąt równoboczny.*

Rozwiąz. Na danéy linii wykreśliwszy tróykąt, daiąc mu dwa inne boki równe linii danéy, tróykąt ten będzie szukany.

46. Zagad. 11. *Dany kąt A fig. 22. podzielić na dwie równe części.*

Rozwiąz. Na ramionach kąta danego wziąwszy AF=AE, i z punktów F, E iakimkolwiek promieniem nakreśliwszy dwa łuki w punkcie B przecinaiące się, prowadzę liniią AB; liniia ta podzieli kąt A na dwie równe części: gdyż poprowadziwszy liniie BF, BE, dwa tróykąty ABF, ABE maią bok AB spólny; bok AF=AE i bok BF=BE z wykreślenia: więc dwa te tróykąty przystaną do siebie (28); a w szczególności kąt BAF=BAE.

A zatém dany kąt można podzielić na części równych 4, 8, 16 i t. d. dzieląc każdą połowę na dwie równe części.

ROZDZIAŁ III.

O Liniiach prostopadłych, pochyłych i równoległych.

47. *Twierd.* Ze wszystkich liniy prostych, fig. 23. które z punktu C wziętego za liniią AB do téy linii prowadzić można, naykrótsza iest prostopadła CD; inne zaś liniie CA, CF, CB i tym podobne, które zwać będziemy *pochyłemi*, *obliquae*, tém są dłuższe, im się bardziéy oddalaią od punktu D, w którym prostopadła przecina się z liniią AB, i który zwać będziemy *spodkiem* prostopadłéy; i te tylko między pochyłemi są sobie równe, które są równie od spodku prostopadłéy oddalone i odwrótnie.

Dowod. lod. Przedłużywszy CD do E tak, aby było ED=CD, i poprowadziwszy liniią FE; w dwóch tróykątach CDF. EDF bok CD=ED z wykreślenia, bok FD spólny, kąty przy D między temi bokami zawarte równe iako proste. (14) więc dwa te tróykąty przystaną do siebie podług twierdzenia Iwszego o przystawaniu tróykątów (24), a w szczególności bok EF=CF. W tróykącie CEF iest

CF + EF > CE (22); czyli
CF + EF > CD + ED, czyli
2 CF > 2 CD: gdyż EF=CF z dowiedzenia,
a ED= CD z wykreślenia. Więc CF > CD, to iest, iakakolwiek pochyła CF większa iest od prostopadłéy CD, a tém samém prostopadła iest naykrótsza.

2re. Wziąwszy AD>FD, będzie pochyła CA bardziéy od spodku prostopadłéy oddalona większa, niż iest pochyła CF. Na okazanie, że pochyła pierwsza iest większa od drugiéy, poprowadźmy liniią AE. Dwa tróykąty CAD, EAD, w których bok AD iest spólny, bok CD=ED z wykreślenia, i kąty przy D między temi bokami zawarte równe iako proste, przystaną do siebie podług twierdzenia pierwszego o przystawaniu tróykątów; a w szczególności CA=EA. W tróykącie CAE iest CA+EA>CF+EF (23); czyli 2 CA>2 CF: gdyż EA=CA i EF=CF z dowiedzenia. Więc CA > CF; to iest: pochyła AC bardziéy od spodku D, prostopadłéy CD oddalona większa iest od pochyłéy FC mniéy od tegoż spodku oddalonéy.

3cie. Wziąwszy DB=DF, i poprowadziwszy liniie CB, CF, dwie te pochyłe równie od spodku prostopadłéy oddalone, będą równe. Jakoż w dwóch tróykątach CDB, CDF bok CD iest spólny, bok DB=DF z założenia; kąty przy D między temi bokami zawarte równe iako proste; więc dwa te tróykąty przystaną do siebie, a w szczególności CF=CB: to iest, dwie pochyłe równie od spodku prostopadłéy oddalone są równe.

Odwrotnie *lod.* Jeżeli liniia CD iest naykrótsza ze wszystkich które z punktu C do linii AB poprowadzone być mogą; liniia ta CD iest prostopadła do AB: gdyż inaczéy inna którakolwiek liniia dłuższa od CD byłaby prostopadłą do linii AB; co podług I. części tego twierdzenia być nie może.

2re. Jeżeli pochyła CA iest dłuższa od pochyłéy CB, odległość pierwszéy od spodku prostopadłéy, to iest liniia AD dłuższa iest od BD odległości od tegoż spodku pochyłéy drugiéy: bo gdyby liniia AD nie była dłuższa od linii

BD, byćby musiała albo iéy równa, albo od niéy krótsza i podług I. części tego twierdzenia pochyła CA w pierwszym przypadku byłaby równa pochyłéy CB, a w drugim od niéy krótsza co się sprzeciwia założeniu.

3*cie.* Nakoniec ieżeli dwie pochyłe CB i CF są równe, odległości ich od spodku prostopadłéy, to iest liniie BD i FD są równe: gdyż inaczéy odległość FD byłaby albo większa albo mnieysza od odległości BD; i podług I. części tego twierdzenia pochyła CF w pierwszym przypadku byłaby dłuższa, w drugim krótsza od pochyłéy CB, co iako przeciwne założeniu, być nie może.

48. *Wnioski.* Stąd wypada 1*ód.* Że dwie liniie pochyłe z iednego punktu do linii trzeciéy poprowadzone, ieżeli sobie są równe, nie mogą obiedwie znaydować się z iednéy strony prostopadłéy CD; lecz iedna z nich musi znaydować się ze strony A, druga ze strony B. w równéy odległości od spodku prostopadłéy.

49. 2*re.* Że z punktu C do linii prostéy AB nie można poprowadzić trzech liniy równych między sobą: gdyż dwie z nich musiałyby znaydować się z iednéy strony prostopadłéy CD; co być nie może.

50. 3*cie.* Że ze środka D linii AB fig. 24. wyprowadziwszy prostopadłą CD do linii BA, każdy punkt wzięty na téy prostopadłéy *np.* punkt F iest w równéy odległości od obudwu końców linii AB: gdyż poprowadziwszy liniie pochyłe FA, FB, pochyłe te są sobie równe (47). Każdy zaś punkt wzięty za tą prostopadłą *np.* punkt E nie iest w równéy odległości od końców A i B linii AB: gdyż poprowadziwszy liniie EA, EB, w tróykącie BFE.

BF + FE > EB (22) więc

AF + FE > EB: gdyż AF = BF z dowodzenia; czyli AF > EB: to iest, odległość punktu E od punktua A iest większa, niż od punktu B.

51. Prostopadła z punktu C do linii AB spuszczona, iako naykrótsza ze wszystkich liniy które z tego punktu do linii AB mogą być poprowadzone, oznacza prawdziwą odległość punktu C od linii AB. Przeto też prostopadła z punktu iakiego do daney linii spuszczona, zowie się *odległością* tego punktu od daney linii,

52. Twierd. *Dwa tróykąty ABC,* abc, *fig.* 25, *w których kąty A i* a *są proste; boki tym kątom przeciwne BC i* bc *równe, i boki tymże kątom przyległe AC i* ac *równe, mogą przystać do siebie.*

Dowod. Dwa te tróykąty przystałyby do siebie, gdyby bok trzeci *ab* był równy bokowi trzeciemu AB. Daymyż, ieżeli być może, iż ieden z nich *np.* AB iest większy od *ab*, i że liniia AF mnieysza od AB, iest równa bokowi *ab.* Poprowadziwszy liniią CF, w dwóch tróykątach ACF, *acb*, bok AC = *ac* z założenia; bok AF = *ab* z przypuszczenia; kąt A = *a*, bo są obadwa proste: więc dwa te tróykąty przystałyby do siebie (24), a w szczególności bok CF byłby równy bokowi *cb*; a że podług założenia *cb* = CB; więc i liniia CF, byłaby równa CB; co być nie może: gdyż pochyłe te obiedwie znayduią się z iednéy strony prostopadłéy CA (48), a zatém z dwóch boków AB i *ab* nie może być ieden od drugiego większy: więc boki te są sobie równe;

a tém samém tróykąty ABC, *abc* przystaną do siebie (28).

53. Zagad. *Z punktu D. danego na linii prostéy AB, fig.* 26. *wyprowadzić prostopadłą do téy linii.*

Rozwiąz. Wziąwszy DF = DB, i z punktu B i F iakimkolwiek promieniem nakreśliwszy dwa łuki w punkcie C przecinaiące się, punkt C łączę z punktem D liniią prostą CD: ta liniia iest szukana: gdyż poprowadziwszy liniie CB i CF, w dwóch tróykątach CDB, CDF bok CD iest spólny; bok DB=DF z wykreślenia; bok BC=CF, więc dwa te tróykąty przystaną do siebie (28), a w szczególności kąt CDB = CDF: więc kąty te są proste (13); a tém samém liniia CD iest prostopadła do linii AB.

54. Zagad. *Z punktu C danego za liniią AB fig.* 27. *spuścić prostopadłą do téy linii.*

Rozwiąz. Z punktu C promieniem iakimkolwiek, byle większym niż iest odległość punktu tego od linii danéy, kreślę łuk przecinaiący liniią AC w punkcie B i F; z drugiéy strony linii AB znalazłszy punkt G równie od punktów B i F odległy (35), punkt C z punktem G łączę liniią prostą CG, która liniią AB przecina w punkcie D: liniia CD iest szukana: gdyż w tróykątach CBG, CFG bok CG iest spólny; bok CB = CF, i BG=FG z wykreślenia: więc dwa te tróykąty przystaną do siebie (28), a w szczególności kąty przy C są równe. W dwóch tróykątach CDB, CDF, bok CD iest spólny; bok CB=CF, i kąty przy C równe; więc dwa te tróykąty przystaną do siebie (24), a w szczególności kąty przy D są równe, a tém samém liniia CD iest prostopadła do linii AB (13).

55. *Wnioski.* Stąd wypada 1*od*, że z punktu C, danego za liniią AB. nie można spuścić więcéy prostopadłych do téy linii, tylko iednę CD: gdyż liniie pochyle CB i CF iako sobie równe, powinny być równie oddalone od spodku D prostopadłéy CD (48); a zatém prostopadłą do linii AB z punktu C spuszczona powinna przechodzić przez środek D linii BF: a przez dwa punkta C, D iedna tylko liniia prosta przechodzić może (6). Dla téyże przyczyny z punktu D danego na linii AB nie można wyprowadzić więcéy prostopadłych do téy linii, tylko iednę CD.

56. 2*re.* Dwa tróykąty ABC, *abc*, fig. 25 w których kąty A i *a* są proste, boki tym kątom przeciwne BC i *bc* równe, i kąty B i *b* równe, przystaną do siebie: gdyż położywszy tróykąt *abc* na tróykącie ABC tak, aby kąt *b* przystał do kąta B, i bok *ab* poszedł po AB, bok *bc* przystanie do boku CB i punkt *c* padnie na punkt C, gdyż dwa te boki są sobie równe: gdyby bok *ac* nie przystał do boku AC, lecz wziął odmienne położenie, natenczas z punktu C, możnaby było do linii AB poprowadzić dwie prostopadłe, iednę będącą ramieniem kąta prostego A, drugą będącą ramieniem kąta prostego *a*; co być nie może (55).

57. 3*cie.* Z tego też twierdzenia wypada, że dwie liniie, fig. 28. CH, FI, prostopadłe do trzeciéy linii AB, nigdy się z sobą nie zeydą, choćby też naydaléy były przedłużone, tak w górę ku *x*, iako też na dół ku *y*: bo gdyby się z sobą zeszły, z punktu ich przecięcia się możnaby było spuścić dwie prostopadłe do linii AB; co być nie może (55).

58. Dwie liniie proste na iednéyże płaszczyznie poprowadzone tak, że się z sobą zeyść nie mogą, choćby naydaléy były przedłużone, zowią się *równoodległe parallelae*. A zatém dwie liniie prostopadłe do trzeciéy są od siebie równoodległe: gdyż się z sobą zeyść nie mogą, choćby naydaléy były przedłużone.

59. Lecz ieżeli liniia IK z liniią AB tworzy kąt AIK mnieyszy od prostego CHB, liniie te, IK pochyła i CH prostopadła do AB zeydą się powyżéy linii AB, gdy obiedwie dostatecznie będą przedłużone: ieżeli zaś liniia IL, z liniią AB tworzy kąt AIL większy od prostego CHB; dwie te liniie IL pochyła i CH prostopadła do AB zeydą się z sobą poniżéy linii AB, gdy obiedwie dostatecznie będą przedłużone. Własność ta liniy tak iest sama przez się widoczna, że żadnego dowodzenia nie potrzeba.

60. Gdy dwie liniie DH, GI są prostopadłe do trzeciéy AB; każda linia, iak iest *np.* DG, prostopadła do iednéy z nich, iest razem i do drugiéy prostopadłą: bo gdyby liniia DG prostopadła do DH w punkcie D, nie była prostopadła do linii GI w punkcie G; kąt G byłby ostry lub roztwarty, a tém samém dwie liniie DH, GI, z których pierwsza tworzy z liniią DG kąt prosty, druga z tą samą liniią DG tworzy kąt ostry lub roztwarty, dwie mówię, te liniie dostatecznie przedłużone, zeszłyby się z sobą; co być nie może: gdyż obiedwie podług założenia, są prostopadłe do linii trzeciéy AB.

61. Dwie liniie AB, CD fig. 29. równoodległe od trzeciéy EF, są także i między sobą równoodległe: gdyż poprowadziwszy liniią GH

GH prostopadłą do EF, linia AB iako rownoległa od EF, będzie także prostopadłą do GH; i linia CD iako rownoległa od EF, będzie prostopadła do GH: a zatem dwie liniie AB, CD, prostopadłe do trzeciéy GH, są od siebie równoległe (58)

62. Stąd nakoniec wypada, że gdy dwie liniie EH, FG fig. 30. są prostopadłe, pierwsza do linii AC, druga do linii BC przecinaiącéy się z liniią AC w punkcie C; dwie te prostopadłe EH, FG zeydą się z sobą, gdy będą dostatecznie przedłużone: gdyż inaczéy byłyby od siebie równoległe (58); a że iedna z nich *np.* FG iest prostopadła do CB, więc i druga EG byłaby także do CB prostopadła: dwie zatém liniie AC, BC z jednego punktu C wyprowadzone byłyby do iednéyże linii EH prostopadłe, co być nie może (55).

63. Twierd. *Gdy dwie linie fig.* 31. *AB, CD przecięte od trzeciéy EF, tworzą z nią dwa kąty AGF, CHF równe: liniie te AB, CD są od siebie równoległe; i odwrotnie*

Dowod. Podzieliwszy liniią GH w punkcie I na dwie równe części, i przez punkt I poprowadziwszy liniią KL prostopadłą do AB; w dwóch tróykątach LGI, HIK; bok GI=HI z wykréślenia; kąty przy I równe (19); kąt KHI=CHF, a kąt CHF=AGF z założenia; więc i kąt AGF czyli LGI=KHI: a zatém dwa te tróykąty przystaną do siebie (26). a wszczególności kąt GLI =HKI: a że kąt GLI iest prosty z wykréślenia, więc i kąt HKI iest prosty, a tém samem liniia CD iest prostopadła do KL; że zaś i liniia AB iest prostopadła do KL z wykréślenia, więc dwie te liniie AB, CD prostopadłe do trzeciéy KL są równoległe (58)

Odwrotnie. Gdy dwie liniie AB, CD od siebie równoległe przecięte są od trzeciéy linii EF; kąty AGF, CHF będą sobie równe. Gdyż podzieliwszy liniią GH w punkcie I na dwie równe części, i przez punkt I poprowadziwszy liniią KL prostopadłą do linii AB, a tém samem i do linii CD równoległéy od AC; w dwóch tróykątach LGI;HKI, kąty przy I, są równe; kąt GLI=HKI, bo są obadwa proste; bok GI=HI z wykréślenia, więc dwa te tróykąty przystaną do siebie (56); a wszczególności kąt LGI=KHI: a że kąt KHI =CHF, więc i kąt LGI, czyli AGF,=CHF.

64. Ponieważ w dalszym ciągu Jeometryi często wypada używać liniy równoległych; dla łatwieyszego tłómaczenia się, ponadawano szczególne nazwiska kątom utworzonym przez dwie liniie równoodległe przecięte od trzeciéy, którą zwać będziemy *sieczną secans.*

I tak kąty zawarte między równoległemi AB, CD *fig.* 32. i częścią GH siecznéy EF, zowią się *wewnętrzne interni*: iakie są, AGF, CHE, BGF, DHE.

Kąty zawarte między równoległemi i częściami EG HF siecznéy EF, zowią się kąty *zewnętrzne externi*, iakie są: AGE, BGE, CHF, DHF.

Kąty leżące po iednéy stronie siecznéy, zowią się *iednostronne, ad eandem partem positi*; i tak kąty AGE, AGF, CHE, CHF z iednéy strony siecznéy leżące, są iednostronne: podobnież kąty BGE BGF. DHE, DHF leżące z drugiéy strony siecznéy, są także iednostronne.

Dwa kąty iednostronne, iak są *np.* kąty CHF, AGF, których ramiona rozchodzą się w tę samę stronę zowią się kąty iednostronne *odpowiadaiące sobie, correspondentes.* Kąty AGE, CHE są także iednostronne odpowiadaiące sobie: toż mówić o kątach BGE, DHE: i o kątach DHF, BGF.

Dwa kąty iednostronne AGF, CHE, tudzież BGF, DHE, zowią się iednostronne *wewnętrzne.*

Dwa kąty iednostronne AGE, CHF, tudzież BGE, DHF, zowią się iednostronne zewnętrzne.

Dwa kąty, których ramiona rozchodzą się w strony przeciwne, zowią się kąty *naprzemianległe* wewnętrzne lub zewnętrzne *alterni*: i tak dwa kąty AGF, DHE, są kąty naprzemian-ległe wewnętrzne; toż mówić o dwóch kątach CHE, BGF. Dwa kąty CHF, BGE; są kąty naprzemian-ległe zewnętrzne; toż mówić o kątach AGE, DHF.

65. Stosownie do tych nazwisk powyższe twierdzenie takby można wysłowić: *gdy dwa kąty AGF, CHF, iednostronne odpowiadaiące są równe; dwie liniie AB, CD są od siebie równoległe: i odwrotnie gdy dwie liniie AB CD są od siebie równoległe; dwa kąty AGF, CHF, iednostronne odpowiadaiące są sobie równe.*

66. Twierd. *Gdy dwie liniie AB, CD, od siebie równoległe przecięte są od trzeciéy EF, będą* 1od, *kąty iednostronne odpowiadaiące sobie równe.* 2re *Kąty naprzemianległe wewnętrzne równe;* 3cie *Kąty naprzemianległe zewnętrzne równe;* 4te *Kąty wewnętrzne iednostronne równe dwom kątom prostym;* 5te *kąty zewnętrzne iednostronne równe dwom kątom prostym:* 6te *gdy którakolwiek z tych pięciu własności iest dowiedziona, można będzie dowieśdź i innych czterech.*

Dowod. Co do 1. Równość kątów iednostronnych odpowiadaiących sobie AGF, CHF, iest okazana wyżéy (64). Po okazaniu zaś równości tych kątów, łatwo iest dowieśdź równości innych kątów iednostronnych odpowiadaiących. I tak biorąc *np.* dwa kąty odpowiadaiące sobie DHF, BGF fig. 32, kąt CHF z kątem DHF ważą dwa kąty proste, bo są przyległe. Kąt AGF z kątem BGF ważą dwa kąty proste, dla téyże przyczyny. Więc

CHF+DHF=AGF+BGF.

W tém równaniu odiąwszy z jednéy strony kąt CHF, a z drugiéy kąt AGF, które sobie są równe, zostanie DHF=BGF.

Podobnież dwa kąty iednostronne odpowiadaiące BGE, DHE, są równe: gdyż są przeciwległe w wierzchołku (19) kątom AGF, CHF, których równość iest dowiedziona. Dla téyże przyczyny i kąty CHE, AGE są sobie równe, iako przeciwległe w wierzchołku kątom DHF, BGF, równym z dowiedzenia.

2*re.* Kąty naprzemianległe wewnętrzne AGF, DHE są sobie równe, gdyż kąt AGF=CHF (66); kąt DHE=CHF (19); więc AGF=DHE.

Podobnymże sposobem dowieśdź można równości drugich dwóch kątów naprzemianległych wewnętrznych CHE i BGF.

3*cie.* Kąty naprzemianległe zewnętrzne CHF, BGE są równe: gdyż kąt CHF=DHE (19); Kąt BGE=DHE (66). Więc CHF=BGE.

Tymże sposobem okazać można równość drugich dwóch kątów naprzemianległych zewnętrznych DHF, AGE.

4*te.* Kąty iednostronne wewnętrzne AGF, CHE ważą dwa kąty proste: gdyż kąt AGF+AGE=dwom kątom prostym (13), a że kąt AGE=CHE, iako iednostronne odpowiadaiące; więc AGF+CHE=dwom kątom prostym.

Toż mówić o drugich dwóch kątach iednostronnych wewnętrznych BGF, DHE.

5*te.* Kąty iednostronne zewnętrzne AGE, CHF równe są dwom kątom prostym: gdyż kąt AGE+AGF=dwom kątom prostym (15). A że kąt AGF=CHF (65) więc
AGE+CHF=dwom kątom prostym.

Toż mówić o kątach BGE, DHF.

6*te.* Naostatek, gdy którakolwiek z tych pięciu własności iest dowiedziona, można będzie dowieśdź innych cztérech, i liniie AB, CD będą równoległe. Bo ieżeli *np.* równość kątow iednostronnych odpowiadaiących sobie iest dowiedziona, liniie AB, CD są równoległe, iakośmy to iuż okazali wyżéy.

Jeżeli kąty naprzemianległe wewnętrzne AGF, DHE są równe, będzie kąt CHF=DHE; a zatém i kąt AGF=CHF: więc dwie liniie AB, CD są od siebie równoległe (66).

Jeżeli kąty naprzemianległe zewnętrzne CHF, BGE są równe, będzie kąt BGE=AGF (19). a zatém i kąt CHF=AGF: więc dwie liniie AB, CD są od siebie równoległe (65).

Gdy kąty iednostrónne wewnętrzne AGF, CHE są równe dwom kątóm prostym; będzie CHE+CHF=dwom kątom prostym (15), a że z założenia AGF+CHE=dwom kątom prostym; więc CHE+CHF=AGF+CHE.

W tém równaniu odiąwszy po obudwu stronach kąt CHE, zostanie CHF= AGF: więc liniie AB, CD są od siebie równoległe.

Gdy kąty iednostronne zewnętrzne AGE, CHF są równe dwom kątom prostym, będzie AGE +AGF=dwom kątom prostym (15): a że z założenia AGE+CHF=dwom kątom prostym; więc AGE+AGF=AGE+CHF.

W tém rownaniu odiąwszy AGE po obudwu stronach, zostanie AGF=CHF: więc liniie AB, CD są równoodległe.

67. Zagad. *Przez punkt C wzięty za liniią daną AB, fig.* 33. *poprowadzić równoległą od téy liniii.*

Rozwiązanie. Z punktu C prowadzę liniią CD, któraby sią z liniią AB przecinała pod iakimkolwiek kątem CDB. Na linii CD przy punkcie C kréślę kąt DCF=CDB. Liniia EF będzie szukana: gdyż kąty CDB, DCF wewnętrżne naprzemianległe są równe.

68. Zag. *Przez punkt C wzięty za liniią AB fig.* 34. *poprowadzić liniią CE któraby z daną liniią AB czyniła kąt BEC równy datemu.*

Rozwiąz. Przy punkcie którymkolwiek A wziętym na danéy linii AB, kréślę kąt DAB równy danemu, i przez punkt C prowadzę liniią CE równoległą od AD, aż do przecięcia się z liniią AB w punkcie E; kąt BEC iest szukany.

69. Twierd. *Dwa kąty ACB,* acb. *fig.* 35. *których ramiona AC i* ac, *tudzież BC i* bc *są między sobą równoległe i rozchodzą się w jednę stronę, są sobie równe.*

Dowod. Przedłużywszy *ac* aż do przecięcia się z ramieniem CB w punkcie D; będzie kąt ACB =*a*DB, bo są iednostronne odpowiadaiące sobie względem siecznéy CB i dwóch równoległych AC i *a*D; kąt *a*DB=*acb*, bo są iednostronne odpowiadaiące sobie względem siecznéy *a*D i dwoch równoległych DB, *cb*: a zatém kąt ACB=*acb*. Podobne byłoby dowodzenie, gdyby ramiona dwóch kątów ACB, *acb* miały takie położenie, iakie iest pod liczbą 2.

Łatwo byłoby dowieśdź równości tych kątów innym sposobem, poprowadziwszy, w obudwu figurach przez wierzchołki tych kątów liniią prostą CE.

70. *Uwaga.* W powyższém twierdzeniu dodaiemy, że ramiona tych dwóch kątów rozchodzą się w jednę stronę: gdy bowiem ramiona te rozchodzą się w strony przeciwne, kąty między niemi zawarte nie zawsze są równe. I tak dwa kąty ACB, *acb* fig. 36. których ramiona AC i *ac* BC i *bc* są między sobą równoległe, lecz rozchodzą się w strony przeciwne, nie są równe. Jakoż kąt ACB=*a*DB (66); kąt *a*DB=*bc*F, bo są zewnętrzne naprzemianległe względem siecznéy *a*F, i dwóch równoległych CB i *cb*; a zatém i kąt ACB=*bc*F; więc gdy kąt ACB iest ostry, będzie też i kąt *bc*F ostry, a tém samém przyległy mu kąt *bca* roztwarty (15); będzie więc kąt *bca*>BCA.

Lecz dwa kąty BCA, *bc*F, lubo ramiona ich rozchodzą się w strony przeciwne, są sobie iednak równe, iakośmy wyżéy okazali. Gdy więc ramiona dwóch kątów są między sobą równoległe, a rozchodzą się w strony przeciwne, kąty te mogą byó albo równe sobie, iak są dwa kąty ACB, *bc*F; albo też nie równe, iak są dwa kąty ACB, *acb*.

71. Twierd. *Gdy dwie liniie fig. 37. EF, GH od siebie równoległe, przecięte; są od dwóch drugich liniy IK, LM od siebie równoległych; części AB i CD dwóch piérwszych liniy zawarte między dwiema drugiémi, tudzież części AC, BD, dwóch drugich liniy zawarte między dwiema pierwszemi rownoległemi, są między sobą równe i odwrotnie, ieżeli części te są równe, liniie, do których te części należą, będą równoległe.*

Dowod. Poprowadziwszy liniią prostą CB, wdwóch tróykątach ACB, DCB, bok CB iest spólny; kąt ABC=BCD, gdyż są wewnętrzne naprzemianległe względem sieczney BC, i dwóch równoległych EF, GH; kąt ACB=CBD, gdyż są wewnętrzne naprzemianległe względem sieczney CB i dwóch równodległych IK, LM, więc dwa te tróykąty przystaną do siebie (26): a w szczególności AB=CD, i AC=BD, iako przeciwne kątom równym (25).

Odwrotnie. Jeżeli AB=CD, i AC=BD, będzie liniia EF równoodległa od GH, i liniia IK, równoodległa od LM.

Gdyż poprowadziwszy liniią CB, dwa tróykąty ACB, DCB, przystaną do siebie (28), a w szczególności kąt ABC=BCD, i ACB=CBD, iako przeciwne bokom równym (25), a że kąty ABC, i BCD są wewnętrzne naprzemianległe względem sieczney BC i dwóch liniy EF i GH; kąty ACB i CBD są także wewnętrzne naprzemianległe względem sieczney BC i dwóch liniy IK i LM; więc liniia EF iest równoległa od GH a liniia IK równoległa od LM (66).

72. *Wniosek* 1. Jeżeli AB i CD są sobie równe i od siebie równoodległe, będą także AC i BD równe i równoodległe: gdyż w dwóch tróykątach ACB, BCD, bok BC iest spólny; bok AB =CD z założenia, i kąt ABC=BCD, iako wewnętrzne naprzemianległe względem sieczney CB i dwóch równoległych AB, CD: więc dwa te tróykąty przystaną do siebie (24), a wszczególności bok AC=BD, i kąt ACB=CBD; a że dwa te kąty są wewnętrzne naprzemianległe względem sieczney BC i dwóch liniy AC, BD, więc liniie te są od siebie równoległe (66).

72. *Wniosek* 2. Gdy dwie liniie AB, CD fig. 38. są od siebie równoległe, poprowadziwszy liniie EF, GH, IK i t. d. prostopadłe do tych dwóch liniy; prostopadłe te, iako od siebie równoległe (58), będą sobie równe (72); a że prostopadłe te oznaczaią odległość linii AB i CD (51), a zatém dwie liniie równoodległe zachowuią wszędzie iednakową między sobą odległość.

ROZDZIAŁ IV.

O wielokątach w ogólności, a w szczególności o ich kątach.

74. Płaszczyzna określona iakąkolwiek liczbą liniy prostych, zowie się *wielokątem*, *polygonum*. Wielokąty maią rozmaite nazwiska, podług rozmaitéy liczby boków, lub kątów. I tak tróykąt iest wielokątem maiącym trzy boki, czyli trzy kąty; *czworokąt*, *quadrilaterum*, *pięciokąt*, *pentagonum*, *sześciokąt*, *hexagonum*, *siedmiokąt heptagonum*, *ośmiokąt octogonum*, *dziewięciokąt*, *enneagonum*, *dziesięciokąt*, *decagonum*, *dwunastokąt*, *dodecagonum*, *piętna-*

stokąt, *pentedecagonum* i t. d. są wielokąty maiące 4, 6, 7, 8 i t. d. boków lub kątów. ABCDE fig. 39. iest pięciokąt; ABCDEF fig. 40. iest sześciokąt i t. d.

75. Lubo wielokąty zwyczaynie oznaczaią się tylu głoskami, ile maią kątów, dla krótkości iednak oznaczać ie można dwiema tylko głoskami naydaléy od siebie leżącemi: i tak czworokąty ABCD fig. 41, 42. 43. mogą być oznaczone dwiema głoskami AC, lub BD. Podobnież sześciokąt ABCDEF fig. 40. może być oznaczony dwiema głoskami *np.* EB. lub FC i t. d.

76. Kąt taki iak iest FAB fig. 45. zowie się wklęsły, dla różnicy od innych kątówB, C, D, E, F, które się zowią wyskakuiące.

W wielokącie iakimkolwiek przedłużywszy którykolwiek bok AB fig. 40. kąt CBH zawarty między bokiem CB i przedłużeniem boku AB zowie się kątem *zewnętrznym*, *externus*, dla różnicy od kątów ABC, BCD i t. d. które się nazywaią kątami *wewnętrznemi*, *interni*. Liniia prosta łącząca wierzchołki dwóch kątów wielokąta, zowie się *przekątnią diagonalis*, iakie są fig. 40. AC, AD, AE.

77. Kiedy wielokąt ma wszystkie boki i kąty równe, iak iest fig. 40, 43. i t. d. zowie się *foremnym*, *regulare*: kiedy zaś boki i kąty są nierówne, iak iest fig. 39, 45. i t. d. zowie się *nieforemny*, *irregulare*.

78. Między czworokątami niektóre maią boki przeciwne równoodległe; iak iest *np.* czworokąt BD fig. 41. w którym bok AB iest równoodległy od boku CD i bok AD równoodległy od boku BC. Czworokąt taki zowie się *równoległobokiem*, *paralellogrammum*.

Z tego cośmy powiedzieli wyżéy (71, 72) wypada:

1*od.* Że przekątnia AC, dzieli równoległobok na dwa tróykąty równe:

2*re.* Że boki przeciwne w równoległoboku są sobie równe:

3*cie.* Że gdy w czworokącie boki przeciwne są sobie równe, taki czworokąt iest równoległobokiem:

4*te.* Że gdy w czworokącie dwa boki przeciwne są sobie równe i od siebie równoległe, taki czworokąt iest równoległobokiem.

79. *Uwaga.* Może być czworokąt taki, w którym dwa boki przeciwne są od siebie równoodległe, lecz nierówne, iak iest czworokąt *abcd* fig. 46. w którym boki *cd*, *ab* są od siebie równoodległe, lecz nierówne: taki czworokąt nie iest równoległobokiem: gdyż drugie dwa boki *ad* i *cb* nie są od siebie równoodległe. Czworokąt taki zowie się po łacinie *trapezium*; po polsku możnaby go nazwać równoległobok niezupełny albo *czworobok*.

80. Równoleglobok AC fig. 42. maiący wszystkie kąty proste, zowie się *prostokątem*, *rectangulum*.

Prostokąt AC fig. 43. maiący wszystkie boki równe zowie się *kwadratem quadratum*.

Równoległobok *ac*, fig. 44. maiący wszystkie boki równe, lecz kąty nierówne, zwać się może kwadratem ukośnym, *rhombus*.

81. Chcąc zatém na danéy linii AB. fig. 43. wykréślić kwadrat, trzeba z obudwu iéy końców A i B, wyprowadzić dwie liniie AD i BC, prostopadłe do AB, i równe linii danéy AB; końce

tych dwóch liniy C i D złączywszy liniią prostą CD, czworokąt ABCD będzie kwadratem szukanym.

Chcąc wykréślić prostokąt, któregoby boki równe były liniiom danym, trzeba poprowadzić linią AB, fig. 42. równą iednéy linii danéy i z dwóch iéy końców A i B wyprowadzić liniie AD i BC prostopadłe do AB i równe drugiéy linii danéy: końce tych dwóch liniy C i D złączywszy linią prostą CD, czworokąt ABCD będzie prostokątem szukanym.

Chcąc wykréślić równoległobok, któregoby boki równe były dwom liniiom danym, i kąt równy kątowi danemu, trzeba poprowadzić liniią AB fig. 41. równą iednéy linii danéy, z końca A wyprowadzić liniią AD równą drugiéy linii danéy tak: aby kąt BAD był równy kątowi danemu; poprowadziwszy potem z punktu B liniią BC równą linii AD, i od niéy równoległą końce D i C złączyć liniią prostą DC; czworokąt ABCD będzie równoległobokiem szukanym.

Dowodzenie we wszystkich trzech przypadkach iest łatwe maiąc wzgląd na to, cośmy powiedzieli o liniiach równoodległych (58, 72).

82. W każdym wielokącie uważać będziemy *1ód* kąty: *2re* boki, które razem wzięte zowią się *obwodem* wielokąta, *perimeter*. *3cie* płaszczyznę obwodem określoną, która się zowie *powierzchnią* wielokąta.

83. Twier. *W każdym tróykącie summa trzech kątów waży dwa kąty proste.*

Dowod. W tróykącie ACB fig. 47. przedłużywszy którykolwiek bok *np.* AB do D, i z punktu B wyprowadziwszy liniią BF równoodległą od boku AC; będzie kąt CBF=C, gdyż są

naprzemianległe wewnętrzne względem siecznéy BC, i dwóch równoległych AC, BF. Kąt FBD =A, gdyż są iednostronne odpowiadaiące sobie względem siecznéy AD i dwóch równoodległych AC, BF. Do kątów CBF i FBD. czyli co na iedno wychodzi, do kąta CBD dodawszy kąt CBA, wypadnie summa równa dwom kątom prostym (15). Więc i do kątów C i A dodawszy tenże kąt CBA, wypadnie summa kątów C, A i CBA, to iest, summa trzech kątów tróykąta, równa dwom kątóm prostym. Czyli, kąt CBF=D. Kąt FBD=A. Więc

CBF+FBD=C+A; czyli

CBD=C+A.

Dodawszy po obu stronach kąt CBA, będzie

CBD+CBA=C+A+CBA.

A że kąty CBD i CBA iako przyległe ważą dwa kąty proste; więc też i kąty C, A i CBA, to iest trzy kąty tróykąta. ważą dwa kąty proste.

84. *Wnioski.* 1. Wypada stąd że kąt zewnętrzny tróykąta CBD większy iest niż ieden z dwóch wewnętrznych A i C, na przeciwko niego leżących: kąt bowiem zewnętrzny CBD równa się summie obudwu A i C podług Tw. poprzedzaiącego.

85. 2. W tróykącie równobocznym, którego wszystkie kąty są między sobą równe (50), każdy kąt iest trzecią częścią dwóch kątów prostych, czyli dwiema trzeciemi iednego kąta prostego.

86. 3. Kiedy w tróykącie ieden kąt iest prosty, lub roztwarty, drugie dwa muszą być ostre, gdyż inaczéy summa trzech kątów tróykąta, ważyłaby więcéy niż dwa kąty proste: co iest przeciwne twierdzeniu powyższemu. Kąt zatém pro-

sty lub roztwarty iest w tróykącie naywiększy, a tém samem i bok przeciwny kątowi prostemu lub roztwartemu iest w tróykącie naywiększy (34).

87. Tróykąt maiący kąt prosty, zowie się *prostokątny*, *rectangulum*; tróykąt maiący kąt roztwarty, zowie się *roztwartokątny obtusangulum*; tróykąt maiący wszystkie kąty ostre zowie się *ostrokątny*, *acutangulum*. Bok przeciwny kątowi prostemu, zowie się *przeciwprostokątną*, *hypothenusa*: bok przeciwny kątowi roztwartemu nazywać można *przeciwroztwartokątną*, bok przeciwny kątowi ostremu, *przeciwostrokątną*.

88. 4. Z twierdzenia poprzedzaiącego wypada także, że gdy dwa kąty w jednym tróykącie, równe są dwom kątom w drugim tróykącie, trzeci kąt piérwszego równy iest także trzeciemu kątowi drugiego tróykąta: gdyż ten trzeci kąt przydany do dwóch piérwszych w obudwu tróykątach, czyni dwa kąty proste.

89. A stąd wypada, że twierdzenie wyżéy podane (56), podług którego dwa tróykąty ABC, *abc*, fig. 25. maiące kąty A i *a* proste, kąt B $=b$, i bok BC$=bc$, mogą do siebie przystać; do tróykątów także ostrokątnych i roztwartokątnych może być zastosowane: bo ieżeli fig. 48. dwa kąty A i B w jednym, równe są dwom kątom *a* i *b* w drugim tróykącie, będzie też i trzeci kąt C. piérwszego równy trzeciemu kątowi *c* drugiego tróykąta; a gdy ieszcze i bok CB $=cb$ z założenia, dwa te tróykąty przystaną do siebie podług twierdzenia drugiego o przystawaniu tróykątów.

90. Podobnież twierdzenie podane wyżéy (52). podług którego dwa tróykąty, fig. 25. ACB,

acb, maiące kąty A i *a* proste, bok BC$=bc$, i bok AC$=ac$ przystaną do siebie, do niektórych także innych tróykątów zastosować można. Jakoż niech będą dwa tróykąty, fig. 48. ABC, *abc*, w których kąty ostre A, *a* są równe, boki tym kątom przeciwne BC, *bc* równe, i boki tymże kątom przyległe AC, *ac* równe; dwa te tróykąty przystaną do siebie: gdyż z punktów C i *c* spuściwszy liniie CD i *cd* piérwszą prostopadłą do AB. drugą do *ab*, w dwóch tróykątach CDA, *cda*, kąt A$=a$ z założenia, kąt D$=d$ iako proste, a tém samém i trzeci kąt ACD$=acd$ (87); a że i bok AC$=ac$ z założenia; więc dwa te tróykąty przystaną do siebie (26), a w szczególności bok CD$=cd$, bok AD$=ad$. Dwa zatém tróykąty CDB, *cdb*, w których kąty przy D i *d* są proste z wykréślenia, bok CD$=cd$ z dowodzenia, i bok CB$=cb$ z założenia, przystaną do siebie (52), a w szczególności bok DB$=db$. A kiedy AD$=ad$, i DB$=db$; więc AD$+$DB$=ad+db$, czyli AB$=ab$. Dwa zatém tróykąty ABC, *abc*, w których bok AC$=ac$ z założenia, bok AB$=ab$ z dowodzenia, i kąt A$=a$ z założenia, przystaną do siebie podług piérwszego twierdzenia o przystawaniu tróykątów.

91. Mogą iednak być dwa takie tróykąty, które nie przystaną do siebie, chociaż w nich będzie kąt iednego równy kątowi drugiego tróykąta, i bok przeciwny i przyległy temu kątowi w jednym, równy bokowi przeciwnemu i przyległemu w drugim tróykącie. Trafić się to może w ten czas, kiedy boki przeciwne kątom równym mnieysze są od boków przyległych tymże kątom. Jakoż niech będą fig. 49. dwa tróykąty ABC, *abc*, w których kąt A$=a$, bok BC$=bc$ i bok AB

$=ab$, lecz w obudwoch tróykątach boki BC, bc przeciwne kątom równym, mnieysze są od boków AB, ab przyległych tymże kątom.

Z wierzchołka kąta b spuściwszy db prostopadłą do ac, będzie liniia ad większa od linii cd Na linii ad wziąwszy $dć=dc$, i poprowadziwszy $bć$ będzie $bć=bc$. A że bc=BC z założenia, więc i $bć$=BC. A zatém trzy tróykąty ABC, abc, $abć$ maią kąty A, a równe: boki tym kątom przeciwne BC, bc, $bć$ równe, i boki tymże kątom przyległe AB, ab równe: Lecz ieżeli tróykąt abc przystanie do tróykąta ABC podług poprzedzaiącego wniosku, tedy trzeci tróykąt $abć$, będący częścią tróykąta drugiego abc nie może przystać do tróykąta ABC.

92. W tych więc tylko przypadkach dwa tróykąty mogą do siebie przystać: 1*ód*. gdy dwa boki i kąt między niemi zawarty w jednym, równe są dwom bokom i kątowi między niemi zawartemu w drugim tróykącie; 2*re* gdy dwa kąty i bok im przyległy w jednym równe są dwom kątom i bokowi im przyległemu w drugim tróykącie; 3*cie* gdy trzy boki iednego równe są trzem bokom drugiego tróykąta, 4*te* gdy kąt prosty, bok mu przeciwny i przyległy w jednym równe są kątowi prostemu i bokom przeciwnemu i przyległemu w drugim tróykącie. Przypadek ten lubo może bydź zastosowany i do niektórych innych tróykątów, iednakże ponieważ czasem zayść może wątpliwość, czy dwa tróykąty nieprostokątne mogą do siebie przystać, iakośmy to okazali wyżéy, używać go w dziele niniey-szém nie będziemy, na okazanie równości dwóch tróykątów nieprostokątnych. Co się tycze twierdzenia podanego wyżéy (56, 88) twierdzenie to iuż

nam więcéy potrzebne nie będzie, bo w takim przypadku dwa tróykąty przystaną do siebie podług twierdzenia drugiego o przystawaniu tróykątów, iakośmy to okazali wyżéy, (88).

93. Gdy dwa tróykąty mogą do siebie przystać, tém samém powierzchnia iednego iest równa powierzchni drugiego tróykąta. Niżéy obaczymy, że dwa tróykąty mogą mieć równe powierzchnie, chociażby nie mogły do siebie przystać.

94. Twierd. *Summa kątów wewnętrznych wielokąta iakiegokolwiek waży kątów prostych dwa razy tyle: ile wielokąt ma boków, mniéy* 4, *czyli, liczbę boków wielokąta rozmnożywszy przez* 2, *i od tak rozmnożonéy odiąwszy* 4. *reszta okaże ważność kątów wewnętrznych wielokąta w kątach prostych.*

Dowod. Wziąwszy wewnątrz iakiegokolwiek wielokąta AD, fig. 39. punkt S od upodobania, i z punktu tego poprowadziwszy liniie SA, SB, SC i t. d. łączące wszystkie wierzchołki kątów wielokąta z punktem S. powstaną tróykąty ASB, BSC, CSD i t. d. których spólnym wierzchołkiem iest punkt S, a z których każdy ma za podstawę bok ieden wielokąta, i dwa przy niéy kąty należące do kątów wielokąta. Liniie więc te AS, BS, CS i t. d. podzielą wielokąt na tyle tróykątów, ile wielokąt ma boków. A że w każdym tróykącie summa trzech kątów waży dwa kąty proste (83); więc wszystkie te tróykąty ważyć będą kątów prostych dwa razy tyle, ile wielokąt ma boków. Że zaś kąty przy punkcie S. będące, ważą 4 kąty proste (16); a nie należą do kątów wewnętrznych wielokąta, więc od podwoionéy

liczby boków wielokąta odiąwszy 4, reszta okaże ważność kątów wewnętrznych wielokąta w kątach prostych.

To samo twierdzenie możnaby okazać następuiącym sposobem: z wierzchołka kąta którego-kolwiek w wielokącie FC. fig. 40, 45 *np.* z wierzchołka kąta A, poprowadziwszy do wierzchołków wszystkich innych kątów przekątne AC, AD i t. d, przekątne te podzielą wielokąt na tyle trójkątów, ile ma wielokąt boków, mniéy 2; gdyż do wierzchołka dwóch kątów B i F przyległych ramionom kąta A, przekątnych poprowadzić nie można. A że summa trzech kątów trójkąta waży dwa kąty proste (83), więc summa kątów we wszystkich tych trójkątach, czyli, co na iedno wychodzi, summa wszystkich kątów wewnętrznych wielokąta, ważyć będzie kątów prostych dwa razy tyle, ile wielokąt ma boków, mniéy 4.

95. *Wniosek.* Gdy iest wielokąt foremny (77), wszystkie iego kąty wewnętrzne są między sobą równe; a tém samém i kąty zewnętrzne są między sobą równe: gdyż każdy kąt zewnętrzny, *np.* kąt CBH: fig. 40. z przyległym sobie wewnętrznym CBA, waży dwa kąty proste. A zatém maiąc wiadomą liczbę boków wielokąta foremnego, można doyść ważności kąta iego wewnętrznego i zewnętrznego. I tak w pięciokącie *np.* foremnym, summa wszystkich kątów wewnętrznych, równa iest liczbie boków iego rozmnożonéy przez 2, i zmnieyszonéy liczbą 4; czyli równa $5 \times 2 - 4 = 6$: więc każdy iego kąt ważyć będzie piątą część sześciu kątów prostych, czyli $\frac{6}{5}$ iednego kąta prostego: a zatém kąt zewnętrzny pięciokąta foremnego ważyć będzie resztę do

dwóch kątów prostych, to iest $\frac{4}{5}$: gdyż $\frac{6}{5} + \frac{4}{5} = \frac{10}{5} = 2$ kątom prostym.

Podobnież w sześciokącie foremnym summa wszystkich kątów wewnętrzch $= 6 \times 2 - 4 = 8$ kątom prostym; więc każdy iego kąt wewnętrzny ważyć będzie $\frac{8}{6}$ czyli $\frac{4}{3}$ kąta prostego: a zatém kąt zewnętrzny ważyć będzie $\frac{2}{3}$ kąta prostego, gdyż $\frac{4}{3} + \frac{2}{3} - \frac{6}{3} = 2$ kątom prostym i t. d.

96. Twierd. *W wielokącie maiącym wszystkie kąty wyskakuiące przedłużywszy w jednę stronę wszystkie boki, iak iest na fig.* 50. *summa wszystkich kątów zewnętrznych FAK, GBF i t. d waży 4 kąty proste.*

Dowod. Każdy kąt zewnętrzny *np.* CBF z przyległym sobie wewnętrznym GBA, waży dwa kąty proste: wszystkie zatém kąty zewnętrzne z wewnętrznemi ważyć będą kątów prostych dwa razy tyle ile wielokąt ma boków. A że same wewnętrzne ważą kątów prostych dwa razy tyle ile wielokąt ma boków mniéy 4 (94), więc same zewnętrzne ważą 4 kąty proste.

97. *Wniosek.* Gdy iest wielokąt foremny, kąty iego zewnętrzne są między sobą równe; a że wszystkie zewnętrzne ważą 4 kąty proste, więc 4 podzieliwszy przez liczbę boków, iloraz będzie ważnością kąta zewnętrznego w wielokącie foremnym. I tak w pięciokącie *np.* foremnym ponieważ 5 kątów zewnętrznych ważą 4 kąty proste, więc 1 waży piątą część 4 kątów prostych, czyli $\frac{4}{5}$ iednego prostego: a tém samém kąt wewnętrzny iako mu przyległy, ważyć będzie resztę do dwóch kątów prostych; to iest $\frac{6}{5}$ kąta prostego. Podobnież w sześciokącie foremnym ieden kąt zewnętrzny waży $\frac{4}{6}$ czyli $\frac{2}{3}$ kąta prostego; a tém samém kąt wewnętrzny ważyć bę-

dzie $\frac{4}{3}$ kąta prostego. W siedmiokącie foremnym kąt zewnętrzny waży $\frac{4}{7}$, a wewnętrzny $\frac{10}{7}$ kąta prostego i t. d.

98. *Uwaga.* Postrzegamy tu, że im więcéy ma boków wielokąt foremny, tém kąty iego zewnętrzne są mnieysze, a wewnętrzne większe.

Inne własności wielokątów ściągaiące się do ich powierzchni i obwodu, wyłożymy na swoiém miéyscu.

ROZDZIAŁ V.

O liniiach prostych i o kole.

99. Powiedzieliśmy wyżéy (7), że część okręgu zowie się łukiem. Liniia prosta CD fig. 51. łącząca dwa końce łuku CGD zowie się *cięciwą, chorda.*

Uważać tu potrzeba *1ód*, że cięciwa każda *np.* CD łączy końce dwóch łuków: iednego CGD, drugiego CHD, których summa czyni okrąg koła; ieżeli więc ieden z nich mnieyszy iest od pół okręgu, drugi tém samém będzie większy; *2re* że każda cięciwa dzieli koło na dwie części zwane *odcinkami, segmenta*, ieden DCG, drugi DCH, których summa czyni koło; i ieżeli ieden z nich mniéyszy iest od półkoła, drugi tém samém większy być musi.

100. Gdy cięciwa przechodzi przez środek koła iak iest AB, nazywa się *średnicą, diameter.*

Uważać tu potrzeba *1ód*, że średnica równa iest dwóm promieniom: gdyż promień, iakośmy powiedzieli wyżéy (7), iest liniią prostą od środka koła do iakiego punktu na okręgu poprowadzoną: a zatém średnica AB równa iest dwom promieniom SB i SA. *2re.* Że tém samém wszystkie średnice w jednémże kole są sobie równe: gdyż każda z nich równa iest dwom promieniom, które są między sobą wszystkie równe; *3cie* że średnica iest większa, niż iakakolwiek inna cięciwa: gdyż końce iakiéykolwiek cięciwy CD złączywszy ze środkiem koła liniiami prostemi SC, SD, w tróykącie SDC summa dwóch boków SC+SD>CD (22), to iest, summa dwóch promieni, czyli średnica, większa iest od cięciwy; *4te* że średnica AB dzieli koło i iego okrąg na dwie części równe: gdyż złożywszy figurę wzdłuż linii AB, gdyby część okręgu AHB, nie przystała do części okręgu AGB, punkta iednéy z nich byłyby mniéy lub więcéy od środka koła oddalone, niż punkta drugiéy: co być nie może (7).

101. Tym samym sposobem dowieść można, że dwa koła nakreślone iednymże promieniem są sobie równe, i mogą do siebie przystać, gdy iedno na drugiém będzie położone tak, aby środek iednego padł na środek drugiego koła.

102. Liniia prosta EF, przecinaiąca koło, którą *sieczną* koła, *secans circuli* zwać będziemy dwa tylko punkta C i D spólne z okręgiem mieć może: bo gdyby miała *np.* trzy punkta spólne, trzy te punkta iako znayduiące się na okręgu, byłyby w równéy od środka koła odległości (7); a tém samém z punktu danego S do linii prostéy EF możnaby było prowadzić trzy liniie równe: co być nie może (49).

103. Gdy liniia prosta ma tylko ieden punkt spólny z okręgiem, to iest, gdy się okręgu w jednym tylko punkcie dotyka, a w drugim punkcie dotykać się nie może, choćby była przedłużona;

taka liniia zowie się *styczną* koła, *tangens circuli*. I tak liniia IK w jednym tylko punkcie H dotykaiąca się okręgu, iest styczną: liniią zaś HL lubo w jednym tylko punkcie H dotyka się okręgu, przecież dostatecznie przedłużona, przecięłaby go w punkcie drugim, a zatém nie iest styczną.

104. *Twierd.* Wziąwszy dwa iakiekolwiek łuki iednego koła, albo dwóch kół równych, i położywszy ieden na drugim tak, aby ich wklęsłości obrócone były w jednę stronę, i aby dwa iakiekolwiek punkta iednego, padły na dwa punkta łuku drugiego; *łuk mnieyszy zeydzie się zupełnie z łukiem większym.*

Dowod. Jakoż przeniosłszy łuk *ac* fig. 52. na łuk AE tak aby punkt *a* padł na A, i punkt *c* na *C*, cięciwa *ac* przystanie zupełnie do cięciwy AC; a że promienie *sa*, *sc*, są podług założenia równe promieniom SA, SC, więc dwa tróykąty *sca*, SCA, przystaną do siebie (28); a w szczególności punkt *s* padnie na S. a zatém wszystkie punkta łuku *ac* padną na punkta łuku AC: gdyż punkta te są równie oddalone od środków *s*, S, które są w jednym punkcie: a tém samém łuk *ac* zeydzie się zupełnie z łukiem AE.

105. *Wnios.* Stąd wypada, że dwa łuki iednego koła, albo dwóch kół równych, są równe, gdy ich cięciwy są równe; i odwrotnie; byleby łuki te były iednegoż gatunku, to iest, obadwa mniéysze, lub obadwa większe od pół okręgu. Jakoż cięciwę iednę położywszy na drugiéy, dwa końce pierwszéy padną na dwa końce drugiéy cięciwy, a tém samém i dwa końce iednego łuku, padną na dwa końce drugiego: więc dwa te łuki podług twierdzenia poprzedzaiącego, zeydą się z sobą, i

ieden do drugiego zupełnie przystanie, a zatém są sobie równe.

Odwrotnie, ieżeli dwa łuki iednegoż koła albo dwóch kół równych są równe; będą też równe i ich cięciwy: gdyż łuki te iako równe przystaną do siebie podług wniosku poprzedzaiącego; a tém samém końce iednego padną na końce drugiego łuku; więc i cięciwy ich przystaną do siebie: przez dwa bowiem punkta, iedna tylko liniia prosta przechodzi.

106. Zagad. *Maiąc dane dwa łuki AB, CD, fig. 53. iednegoż koła, albo dwóch kół równych, znaleść spólną ich miarę.*

Rozwiąz. Zagadnienie to rozwiązać można tym samym sposobem, któregośmy użyli w podobnym przypadku z liniiami prostemi (38); z tą tylko różnicą, że zamiast przenoszenia łuków mnieyszych na większe, przenosić będziemy ich cięciwy które gdy są równe, łuki ich są także równe (105).

Cięciwa łuku CD może być na łuk AB dwa razy przeniesiona od A do E, z pozostałą resztą EB; będzie więc łuk AB=2CD+EB.

Cięciwa łuku EB może być na łuk CD raz przeniesiona od C do F, z pozostałą resztą FD będzie więc łuk CD=EB+FD.

Nakoniec cięciwa łuku FD może być na łuk DB 4 razy przeniesioua, bez żadnéy reszty: będzie więc łuk.

EB=4 FD. A zatém

CD=EB + FD=4FD + FD = 5FD.

AB=2CD + EB=10FD + 4FD=14FD, to iest: łuk FD iest spólną miarą dwóch danych łuków AB, CD, i mieści się w piérwszym łuku 14

razy, w drugim 5 razy. Dwa więc łuki dane są do siebie iak dwie liczby 14 i 5.

Uwaga. Mogą być dwa dane łuki takie, że spólnéy ich miary znaleźć nie można, choćby powyższe działanie było iak naydaléy posunięte: łuki więc takie będą ilościami niespółmiernemi, iakośmy wyżéy powiedzieli (38).

107. Twierd. *Promień SM, fig. 54. prostopadły do cięciwy AB, dzieli tę cięciwę w punkcie C i łuk AMB w punkcie M na dwie równe części.*

Dowod. 1*od* Poprowadziwszy promienie SA, SB, promienie te względem prostopadłéy SC są dwiema pochyłemi równemi, a tém samém muszą być równie oddalone od spodku C prostopadłéy SC (48); więc AC=BC.

2*re.* Ponieważ SM iest prostopadła ze środka C linii AB wyprowadzona, więc każdy punkt na téy prostopadłéy wzięty *np.* Punkt M iest w równéy odległości od końców linii AB (50); więc liniia AM=BM. Że zaś liniie te są cięciwami łuków AM, BM, więc i łuki te są sobie równe (105). A zatém promień SM, prostopadły do cięciwy AB dzieli ią w punkcie C, i iéy łuk AMB w punkcie M na dwie równe części.

108. *Wnioski.* Z tego twierdzenia okazuie się 1*ód*, że trzy te punkta, środek koła S, środek cięciwy C, i środek iéy łuku M znayduią się na iednéy linii SM prostopadłéy do cięciwy: a że na oznaczenie linii prostéy dosyć iest dwóch tylko punktów; więc kiedy liniia prosta przechodzi przez dwa punkta któregokolwiek z trzech punktów wymienionych, przeydzie tém samém i przez punkt trzeci, i będzie prostopadła do cięciwy.

2*re* Ponieważ z punktu wziętego na linii prostéy, nie można więcéy prostopadłych do téy linii wyprowadzić, tylko iednę (55), więc prostopadła ze środka cięciwy wyprowadzona przechodzi przez środek koła, i dzieli łuk do téy cięciwy należący na dwie równe części.

109. 3*cie* Z tego też twierdzenia wypada, że chcąc podzielić łuk na dwie równe części: trzeba ze środka cięciwy tego łuku wyprowadzić prostopadłą, aż do przecięcia się z łukiem danym; albo też w kole daném przez środek cięciwy łuku danego do podzielenia poprowadzić promień, albo nakoniec poprowadzić promień prostopadły do cięciwy łuku danego. Tymże sposobem postępuiąc można będzie łuk podzielić na części równych, 4, 8, 16 i t. d.

110. Zagad. *Wykréślić koło, któregoby okrąg przechodził przez trzy punkta A, B. C dane nie w prostéy linii. fig.* 55.

Rozwiąz. Złączywszy punkt A z punktem B, i punkt B z punktem C liniiami prostemi AB, BC, i liniią AB w punkcie D, liniią BC w punkcie E podzieliwszy na dwie części równe; z punktu D i E wyprowadźmy dwie prostopadłe DF, EG, piérwszą do AB, drugą do BC: dwie te prostopadłe, podług tego cośmy powiedzieli wyżéy (62), dostatecznie przedłużone, zeydą się z sobą w punkcie S: punkt S. będzie środkiem, a odległość iego od któregokolwiek z trzech punktów danych, będzie promieniem koła szukanego: gdyż punkt S uważany na prostopadłéy DF, iest w równéy odległości od dwóch punktów A i B (50): tenże sam punkt S uważany na prostopadłéy EG, iest w równéy odległości od dwóch punktów B i C. Trzy więc

odległości, AS, BS, CS są między sobą równe: a zatém ze środka S. promieniem AS nakreśliwszy koło, okrąg tego koła przeydzie przez punkta A, B, C.

111. *Uwaga.* 1. Ponieważ liniie AB, BC. są w kole szukaném cięciwami w punktach D i E na dwie równe części podzielonemi, środek tego koła powinien się znaydować tak na prostopadłéy DF, iako też na prostopadłéy GE (107), to iest, na spólném tych dwóch liniy przecięciu S. a że liniie proste w jednym tylko punkcie przecinać się mogą, więc tylko ieden iest punkt S mogący być środkiem koła szukanego. Toż samo koło nie może mieć innego promienia, tylko liniią AS: bo wziąwszy za promień liniią krótszą lub dłuższą od AS, i z punktu S promieniem tym nakreśliwszy koło, okrąg tego koła nie przeydzie przez punkta A, B, C: co iest przez się widoczne.

A stąd wypada 1*ód*, że przez trzy dane punkta iednego tylko koła okrąg przechodzić może; 2*re*, że gdy okręgi dwóch kół maią trzy punkta spólne, dwa te koła są iednemże kołem; 3*cie*, że zatém okręgi dwóch kół nie mogą się z sobą przecinać tylko we dwóch punktach.

Uwaga. 2. Gdyby trzy punkta A, B, C, dane były w linii prostéy; na ten czas dwie prostopadłe DF, EG byłyby od siebie równoodległe (58), a tém samém zeyśćby się z sobą nie mogły; a że punkt ich zeyścia się iest środkiem, a iego odległość od któregokolwiek z trzech punktów danych, iest promieniem koła szukanego; w tym więc przypadku, nie mogąc mieć ani środka, ani promienia, byłoby rzeczą nie podobną wykreślić koło szukane. A zatém przez trzy punkta dane w linii prostéy. okrąg iednego koła przechodzić

nie może. Co i ztego względu iest rzeczą widoczną, że liniia prosta z okręgiem koła trzech punktów spólnych mieć nie może (102).

112. Zag. *Maiąc dane koło, znaleśdź iego środek.*

Rozwiąz. Na okręgu danego koła wziąwszy trzy punkta od upodobania A, B, C, fig. 55. i złączywszy ie liniiami prostemi AB, BC, ze środków tych liniiy D i E, wyprowadzam dwie prostopadłe DF, EG, pierwszą do AB, drugą do BC, przecinaiące się z sobą w punkcie S: punkt S będzie środkiem szukólnym danego koła.

113. *Twierd.* Z punktu któregokolwiek C fig. 56. wziętego na okręgu koła poprowadziwszy CA prostopadłą do promienia SC, przez ten punkt C przechodzącego, *prostopadła ta do promienia będzie styczną koła. I odwrotnie, styczna z któregokolwiek punktu wziętego na okręgu poprowadzona, iest prostopadłą do promienia przechodzącego przez punkt zetknięcia się stycznéy z kołem.*

Dowod. Wziąwszy iakiekolwiek punkta D, E i t. d. na prostopadłéy AB, i złączywszy ie ze środkiem koła S liniiami prostemi DS, ES, liniie te iako pochyłe do linii AB są dłuższe od prostopadłéy SC (47). A że punkt C znayduie się na okręgu; więc punkta D, E i t. d. znaydować się muszą za okręgiem. Liniia zatém AB, ieden tylko punkt C ma z okręgiem spólny: inne zaś wszystkie iéy punkta są za okręgiem: więc liniia ta iest styczną z kołem (103).

Odwrotnie. Styczna z kołem AB iest prostopadła do promienia SC przechodzącego przez punkt zetknięcia się C: Gdyż ponieważ styczna AB ma tylko ieden punkt C na okręgu, inne zaś

wszystkie iéy punkta są za okręgiem; więc ze wszystkich liniy prostych, które z punktu S do stycznéy AB prowadzić można, naykrótszy iest promień SC: ten bowiem kończy się na okręgu, gdy tym czasem inne wszystkie, iak są *np.* SD, SE, wychodzą za okrąg. Gdyby więc promień SC nie był prostopadły do stycznéy AB; tedy inna którakolwiek liniia z punktu S do linii AB poprowadzona, dłuższa od promienia SC, byłaby do linii AB prostopadłą, co być nie może (47).

114. *Wniosek.* Stąd wypada *1ód*, że przez punkt C dany na okręgu koła, nie można więcéy stycznych wyprowadzić, tylko iednę: gdyż styczna ta powinna być prostopadła do promienia SC. przez dany punkt przechodzącego: a z punktu C do linii SC nie można wyprowadzić dwóch prostopadłych, różnych od siebie (55); *2re* Że przez dany punkt na okręgu koła, chcąc wyprowadzić styczną z kołem, trzeba z danego punktu wyprowadzić prostopadłą do promienia przez tenże dany punkt przechodzącego.

115. Twierd. *Dwa łuki iednegoż koła zawarte między dwiema cięciwami od siebie równoodległemi, lub zawarte między cięciwą i styczną od niéy równoległą, są sobie równe.*

Dowod. 1ód. Niech będą dwie cięciwy AB CD, fig. 57. od siebie równoległe: poprowadziwszy promień SG prostopadły do cięciwy CD, promień ten będzie razem prostopadły i do cięciwy AB iako równoległéy od CD (60), i punkt G będzie środkiem tak łuku CGD, iako też łuku AGB (107): będzie zatém łuk CG=DG, AG=BG: odiąwszy strony równania drugiego, od stron równania pierwszego, zostanie CG—AG=DG

—BG; czyli CA=DB; to iest, łuki zawarte między dwiema cięciwami od siebie równoległemi, są sobie równe.

2re. Niech będzie cięciwa IK równoległa od stycznéy EF: przez punkt zetknięcia się H, poprowadziwszy promień SH, promień ten będzie prostopadły do stycznéy EF (113), i do cięciwy IK iako równoległéy od EF; a tém samém łuk KHI iest podzielony w punkcie H, na dwie równe części (107); będzie więc łuk IH=KH, to iest, łuki zawarte między styczną i cięciwą od niéy równoległą są równe.

116. *Twierd.* Wierzchołki S. *s*, dwóch kątów równych ASB, *asb* fig. 58. wziąwszy za środek koła, i iakimkolwiek promieniem nakreśliwszy łuk ACB przecinaiący ramiona kąta ASB, w punktach A i B, i tymże samym promieniem nakreśliwszy łuk *acb* przecinaiący ramiona kąta *asb* w punktach *a* i *b*; *łuki ACB*, acb *zawarte między ramionami tych dwóch kątów równych, będą sobie równe*; i odwrótnie, *ieżeli łuki kół równych zawarte między ramionami dwóch kątów maiących swoie wiérzchołki w środku kół są sobie równe. kąty te będą także równe.*

Dowod. Poprowadziwszy cięciwy AB, *ab*, w dwóch tróykątach ASB, *asb*: kąt S=*s*, boki AS, BS, równe bokom *as*, *bs*, iako promienie, z założenia; więc dwa te tróykąty przystaną do siebie (24), a w szczególności cięciwa AB=*ab*; a zatém i łuki ACB, *acb* są równe (106).

Odwrot. Jeżeli łuk *ab* = AB, będzie kąt *asb*=ASB: bo ponieważ łuki te są równe, więc i cięciwy ich AB, *ab* są równe (105), a że i promienie SA, SB, *sa*, *sb*, są między sobą równe

z założenia, więc dwa tróykąty ASB, *asb* przystaną do siebie (28), a w szczególności kąt ASB =*asb*.

117. *Twierd.* Wiérzchołki O, *o*, fig. 59. dwóch iakichkolwiek kątów AOB, *aob* wziąwszy za środek, i iednymże promieniem nakreśliwszy dwa łuki, któreby przecinały ramiona dwóch danych kątów w punktach A, B, *a*, *b*, będzie *stosunek kąta AOB do kąta* aob, *równy stosunkowi łuku AB do łuku* ab; to iest, tyle razy kąt ieden będzie większy lub mnieyszy od drugiego, ile razy łuk zawarty między ramionami kąta piérwszego, iest większy lub mnieyszy od łuku zawartego między ramionami drugiego: czyli będzie AOB: *aob*=AB: *ab*.

Dowod. Mogą tu być dwa przypadki, albo łuki AB, *ab* są ilościami spółmiernemi, albo nie spółmiernemi, 1*ód* Jeżeli łuki AB, *ab*; są ilości spółmierne, daymy, że łuk AB ma takich części 4, iakich łuk *ab* ma 2. Podzieliwszy łuk *ab* na dwie części równe w punkcie *c*, a łuk AB na cztéry części równe w punktach C, D, E, i poprowadziwszy promienie *oc*; OC, OD, OE, kąty *aoc*, *cob*, AOC, COD, DOE, EOB, są między sobą równe, podług twierdzenia poprzedzaiącego. A zatém kąt AOB, składa się ze cztérech takich kątów, z iakich dwóch składa się kąt *aob*: więc kąty te maią się do siebie, iak 4 do 2. Czyli, AOB: *aob*=4: 2. A że podług założenia łuk AB: *ab* =4: 2; więc AOB: *aob*=AB: *ab*, to iest, kąt AOB do kąta *aob* ma się iak łuk AB zawarty między ramionami 1go, do łuku *ab* zawartego między ramionami kąta 2go.

2*re*. Jeżeli łuki AB, *ab*, fig. 60. są niespółmierne, będzie także.

AOB: *aob*=AB: *ab* . — . — . — A.

Jeżeli ta proporcya iest fałszywa, tedy ostatni wyraz *ab* iest albo zamały, albo zawielki do uczynienia proporcyi: trzy bowiem piérwsze wyrazy proporcyi, mogą być iakiekolwiek.

Weźmy naprzód łuk *as*>*ab*, i niech będzie, ieżeli być może

AOB: *aob*=AB: *as*

Podzielmy łuk AB na części równych, 2, 4, 8 i t. d. (109), aż póki nie doydziemy do części mnieyszych od łuku *bs*. Przenieśmy potém części te mnieysze od łuku *bs* na łuk *ab*, poczynaiąc od punktu *a* ku *b*.

Ponieważ łuki *ab*, AB są niespółmierne, więc punkt podziału nie może przypaść na punkt *b*, lecz padnie albo z prawéy strony punktu *b*, *np.* w punkcie *c*, albo z lewéy strony *np.* w punkcie *ć*. Poprowadziwszy promień *oc*, kąty *aoc*, AOB obeymuiące ramionami swemi łuki *ac*, AB spółmierne z wykreslenia, maią się do siebie iak te łuki, podług 1széy części ninieyszego twierdzenia; to iest, *aoc*: AOB=*ac*: AB. A że podług przypuszczenia AOB: *aob*=AB: *as*; więc rozmnożywszy przez siebie wyrazy odpowiadaiące w tych dwóch proporcyach, będzie *aoc*×AOB: AOB × *aob*=*ac*×AB: AB×*as*.

Podzieliwszy dwa piérwsze wyrazy przez AOB a dwa drugie przez AB, będzie

aoc: *aob*=*ac*: *as*.

Lecz kąt *aoc* > *aob*; łuk zaś *ac*<*as* z wykréślenia; to iest, w ostatniéy proporcyi poprzednik 1go stosunku większy iest od swego następnika; poprzednik zaś 2go stosunku mnieyszy iest od swego następnika; a zatém proporcya ta

iest fałszywa. Proporcya ta powstała ze złożenia dwóch proporcyy poprzedzaiących, z których Iwsza *aoc:* AOB = *ac:* AB iest dowiedziona w Iszéy części ninieyszego twierdzenia; druga zatém AOB: *aob* = AB: *as*, w któréy łuk *as* wzięliśmy większy od *ab*, musi być fałszywa. W proporcyi więc oznaczonéy głoską A ostatni wyraz *ab* nie może być zamały: obaczmy czy nie iest zawielki.

Weźmy łuk *aś*<*ab* i niech będzie, ieżeli być może, ta proporcya prawdziwa:

AOB: *aob*=AB: *aś*.

Podzielmy łuk AB na takie części równe, aby przeniosłszy ie na łuk *ab* zaczynaiąc od punktu *a*, iedna takowa część skończyła się między punktami *ś* i *b*, *np.* w punkcie *ć*. Poprowadziwszy promień *oć*, dwa kąty *aoć*, AOB obeymuiące ramionami swoiemi łuki *ać*, AB spółmierne z wykréślenia, maią się do siebie iak te łuki, podług Iszéy części ninieyszego twierdzenia, to iest, *aoć*: AOB = *ać*: AB: a że podług przypuszczenia AOB: *aob* = AB: *aś*; więc

aoć × AOB: AOB × *aob* = *ać* × AB: AB × *aś*,

Podzieliwszy dwa piérwsze wyrazy przez AOB, dwa drugie przez AB, będzie.

aoć: *aob* = *ać*: *aś*: co być nie może: gdyż kąt *aoć*<*aob;* łuk zaś *ać*> *aś* z wykréślenia: więc i proporcya ta: AOB: *aob*=AB: *aś*, w któréy wzięliśmy łuk *aś*<*ab*, iest fałszywa.

W proporcyi zatém A ostatni wyraz *ab* nie może być ani zamały, ani zawielki do uczynienia proporcyi; a tém samém wyraz ten iest takim, iakim być powinien; to iest, proporcya ta AOB: *aob*=AB: *ab*, iest prawdziwa.

Czy więc łuki są spółmierne, czy nie spółmierne, zawsze *kąty maią się do siebie, iak łuki zawarte między ich ramionami, kół równych maiących swoie środki w ich wierzchołku.*

118. *Wniosek* 1. Ponieważ stosunek łuków AB, *ab*, równy iest stosunkowi kątów AOB, *aob;* więc gdy się kąty AOB, *aob* powiększą lub zmnieyszą w iakimkolwiek stosunku, łuki także AB, *ab* powiększą się, albo zmnieyszą w tymże samym stosunku, i odwrotnie, za powiększeniem lub zmnieyszeniem łuków AB, *ab*, kąty także AOB, *aob* powiększą się albo zmnieyszą. Łuki więc te mogą być użyte za miarę wielkości kątów. Przeto też *miarą kąta iest łuk między iego ramionami zawarty., należący do koła, którego środek iest wierzchołkiem tego kąta.*

Byłoby wprawdzie rzeczą przyzwoitą dochodzić wielkości kątów, za pomocą kąta iakiego wziętego za iedność, niżeli za pomocą łuków. I tak *np.* wziąwszy kąt prosty za 1, kąt ostry, iako mnieyszy od prostego, byłby mnieyszym od iedności, kąt roztwarty iako większy od prostego, byłby większym od iedności. Lecz takowy sposób mierzenia kątów lubo nayprzyzwoitszy, w użyciu iednak nie iest wygodny, dla téy naybardziéy przyczyny, że łatwiéy iest brać równe łuki danym łukom, niż równe kąty danym kątom. W takowym sposobie mierzenia kątów, mówić *np.* że łuk AB iest miarą kąta AOB, iest to samo co mówić, że kąt AOB taką iest częścią kąta iakiego wziętego za 1, iaką częścią iest łuk AB łuku zawartego między ramionami kąta wziętego za 1, i który iest częścią okręgu koła maiącego swóy środek w wierzchołku tegoż kąta.

119. *Wniosek* 2. Miarą kąta prostego, któryby nayprzyzwoiciéy było wziąć za iedność do mierzenia kątów, iest czwarta część okręgu: gdyż

wierzchołek S fig. 56 kąta prostego FSG wziąwszy za środek i promieniem iakimkolwiek *np.* SG nakreśliwszy koło; przedłużmy FS do H; będzie FH średnica tego koła (100); a zatém FGH iest połową okręgu: a że kąt GSF=GSH iako proste, więc i łuk FG = GH iako miary kątów równych. Łuk przeto FG iest połową pół okręgu FGH, czyli czwartą częścią okręgu całego.

Miarą zatém kąta ostrego będzie łuk mnieyszy od czwartéy części okręgu: miarą kąta roztwartego będzie łuk większy od czwartéy części okręgu.

120. *Wniosek* 3. Z twierdzenia poprzedzaiącego wypada także, że chcąc dany kąt podzielić na iakąkolwiek liczbę części równych, dosyć iest łuk służący mu za miarę podzielić na tyleż części równych, i punkta podziału połączyć liniiami prostemi z wierzchołkiem kąta: liniie te podzielą kąt dany na części szukane.

Uwaga. Widzieliśmy wyżéy (109), że łuk dany podzielić można na części równych 2, 4, 8, 16 i t. d. Więc na te same części równe można także podzielić dany kąt, iak to iuż innym sposobem okazaliśmy wyżéy (46). Co się tycze dzielenia łuku na inne części równe, iak *np.* na 3, 5, 6 i t. d. do tego potrzeba wyższych wiadomości, niżeli są te, które w Jeometryi elementarney mogą być umieszczone: i kąt więc na takie części równe ieometrycznie dzielonym być nie może, wyłączywszy tylko nie wielką liczbę przypadków szczególnych, które późniéy wymienimy.

121. Twierd. *W dwóch kołach równych lub w iednymże kole łuk większy, ma większą cięciwę; i odwrotnie*; (byleby łuki, o których mowa, były mnieysze od półokręgu).

Dowod. Niech będzie fig. 61 łuk CB>BA, trzeba dowieśdź, że cięciwa CB>BA. Jakoż poprowadziwszy promienie SA, SB, SC, w dwóch tróykątach BSC, BSA, boki BS, CS pierwszego równe są bokom BS, AS drugiego tróykąta: a że kąt BSC>BSA, bo miarą pierwszego iest łuk BC z założenia większy od łuku BA, który iest miarą kąta drugiego: więc i bok BC przeciwny kątowi większemu iest większy od boku AB przeciwnego kątowi mnieyszemu (27); czyli cięciwa BC > BA.

Odwrotnie. Jeżeli cięciwa BC>AB, będzie łuk BC>AB: gdyż w dwóch tróykątach BCS, ABS, boki BS, CS pierwszego równe są bokom BS, AS drugiego tróykąta; a że bok trzeci BC>AB z założenia, więc i kąt BSC>ASB (27), a tém samém i łuk BC>AB.

122. *Uwaga.* Twierdzenie to ma tylko mieysce w tenczas, gdy łuki są mnieysze od półokręgu; łuki zaś większe od półokręgu, maią przeciwną własność, to iest im większy iest łuk, tém iest mnieysza cięciwa, i odwrótnie: i tak łuk AFCB> AFC: a cięciwa pierwszego AB mnieysza iest od AC cięciwy drugiego łuku.

123. Twierd. *Dwie cięciwy równe są w równéy od środka koła odległości: a z dwóch cięciw nierównych mnieysza iest w większéy od środka koła odległości.*

Dowod. 1od. Niech będzie fig. 62. cięciwa AB=CD: ze środka S spuściwszy dwie prostopadłe SE, SG, 1wszą do AB, 2gą do CD, i poprowadziwszy promienie SA, SC, w dwóch tróykątach SAE, SCG prostokątnych, iest bok SA =

SC, iako promienie; bok AE=CG, iako połowy dwóch cięciw równych (107); a zatém dwa te tróykąty przystaną do siebie (52), a wszczególności SE=SG: a że SE i SG są odległościami środka S od cięciw AB, CD (51); więc cięciwy te są w równéy odległości od środka S.

2re Niech będzie cięciwa CF>AB; łuk CF iest większy od łuku AB (121). Na łuku CF wziąwszy łuk CD=AB, i poprowadziwszy cięciwę CD, tudzież ze środka S. spuściwszy dwie prostopadłe SH, SG, 1wszą do cięciwy CF, 2gą do cięciwy CD; w tróykącie SHI prostokątnym przy H, iest SI>SH (86), a tém bardziéy SI+IG>SH; czyli SG>SH: a że SG=SE podług 1széy części ninieyszego twierdzenia; więc i SE>SH to iest, odległość mnieyszéy cięciwy od środka koła iest większa, niż odległość większéy cięciwy od tegoż środka.

124. Twierd. *Kąt maiący swóy wierzchołek na okręgu koła, ma za miarę połowę łuku zawartego między ramionami.*

Dowod. Iod. Niech będzie kąt ACB, fig. 63. maiący wierzchołek C na okręgu, i którego iedno ramie CB przechodzi przez środek koła S. Poprowadziwszy średnicę DE równoodległą od drugiego ramienia AC, będzie kąt ACB=DSB iako iednostronne odpowiadaiące względem sieczney CB i dwóch równoodległych AC, DE. A że miarą kąta DSB iest łuk DB (118), więc i miarą kąta ACB iest łuk DB. Łuk DB=CE, iako miary kątów DSB, CSE równych; łuk CE=AD (115); więc i łuk DB=AD; to iest, łuk AB podzielony iest w punkcie D na dwie równe części; a tém samém łuk DB, będący miarą kąta ACB iest połową łuku AB zawartego między ramionami tegoż kąta.

2re. Gdy środek koła S znayduie się między ramionami kąta ACF maiącego wierzchołek C na okręgu, średnica BC, dzieli kąt ACF. na dwa inne ACB i BCF, których spólném ramieniem iest średnica BC. A zatém podług przypadku 1szego miarą kąta ACB iest połowa łuku AB; miarą kąta BCF iest połowa łuku BF: więc miarą kątów ACB+BCF, iest połowa łuków AB+BF; czyli miarą kąta ACF iest połowa łuku AF zawartego między iego ramionami.

3cie. Gdy środek koła S iest za ramionami kąta HCA maiącego wierzchołek C na okręgu, kąt HCA=HCB—ACB. Miarą kąta HCB iest połowa łuku HB, podług przypadku 1szego. Miarą kąta ACB iest połowa łuku AB. Więc miarą kąta HCB—ACB iest $\frac{1}{2}$HB—$\frac{1}{2}$AB; czyli miarą kąta HCA iest $\frac{1}{2}$HB—$\frac{1}{2}$AB. A że łuk HB—AB=AH, a tém samém $\frac{1}{2}$HB—$\frac{1}{2}$AB=$\frac{1}{2}$AH; więc miarą kąta HCA iest $\frac{1}{2}$AH.

To samo twierdzenie może być dowiedzione sposobem następuiącym:

Poprowadziwszy promień SA fig. 64. w tróykącie ACS kąt zewnętrzny ASB, równy iest dwom wewnętrznym ACS i SAC naprzeciwko leżącym (84). A że kąt SAC=ACS: gdyż tróykąt ACS iest równoramienny; więc kąt ASB=2ACS, czyli kąt ASB=2ACB: więc połowa kąta ASB=ACB A tém samém i połowa miary kąta ASB, czyli połowa łuku AB iest miarą kąta ACB.

Tegoż samego dowodzenia użyć można w dwóch innych przypadkach, uważaiąc, że kąt ACF iest równy summie dwóch kątów ACB, BCF maiących za spólne ramię, średnicę, CB, kąt zaś HCA

równy iest różnicy dwóch kątów HCB i ACB maiących za spólne ramie średnicę BC.

125. *Wniosek* 1. Kąt GCH zawarty między styczną i cięciwą, ma także za miarę połowę łuku CH zawartego między ramionami: gdyż kąt GCH=GCB—HCB. Miarą kąta GCB iako prostego (113), iest połowa półokręgu CHB; miarą kąta HCB iest połowa łuku HAB (125). Więc miarą kąta GCH będzie połowa łuku CHB, mniéy połową łuku HAB: że zaś łuk CHB—HAB=CH; a tém samém $\frac{1}{2}$ CHB—$\frac{1}{2}$ HAB=$\frac{1}{2}$ CH; więc miarą kąta GCH będzie połowa łuku CH zawartego między ramionami. fig. 63.

Wnios. 2. Kąt HCM zawarty między cięciwą CH i przedłużeniem cięciwy CF, ma za miarę połowę summy łuków należących do tych dwóch cięciw, to iest, połowę łuku CH więcéy połową łuku CF: gdyż kąt HCM=HCG+GCM; czyli kąt HCM=HCG+FCI: gdyż kąt FCI=GCM. A że miarą kąta HCG iest połowa łuku CH, a miarą kąta FCI iest połowa łuku CF podług wniosku poprzedzaiącego; więc też i kąta HCM będzie miarą połowa summy tychże łuków.

126. *Wnios.* 3. Kąty E, H, I. fig. 65. maiące wierzchołki na okręgu, a ramionami swoiemi obeymuiące tenże sam łuk FCG, są sobie równe: gdyż wszystkich miarą iest połowa łuku FCG.

127. *Wnios.* 4. Kąt ACB maiący wierzchołek na okręgu, a którego ramiona przechodzą przez końce średnicy AB, iest prosty: gdyż ma za miarę połowę półokręgu AEB: czyli czwartą część okręgu całego; co także można okązać sposobem następuiącym:

Poprowadziwszy promień SC, w dwóch tróy-

kątach równoramiennych ACS, BCS, iest kąt SCA=CAS; kąt SCB=CBS: więc SCA+SCB=CAS+CBS: czyli kąt ACB=CAS+CBS. To iest, w tróykącie ABC, kąt ACB równy iest summie dwóch innych kątów CAS i CBS; a tém samém kąt ACB iest połową summy wszystkich trzech kątów tróykąta ABC: a że wszystkie trzy katy tróykąta ważą dwa kąty proste (83), więc kąt ACB waży połowę dwóch kątów prostych, czyli waży ieden kąt prosty.

Własność ta zwyczaynie tak się wyraża: *kąt w półkolu iest prosty.*

Uwaga. W dowodzeniu pierwszym sposobem poprzedzaiącego twierdzenia, wyprowadziliśmy ważność kąta maiącego wierzchołek na okręgu za pomocą prawdy wyżéy okazanéy, że dwa łuki zawarte między dwiema cięciwami równoodległemi są równe. Wzaiemnie prawdę tę możnaby teraz okazać za pomocą twierdzenia poprzedzaiącego: gdyż fig. 65. ieżeli dwie cięciwy AB, FG, są od siebie równoległe, poprowadziwszy cięciwę FB, kąty ABF, BFG maią za miarę połowy łuków AF i BG: a że kąty te są równe, iako naprzemianległe wewnętrzne, więc i miary ich są równe; a tém samém łuk AF=BG.

128. Twierd. *Kąt ACB fig. 66. maiący wierzchołek w kole między okręgiem i środkiem koła, ma za miarę połową łuku AB zawartego między ramionami, więcéy połowę łuku DE zawartego między przedłużeniami ramion.*

Dowod. Z punktu D poprowadziwszy cięciwę DF równoodległą od BC, będzie miarą kąta ADF połowa łuku AF (124). Łuk AF=AB+BF, czyli łuk AF=AB+DE, gdyż łuk DE=BF (115), a tém samem $\frac{1}{2}$ AF=$\frac{1}{2}$ AB+$\frac{1}{2}$ DE: więc

miara kąta ADF iest $\frac{1}{2}$ AB+$\frac{1}{2}$ ED. A że kąt ADF =ACB (66), więc miarą kąta ACB iest połowa łuku AB więcéy połową łuku ED.

129. *Twierd.* Kąt ACB fig. 67. maiący wierzchołek za kołem, a ramionami swemi obeymuiący dwa łuki AB, ED, *ma za miarę połowę różnicy tychże łuków*, to iest, ma za miarę połowę łuku AB, mniéy połową łuku DE.

Dowod. Z punktu D poprowadziwszy cięciwę DF równoodległą od BC, będzie miara kąta ADF=$\frac{1}{2}$AF. A że łuk AF= AB— BF= AB—DE (116), a tém samém $\frac{1}{2}$ AF = $\frac{1}{2}$ AB— $\frac{1}{2}$ DE; więc miara kąta ADF= $\frac{1}{2}$ AB — $\frac{1}{2}$ DE: że zaś kąt ADF =ACB(67), więc miara kąta ACB= $\frac{1}{2}$ AB— $\frac{1}{2}$DE.

130. Zagad. *Z końca danéy linii AC fig.* 65: *wyprowadzić prostopadłą, nie przedłużaiąc danéy linii, iak wymaga sposób podany wyżéy* (53).

Rozw. Z punktu któregokolwiek S wziętego za daną liniią nakreślić koło, któregoby okrąg daną liniią przecinał w punkcie A; przez punkta A i S poprowadzić liniią prostą AB, przecinaiącą się z okręgiem w punkcie B; punkta B i C złączywszy liniią prostą CB, liniia ta będzie prostopadła do AC: gdyż kąt ACB iest prosty (127).

Zagad. 2. *Z punktu A fig.* 68. *danego za kołem poprowadzić styczną koła.*

Rozw. Srodek danego koła S złączywszy z punktem A liniią prostą SA, i podzieliwszy ią w punkcie C na dwie części równe, z punktu C iako ze środka, promieniem CS wykreślić koło, którego okrąg z okręgiem koła danego, przecina się w punktach R, T. Punkt R lub T złączywszy liniią prostą z punktem A, liniia ta będzie styczną

szukaną: gdyż poprowadziwszy promień ST, kąt STA iest prosty (127), a zatém liniia AT iest prostopadła do promienia ST, a tém samem iest styczną danego koła (113).

131. Twierd. *Okręgi dwóch kół przechodzące przez ieden punkt A. fig.* 69. *linii AS która łączy ich środki, maią tylko ten ieden punkt A spólny, w którym się stykaią, i odwrotnie: gdy się okręgi dwóch kół stykaią, środki ich i punkt zetknięcia się, są na iednéy linii.*

Dowod. Srodki tych kół mogą być albo z iednéy strony punktu zetknięcia się A, iak są S, *s*; albo ieden z iedney, drugi z drugiéy strony tego punktu, iak są S, *ś*. W Iszym przypadku na okręgu koła większego, wziąwszy iakikolwiek punkt C, i z punktu tego do środków S, *s* dwóch kół poprowadziwszy liniie proste CS, Cs; w tróykącie CSs, iest. Ss + Cs > CS (22), czyli Ss + Cs > AS; czyli Ss + Cs > Ss + As. Odiąwszy po obu stronach Ss, zostanie Cs > As. To iest, liniia Cs większa iest od As, promienia koła mnieyszego, a tém samém punkt C musi być za okręgiem tego koła.

W przypadku 2gim, kiedy środki S, ś są po obu stronach punktu A, na okręgu koła wykreślonego promieniem AS, wziąwszy którykolwiek punkt C, i poprowadziwszy liniie proste CS, Cś; w tróykącie CSś, iest Cś + CS > Sś; czyli Cś + AS > Aś + AS: a zatém Cś > Aś. To iest: liniia Cś dłuższa iest od promienia Aś; a tém samém punkt C musi być za okręgiem koła wykreślonego promieniem Aś.

Odwrotnie. Jeżeli okręgi dwóch kół stykaią się z sobą w punkcie A, środki ich i punkt zetknięcia się, są na iednéy linii: gdyż z punktu ze-

tknięcia się A wyprowadziwszy styczną AT, liniia ta prostopadła będzie do promieni AS. As, Aś (113) i wzaiemnie promienie te będą w punkcie A prostopadłe do linii AT. A że z punktu A wziętego na linii AT nie można więcéy prostopadłych do niéy wyprowadzić, tylko iednę (55); więc wszystkie trzy promienie, a tém samém i środki kół S, s. ś, znaydować się muszą na iednéyże linii przez punkt A przechodzącéy.

132. *Uwaga* W przypadku 1szym iest Ss= AS — As: czyli Ss + As = AS. W przypadku 2gim, Śś=AS+Aś. Gdyby w przypadku 1szym, Ss > AS—As, a tém samém Ss + As > AS; na ten czas okręgi dwóch kół, nie mogłyby się z sobą zetknąć, lecz okrąg koła mnieyszego, byłby zawarty w okręgu koła wielkiego. Gdyby zaś Ss > AS—As, a tém samém Ss + As > AS; na ten czas okręgi dwóch kół, przecięłyby się z sobą w punktach C. *c*, iak iest na figurze 70.

W przypadku 2gim, gdyby Śś > AŚ + Aś, rzeczą iest widoczną, iż okręgi dwóch kół nie mogłyby się z sobą zetknąć. Lecz gdyby była liniia Śś < AS + Aś iak iest na fig. 70; na ten czas okręgi dwóch koł, przecięłyby się z sobą w punktach F, *f*.

To iest, okręgi dwóch kół nie mogą się z sobą przeciąć: 1*ód*. gdy odległość ich środków powiększona iednym promieniem, albo się równa promieniowi drugiemu, albo iest od niego mniéysza; 2*re*, gdy odległość środków iest albo równa summie dwóch promieni, albo od niéy większa. Gdy zaś odległość środków powiększona promieniem mniéyszym, większa iest od promienia drugiego; albo gdy odległość środków, mniéysza iest od summy dwóch promieni; na ten czas

okręgi dwóch kół mogą się z sobą przeciąć, byleby w drugim przypadku promień ieden nie był większy od summy promienia drugiego i odległości środków.

Widzieliśmy wyżéy, że kreśląc tróykąt, kiedy są dane trzy liniie proste maiące być iego bokami, iedna z nich bierze się za podstawę, dwa iéy końce za środki, a dwie inne liniie dane za promienie dwóch łuków, których przecięcie się oznaczy wierzchołek szukanego tróykąta. Lecz przecięcie się tych dwóch łuków, w tych tylko przypadkach nastąpić może, któreśmy dopiero wymienili, a które wychodzą nato samo, cośmy iuż wyżéy powiedzieli (43), że trzy dane liniie na boki tróykąta, takie być powinny, aby każda z nich mnieysza była od summy dwóch pozostałych.

133. Zagad. *Wykreślić koło, któregoby okrąg zetknął się z daną liniią AT w punkcie A fig.* 69. *i przeszedł przez punkt B dany za tą liniią AT.*

Rozw. Z punktu A wyprowadziwszy AE prostopadłą do AT, punkt A z punktem B łączę liniią prostą AB, którą w punkcie D podzieliwszy na dwie równe części i z punktu D wyprowadziwszy prostopadłą do AB przecinaiącą się w punkcie ś z liniią AE, punkt ś będzie środkiem, a liniia Aś promieniem koła szukanego. Jakoż środek tego koła powinien się znaydować tak na linii AE, która iest w punkcie A prostopadła do stycznéy AT (131), iako też na linii Dś (108), która iest prostopadłą ze środka cięciwy AB wyprowadzona: więc środek ten znaydować się będzie na spólném tych dwóch liniy przecięciu, którém iest punkt ś.

134. Zagad. *Maiąc dane koło AFH, fig. 69. i punkt za nim B, wykreślić drugie koło, któregoby okrąg przeszedł przez punkt B, i zetknął się z okręgiem koła danego w danym punkcie A.*

Rozw. Punkt A z punktem B złączywszy liniią prostą AB, i że środka D linii AB wyprowadziwszy Dś prostopadłą do AB, przez środek *s* danego koła i przez punkt A prowadzę liniią prostą *s*A, aż do przecięcia się z liniią Dś w punkcie *ś*; punkt *ś* będzie środkiem, a liniia A*ś* promieniem koła szukanego: gdyż tak prostopadła Dś ze środka cięciwy AB wyprowadzona, iako też i liniia A*s* środek danego koła z punktem A łącząca powinny przechodzić przez środek koła szukanego: środek zatém ten należąc do obudwu liniy, znaydować się musi na spólném ich przecięciu, którém iest punkt *ś*.

135. Zagad. *Na linii danéy AB fig. 71. wykreślić odcinek koła w ktorymby się zmieścił kąt równy danemu.*

Rozw. Przez punkt A, linii AB prowadzę liniią AD, któraby z liniią AB czyniła kąt DAB równy danemu. Kreślę potém koło, któregoby okrąg przeszedł przez punkt B i zetknął się z liniią AD w punkcie A (133), odcinek ABF iest szukany: gdyż kąt BAD zawarty między cięciwą AB i styczną AD maiący za miarę połowę łuku AFB (125) równy iest kątowi ACB umieszczonemu w odcinku koła ABF i maiącemu za miarę połowę tegoż łuku (124).

ROZDZIAŁ VI.

o *Powierzchni wielokątów.*

136. W tróykącie iakimkolwiek ACB fig. 72. z wierzchołka kąta C przeciwnego podstawie AB, spuściwszy CD prostopadłą do AB, prostopadła ta zowie się wysokością tegoż tróykąta.

Prostopadła ta CD, może paść, albo wewnątrz tróykąta, iak iest na fig. 1; albo zewnątrz na przedłużenie podstawy AB, iak iest na fig. 2; albo też na sam koniec A podstawy AB, iak iest na fig. 3; a w tym przypadku bok CA iest wysokością tróykąta.

W równoległoboku ABCD fig. 73. wziąwszy którykolwiek bok, np. AB za podstawę, i z któregokolwiek punktu wziętego na boku CD przeciwnym podstawie spuściwszy prostopadłą FE do podstawy AB, prostopadła ta nazywa się wysokością równoległoboku.

Ponieważ kwadrat i prostokąt ma wszystkie kąty proste (80) więc wziąwszy którykolwiek ich bok za podstawę, bok drugi przyległy podstawie będzie wysokością kwadratu lub prostokąta. A że kwadrat ma wszystkie boki równe; więc wysokość kwadratu równa iest iego podstawie.

137. Twierd. *Dwa iakiekolwiek równoległoboki maiące równe podstawy i wysokości, maią równe powierzchnie.*

Dowód. Wystawmy sobie, że równoległobok ABEF fig. 74. iest położony na równoległoboku ABCD, takaby ich podstawy do siebie przystały: ponieważ te dwa równoległoboki maią równe wysokości, więc bok EF równoodległy od podstawy AB. drugiego, padnie na bok CD, ró-

wnoodległy od podstawy AB pierwszego równoległoboku (73), inne zaś dwa boki AF, BE, wezmą położenie albo takie iak iest na fig. I; albo iak iest na fig. 2; albo iak iest na fig. 3.

W przypadku I: w dwóch tróykątach ADF, BCE, bok AD = BC, bok AF = BE, iako boki przeciwne w równoległobokach (78). Nadto kąt DAF = CBE, gdyż ramiona ich są równoodległe i rozchodzą się w iednęż stronę: więc dwa te tróykąty przystaną do siebie, a tém samém powierzchnie ich są równe; czyli tróykąt BCE = ADF: więc ABED—BCE = ABED—ADF; czyli ABCD = ABEF.

To samo iest dowodzenie w drugich dwóch przypadkach.

138. Twierdz. *Tróykąt iakikolwiek ABC fig. 75. iest połową równoległoboku AD maiącego tę samę podstawę i wysokość.*

Dowód. Z punktu B wyprowadziwszy BF równoległą od AC, aż do przecięcia się w punkcie F z przedłużonym bokiem ED, czworokąt ABFC iest równoległobokiem; a zatém przekątna BC dzieli go na dwa tróykąty ABC, BCF mogące do siebie przystać, a tém samém równe co do powierzchni (78); więc ieden z nich *np.* tróykąt ABC iest połową powierzchni obudwu czyli połową równoległoboku AF: a że równoległobok AF równy iest co do powierzchni równoległobokowi AD (137), więc tróykąt ACB iest połową powierzchni równoległoboku AD.

139. *Wniosek.* Stąd wypada, że dwa tróykąty maiące równe wysokości i podstawy są równe co do powierzchni; gdyż każdy z nich iest połową równoległoboku maiącego tęż samę wysokość i podstawę co i tróykąty.

140. Zagad. *Dany wielokąt zamienić na inny równy danemu co do powierzchni, i któryby miał boków mniéy iednym, niż wielokąt dany.*

Rozwiąz. Niechby wielokąt dany był pięciokątem AD fig. 76. który zamienić trzeba na czworokąt równy mu co do powierzchni. Przez wierzchołki dwóch kątów E i C poprowadziwszy liniią EC w tróykącie EDC przez wierzchołek kąta D poprowadźmy liniią DF równoległą od EC, aż do spotkania się w punkcie F z przedłużonym pięciokąta bokiem AE. Poprowadziwszy liniią CF, czworokąt ABCF będzie szukany: gdyż tróykąty ECD, ECF podług poprzedzaiącego wniosku są równe co do powierzchni, iako maiące tę samę podstawę i wysokość (74); a zatém

ABCE + ECD = ABCE + ECF; czyli ABCDE = ABCF.

Gdyby w pięciokącie danym ABCDE fig. 77. kąt D był wkłęsły, wykreślenie byłoby zupełnie to samo co wyżéy; lecz w dowodzeniu zachodzi nieiaka odmiana; okazawszy bowiem że tróykąt ECD = ECF, będzie ABCE—ECD = ABCE — ECF; czyli ABCDE = ABCF.

141. *Wniosek.* Tymże samym sposobem postępuiąc, można czworokąt ABCF zamienić na tróykąt równy mu co do powierzchni; i w ogólności każdy wielokąt zamienionym być może na tróykąt równy co do powierzchni. I tak sześciokąt zamieniwszy naprzód sposobem wyżéy podanym na pięciokąt, zamienilibyśmy potém pięciokąt na czworokąt, a czworokąt na tróykąt.

142. Twierd. *Dwa prostokąty AC, EG fig. 78. których wysokości są równe, maią się do siebie iak podstawy;* to iest, prostokąt ieden tyle

razy iest większy lub mniéyszy od drugiego ile razy podstawa pierwszego iest większa lub mnieysza od podstawy drugiego; czyli

ABCD: EFGH = AB: EF.

Dowod. Podstawy AB, EF, mogą być spółmierne lub niespółmierne. W Iszym przypadku daymy że AB zamyka takich części 8, iakich EF zamyka 4. Podzieliwszy AB na 8, EF na 4 części równe (37); i z punktów podziału wyprowadziwszy prostopadłe do tych podstaw, aż do przecięcia się z bokami DC, HG przeciwnemi podstawom AB, EF; prostopadłe te podzielą prostokąt AC na 8, prostokąt EG na 4 prostokąty równe między sobą (137) gdyż wszystkie maią równe podstawy i wysokości. Będzie więc ABCD: EFGH = 8: 4, A że AB: EF = 8: 4: więc ABCD: EFGH = AB: EF.

W 2gim przypadku, kiedy podstawy AB, EF fig. 79. są niespółmierne, będzie także ABCD: EFGH = AB: EF . . . . . A.

Jakoż: gdyby proporcya ta była fałszywa, ostatni iéy wyraz EF, byłby albo zamały, albo za wielki do uczynienia proporcyi, trzy bowiem pierwsze wyrazy mogą być iakiekolwiek. Daymyż nato, ieżeli być może, że ta proporcya iest prawdziwa:

ABCD: EFGH = AB: Es, w któréy Es > EF.

Podzieliwszy AB na części równych 2. 4 8. i t. d. aż póki nie dóydziemy do części mnieyszych od linii Fs. Przenieśmy potém części te mnieysze od linii Fs na liniią EF zaczynaiąc od punktu E ku F. Ponieważ liniie AB, EF są niespółmierne, więc punkt podziału nie może przypaść na punkt F, lecz padnie albo z prawéy strony *np.* w punkcie c, albo z lewéy strony, *np.* w punkcie *ć*. Z punktu c wyprowadziwszy *co* prostopadłą do Es

Es, aż do przecięcia się z przedłużonym bokiem GH w punkcie o, prostokąty EcoH, ABCD maią podstawy Ec, AB spółmierne z wykréślenia, będzie więc podług 1széy części ninieyszego twierdzenia.

EcoH: ABCD = Ec: AB. A że podług przypuszczenia

ABCD: EFGH = AB: Es, więc rozmnożywszy w tych dwoch proporcyach wyrazy sobie odpowiadaiące, będzie

EcoH × ABCD: ABCD × EFGH = Ec × AB: AB × Es.

Podzieliwszy dwa piérwsze wyrazy przez ABCD, dwa drugie przez AB, będzie EcoH: EFGH = Ec: Es. W téy proporcyi 1wszy poprzednik większy iest od swego następnika, 2gi zaś poprzednik mniéyszy iest od swego następnika podług wykréślenia: proporcya więc ta iest fałszywa, Proporcya ta powstała ze złożenia dwóch proporcyy poprzedzaiących, z których piérwsza iest wypadkiem 1wszéy części niniéyszego twierdzenia: druga więc, w któréy ostatni wyraz Es wzięliśmy większy od EF, musi być fałszywa, A zatém w proporcyi A ostatni wyraz EF nie może być za mały: obaczmy czy nie iest za wielki. Daymy że ta proporcya iest prawdziwa:

ABCD: EFGH = AB: Eś, w któréy Eś < EF.

Podzielmy AB na takie części równe, aby przeniosłszy ie na EF zaczynaiąc od E ku F, ieden punkt podziału padł między ś i F, *np.* w punkcie *ć*. Z punktu *ć* wyprowadziwszy *ćó* prostopadłą do EF aż do przecięcia się z bokiem HG w punkcie *ó*; prostokąty E*ć*o*ó*H, ABCD maią podstawy spółmierne z wykréślenia: będzie więc

Eć́óH: ABCD=Eć: AB; a że podług przypuszczenia
ABCD: EFGH=AB: Eś; będzie więc
Eć́óH × ABCD: ABCD × EFGH=Eć × AB: AB × Eś. Więc
Eć́óH: EFGH=Eć: Eś.

W téy proporcyi piérwszy poprzednik mniéyszy iest od swego następnika, drugi zaś poprzednik większy iest od swego następnika z wykréślenia. Proporcya zatém ta iest fałszywa, a więc i proporcya ią poprzedzaiąca, w którey ostatni wyraz Eś wzięliśmy mniéyszy od EF, musi być fałszywa. W proporcyi zatém oznaczoney głoską A wyraz EF nie może być za wielki.

Kiedy więc wyraz ten EF nie iest ani za mały, ani za wielki do uczynienia proporcyi A; proporcya zatém ta iest prawdziwa, to iest, *dwa prostokąty z równemi wysokościami, maią się iak podstawy, choćby podstawy były niespółmierne.*

143. Tymże samym sposobem dowieść można, że *dwa prostokąty, których podstawy są równe, maią się iak wysokości.* Jakoż wziąwszy wysokości ich za podstawy, a podstawy za wysokości, twierdzenie to niczem nie będzie się różniło od poprzedzaiącego.

144. Twierdz. *Dwa iakiekolwiek prostokąty, AC. EG: fig. 80 maią się iak iloczyny ich podstaw, przez wysokości*: to iest będzie ABCD: EFGH=AB × BC: EF × FG.

Dowod. Na wysokości FG prostokąta EG wziąwszy FI=BC, i poprowadziwszy IK równoodległą od EF; dwa prostokąty AC, EI maiące równe wysokości, są do siebie iak podstawy; podobnież dwa prostokąty EI, EG, maiące równe podstawy, są do siebie iak wysokości, to iest:
ABCD: EFIK=AB: EF.
EFIK: EFGH=FI: FG.

W tych dwóch proporcyach rozmnożywszy wyrazy sobie odpowiadaiące, cztery iloczyny będą w proporcyi, to iest. ABCD × EFIK: EFIK × EFGH=AB × FI: EF × FG. Podzieliwszy dwa piérwsze wyrazy przez EFIK, i w 3cim wyrazie zamiast FI położywszy BC, będzie ABCD: EFGH =AB × BC: EF × FG.

145. *Wnioski.* 1. Niech będzie prostokąt AB i kwadrat *ac* fig. 81. w których bok AB ma 8 stop, bok BC ma 4 stopy, bok *ab* ma iednę stopę i bok *bc* 1 stopę. Podług twierdzenia poprzedzaiącego iest ABCD: *abcd*=AB × BC: *ab* × *bc*. Zamiast boków położywszy liczby wyrażaiące ich ważność w stopach, będzie ABCD: *abcd* 32: 1.

W téy proporcyi ponieważ poprzednik 2go stosunku iest 32 razy większy od swego następnika; więc i poprzednik 1go stosunku iest 32 razy większy od swego następnika: to iest, powierzchnia prostokąta ABCD zamyka w sobie 32 kwadratów równych kwadratowi *ac*: i gdyby powierzchnia kwadratu *ac* wzięta była za iedność do mierzenia powierzchni prostokątów, maiąc dany iakikolwiek prostokąt, łatwoby znaleźć można, ile razy powierzchnia iego zamyka w sobie powierzchnią kwadratu *ac* wziętego za iedność. Na ten koniec dosyćby było zmierzyć danego prostokąta podstawę AB i wysokość BC w stopach mierniczych, i rozmnożyć liczbę stóp podstawy, przez liczbę stóp wysokości: iloczyn okaże, ile razy powierzchnia danego prostokąta

zamyka w sobie powierzchnią kwadratu *ac* wziętego za iedność; czyli, co na iedno wychodzi, ile powierzchnia danego prostokąta zamyka w sobie stóp kwadratowych: kwadrat bowiem którego bok ma stopę mierniczą, zowie się stopą kwadratową.

Gdyby kwadrat wzięty za iedność do mierzenia powierzchni prostokątów, był łokciem, prętem lub sznurem kwadratowym; podstawę i wysokość danego prostokąta zmierzylibyśmy przez łokcie, pręty lub sznury miernicze; a w ten czas iloczyn podstawy przez wysokość okazałby, ile powierzchnia danego prostokąta zamyka w sobie łokci, prętów lub sznurów kwadratowych. A stąd wypada, *że powierzchnia prostokąta równa iest iloczynowi iego podstawy przez wysokość.*

Prawdę tę naocznie okazać można sposobem następuiącym: Niech będzie prostokąt AC którego powierzchnią zmierzyć mamy. Daymy że podstawa AB zamyka w sobie bok *ab* kwadratu *abcd* wziętego za iedność 8 razy, wysokość zaś BC zamyka w sobie tenże bok *ab* 4 razy. Podzieliwszy AB na 8 części równych, BC na 4 części równe, i przez punkta podziałów poprowadziwszy liniie równoodległe od BC i AB, powierzchnia prostokąta AC podzieloną zostanie przez te liniie równoodległe na 4ry rzędy kwadratów równych kwadratowi *ac*. a każdy rzęd zamyka 8 takich kwadratów: liczba zatém wszystkich kwadratów w powiérzchni prostokąta AC zawartych iest 4 razy 8, czyli 32.

Gdyby wysokość BC zamykała w sobie 5, 10, 15 i t. d. razy bok *ab* kwadratu *abcd*; powiérzchnia prostokąta AC byłaby podzielona na

5, 10, 15 i t. d. rzędów, z których każdy zamykałby 8 kwadratów równych kwadratowi *ac*; a tém samém powierzchnia ta zamykałaby 5, 10, 15 i t. d. razy 8 takich kwadratów, iak iest *ac*; to iest, powierzchnia byłaby równa iloczynowi podstawy przez wysokość.

146. *Wniosek.* 2. Ponieważ w kwadracie wysokość równa iest podstawie, a zatém dla znalezienia powiérzchni kwadratu dosyć iest zmierzyć iego podstawę, i znaleziona liczbę stóp, łokci, lub prętów i t. d. rozmnożyć przez siebie samę, czyli podnieść liczbę tę do drugiego stopnia.

147. *Wniosek.* 3. Powiérzchnia równoległoboku iakiegokolwiek równa iest także iloczynowi iego podstawy przez wysokość: gdyż równoległobok równy iest w powiérzchni prostokątowi maiącemu tę samę podstawę i wysokość (137).

148. *Wniosek.* 4. A zatém równoległoboki maiące równe wysokości, są do siebie iak podstawy: gdyż nazwawszy ieden równoległobok R, drugi *r*, podstawę piérwszego P, wysokość W, podstawę drugiego *p*, wysokość W; będzie powierzchnia piérwszego $P \times W$, powierzchnia drugiego $p \times W$: a zatém będzie R: $r = P \times W : p \times W$. W téy proporcyi dwa wyrazy drugiego stosunku podzieliwszy przez W, będzie R: $r = P : p$.

Tymże samym sposobem okazać można, że dwa równoległoboki maiące równe podstawy, są do siebie iak wysokości; maiące różne podstawy i wysokości, są do siebie iak iloczyny podstaw przez wysokości.

149. *Wniosek.* 5. Ponieważ tróykąt iest połową równoległoboku maiącego tę samę podstawę i wysokość (138); więc powierzchnia tróykąta

równa iest połowie iloczynu iego podstawy przez wysokość; albo, co na iedno wychodzi, równa iloczynowi iego podstawy przez połowę wysokości, albo też równa iloczynowi iego wysokości przez połowę podstawy.

150. *Wniosek.* 6. A zatém tróykąty maiące równe wysokości są do siebie iak podstawy: gdyż oznaczywszy ieden tróykąt głoską T, drugi t, podstawę piérwszego P, wysokość W, podstawę drugiego p. wysokość W: będzie powierzchnia 1go $P \times \frac{1}{2} W$, powierzchnia 2go $p \times \frac{1}{2} W$: a zatém $T:t = P \times \frac{1}{2} W : p \times \frac{1}{2} W$. Podzieliwszy dwa drugie wyrazy przez $\frac{1}{2} W$, będzie $T:t = P:p$.

Tymże sposobem okazać można, że tróykąty maiące równe podstawy są do siebie iak wysokości; maiące różne pndstawy i wysokości, są do siebie iak iloczyny podstaw przez wysokości.

151. *Wniosek.* 7. Chcąc znaleźć powierzchnią iakiegokolwiek wielokąta, trzeba go naprzód podzielić przekątnemi na tróykąty (94), potém wyrachować powiérzchnią każdego tróykąta podług wniosku 5; summa powiérzchni wszystkich tróykątów będzie powierzchnią danego wielokąta.

152. Twierdzenie. *Powiérzchnia czwóroboku ABCD, fig. 82. w którym dwa tylko boki AB, CD są równoodległe, równa iest iloczynowi iego wysokości EF, przez połowę summy dwóch boków równoodległych.*

Dowod. Poprowadziwszy przekątną AC, powiérzchnia tego czworoboku podzieloną będzie na dwa tróykąty ACB, ACD, w których boki AB i CD wziąwszy za podstawy, wysokość piérwszego będzie prostopadła z punktu C spuszczona na AB, wysokość drugiego będzie prostopadła z punktu

A spuszczona na CD. Dwie te prostopadłe są sobie równe (73). i równe wysokości czworoboku ABCD; będzie zatém powiérzchnia tróykąta ACB $= EF \times \frac{1}{2} AB$, powierzchnia tróykąta ACD $= EF \times \frac{1}{2} CD$ (149): więc $ACB + ACD = EF \times \frac{1}{2} AB + EF \times \frac{1}{2} CD$ czyli $ABCD = EF\,(\frac{1}{2}AB + \frac{1}{2}CD)$; czyli

$$ABCD = EF\left(\frac{AB+CD}{2}\right)$$

153. *Twierd.* W czworoboku ABCD ieden z boków nie równoodległych, *np.* bok CB podzieliwszy w punkcie M na dwie części równe, i z punktu M poprowadziwszy MP równoległą od AB; będzie *połowa summy dwóch boków równoodległych AB i CD równa linii MP.*

Dowod. Przez punkt M poprowadziwszy linią GH równoodległą od AD, aż do przecięcia się w punkcie G z przedłużonym bokiem CD: w dwóch tróykątach CGM, BHM, bok CM = BM z wykréślenia; kąty przy M równe (19), kąt MCG = MBH (66), więc dwa te tróykąty przystaną do siebie (26); a w szczególności CG = BH. Że zaś liniie AH, PM, DG, są między sobą równe (71) więc 2PM = AH + DG. W tém równaniu z drugiéy strony dodawszy BH, a odiąwszy CG, przez co się równanie nie odmieni, gdyż dwie te liniie są sobie równe z dowiedzenia, będzie:

$2PM = AH + BH + DG - CG$; czyli $2PM = AB + DC$; a zatém:

$$PM = \frac{AB+CD}{2}$$

154. *Wniosek.* 1. A zatém powierzchnia czworoboku ABCD równa iest wysokości iego EF rozmnożonéy przez liniią PM.

Wniosek. 2. Można więc powierzchnią wielokąta iakiegokolwiek AD fig. 83. wynaleźć także sposobem następuiącym: przez wierzchołki kątów E, C, F poprowadziwszy liniie EI CH, GF równoodległe od AB; powierzchnia wielokąta AD podzieloną będzie na czworoboki AG, FC, HI, i na tróykąt EDI. Znalazłszy więc powierzchnią tych czworoboków którymkolwiek z dwóch sposobów podanych wyżéy, i dodawszy ie do powiérzchni tróykąta EDI, summa ta równa będzie powiérzchni danego wielokąta.

155. Zagad. *Dany tróykąt zamienić na prostokąt lub iakikolwiek równoległobok równy tróykątowi co do powierzchni.*

Rozwiąz. Wykréślmy prostokąt lub równoległobok, daiąc mu podstawę równą podstawie danego tróykąta, a wysokość równą połowie wysokości tegoż tróykąta; albo też daiąc mu podstawę równą połowie podstawy danego tróykąta, a wysokość równą wysokości tegoż tróykąta: prostokąt ten lub równoległobok będzie szukany (138).

156. Zagad. *Dany prostokąt AC fig. 84. lub równoległobok iakikolwiek zamienić na prostokąt lub równoległobok inny, równy danemu co do powierzchni, któryby miał za podstawę liniią daną BG.*

Rozw. Podstawę AB danego prostokąta lub równoległoboku przedłużmy do G tak aby przedłużenie to było równe linii danéy BG; z punktu G poprowadźmy GH równoodległą od AC, aż do przecięcia się z przedłużonym bokiem AD w punkcie H. Poprowadziwszy przekątną BH, i przedłużywszy ią, aż do zeyścia się z przedłużonym bokiem AD w punkcie I, z punktu I poprowadźmy FI równoległą od AG, która z przedłużonemi bokami CB, HG spotyka się w punktach E, F: równoległobok BF iest szukany.

Gdyż równoległobok DF przez przekątną HI podzielony iest na dwa tróykąty IDH, IFH, równe (78). Tróykąt IDH składa się z równoległoboku AC, z tróykąta BCH, i tróykąta ABI; tróykąt IFH składa się z równoległoboku BF, z tróykąta BGH, i z tróykąta IBE: a że tróykąt BCH=BGH, i tróykąt ABI=IBE, więc i równoległobok AC=BF.

Albo tak: tróykąt CBH=BGH; tróykąt ABI=EBI; więc CBH+ABI=BGH+EBI. Tróykąt IDH=FHI. od stron tego rownania odiąwszy strony równania poprzedzaiącego, zostanie.

IDH—CBH—ABI=FHI—BGH—EBI; czyli AC=BF.

Uwaga. Tym samym sposobem postąpić należy, chcąc dany kwadrat zamienić na prostokąt równy kwadratowi co do powierzchni, i któryby podstawę miał równą linii danéy.

157. Zagad. *Maiąc dane dwa prostokąty lub iakiekolwiek równoległoboki, wykréślić 3ci któregoby powierzchnia rowna była summie lub różnicy powiérzchni dwóch równoległoboków danych.*

Rozwiąz. Dwa dane równoległoboki maią albo równe podstawy, a wysokości różne; albo równe wysokości, a różne podstawy; albo i podstawy i wysokości różne.

W przypadku 1wszym nazwiymy ieden równoległobok R, drugi *r*, podstawę 1go P, wysokość W, podstawę 2go P, wysokość *w*.

Ponieważ powiérzchnia równoległoboku, równa iest iloczynowi iego podstawy przez wysokość (147), będzie więc $R=P\times W$; $r=P\times w$. Strony dwóch tych równań, naprzód dodawszy, potém odiąwszy od siebie, będą dwa następuiące równania: $R+r=P\times W+P\times w$; $R-r=P\times W-P\times w$. Czyli $R+r=P(W+w)$; $R-r=P(W-w)$. To iest, summa powierzchni obudwu równoległoboków równa iest iloczynowi podstawy iednego z nich przez summę wysokości obudwóch: różnica powiérzchni obudwu równoległoboków równa iest iloczynowi podstawy iednego z nich, przez różnicę wysokości obudwu.

A zatém chcąc wykréślić równoległobok równy co do powierzchni dwom danym; trzeba mu dać za podstawę liniią równą podstawie iednego z nich, a za wysokość liniią równą wysokości obudwu. Chcąc zaś wykréślić równoległobok, któregoby powiérzchnia równa była różnicy powierzchni dwóch danych; trzeba mu dać za podstawę liniią równą podstawie iednego z danych, a za wysokość liniią równą różnicy wysokości obudwu.

W przypadku 2gim, kiedy wysokości dwóch danych równoległoboków są równe, a podstawy różne; nazwawszy ieden równoległobok R, drugi r, podstawę iednego P, drugiego p, a wysokości obudwu W, i odbywszy działanie iak wyżéy, będzie $R+r=W(P+p)$. $R-r=W(P-p)$; i t. d.

W przypadku 3. kiedy dwóch danych równoległoboków i podstawy i wysokości są różne, zamieniwszy ieden z nich na inny równy mu co

do powierzchni, któryby miał za podstawę liniią równą podstawie lub wysokości drugiego równoległoboku danego; będą dwa równoległoboki maiące równe podstawy, iak w przypadku 1, albo równe wysokości iak w przypadku 2.

Tymże sposobem postąpić należy, chcąc znaleźć prostokąt równy co do powierzchni summie lub różnicy dwóch danych kwadratów, lub iednego kwadratu a drugiego prostokąta. Rozwiązaliśmy zagadnienie to sposobem skróconym za pomocą głosek; lecz ie z łatwością rozwiązać można ieometrycznie, używaiąc figur zamiast głosek.

158. Twierd. *Kwadrat wykréślony na linii AB, fig. 85. która iest summą dwóch liniy AC i BC, składa się z kwadratu wykréślonego na linii AC, z kwadratu wykréślonego na linii BC, i z dwóch prostokątów, których bokami przyległemi są liniie AC i BC*; czyli AB^2, albo $(AC+BC)^2=AC^2+BC^2+2AC\times BC$.

Dowod. Na linii AB wykréśliwszy kwadrat ABDE, i wziąwszy AH=AC, przez punkt H poprowadźmy HF równoległą od AB, przez punkt C poprowadźmy CI równoległą od BD. Tym sposobem kwadrat AD podzielony został na części: piérwsza AG iest kwadratem wykréślonym na linii AC: gdyż wzięliśmy AH=AC; druga FI iest kwadratem wykréślonym na linii BC; ponieważ AB=AE, AC=AH; więc AB—AC=AE—AH; czyli CB=EH=IG=GF.

Nakoniec trzecia i czwarta część są dwa prostokąty HI, CF, których boki HG i CG równe są linii AC, boki zaś HE i GF równe są linii BC.

Albo tak: Liniią AC oznaczywszy głoską *a*, a liniią CB głoską *b*, będzie liniia AB=*a*+*b*. Więc $AB^2 = (a+b)\ (a+b)$; czyli $AB^2 = a^2 + b^2 + 2ab$. To iest, kwadrat z linii AB równy iest summie kwadratów z linii AC, i BC, więcey podwóynym iloczynem z ważności linii AC, przez ważność linii AC; czyli co na iedno wychodzi, więcéy dwoma prostokątami z linii AC i BC:

159. Twierd. *Kwadrat wykréślony na linii AB fig.* 86. *która iest różnicą dwóch liniy AC i BC, składa się z kwadratu linii AC, z kwadratu linii BC. mniéy dwoma prostokątami z linii AC i BC; czyli*

AB^2 albo $(AC-BC)^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \times BC$.

Dowod. Na linii AC wykréśliwszy kwadrat AD, i wziąwszy AH=AB, z punktu H poprowadźmy HF równoodległą od AC, i z punktu B poprowadźmy BI równoodległą od CD, nakoniec na linii HE wykréślmy kwadrat LE.

Łatwo iest okazać, że LE iest kwadratem z linii BC; AG iest kwadratem z linii AB; że LI iest prostokątem z linii AC i BC; CI iest prostokątem z linii AC i BC. Od całéy figury ACD KLH, czyli od kwadratu z linii AC i od kwadratu z linii BC odiąwszy dwa prostokąty LI, CI czyli dwa prostokąty z AC i BC, zostanie AG kwadrat z linii AB,

Oznaczywszy liniie AC, BC głoskami *a* i *b*, i odbywszy działanie iak w twiérdzeniu poprzedzaiącém, wypadnie $AB^2 = (a-b)\ (a-b)$; czyli $AB^2 = a^2 + b^2 - 2ab$.

160. Twierd. *Prostokąt maiący za podstawę summę dwóch liniy AB, CB, fig.* 87. *a ich*

różnicę za wysokość, równy iest różnicy kwadratów z tychże liniy czyli

$(AB+BC)\ (AB-BC) = AB^2 - BC^2$.

Dowod. Wykréśliwszy na liniiach AB, AC kwadraty AD, AI, przedłużmy AB do K tak, aby było BK=BC, i dopełniymy prostokąta AL: prostokąt ten ma za podstawę liniią AK równą summie dwóch danych liniy AB i BC, a za wysokość liniią AE równą różnicy tychże liniy: gdyż AE=AF—FE=AB—BC. A zatém prostokąt AL= (AB+BC) (AB—BC). Ten sam prostokąt AL=AH+BL; a że BL=FI, co iest łatwo okazać; więc AL=AH+FI. AH+FI= AD—DI=$AB^2 - BC^2$: gdyż kwadrat DI=CB^2. Więc AL=$AB^2 - BC^2$; czyli (AB+BC) (AB —BC)=$AB^2 - BC^2$.

Oznaczywszy liniie AB, BC głoskami *a* i *b*, i odbywszy działanie iak wyżéy, wypadnie (AB+ BC) $(AB-BC) = (a+b)\ (a-b) = a^2 - b^2$.

161. Twierd. *W tróykącie prostokątnym ABC fig.* 88, *kwadrat AK z przeciwprostokątnéy AB równy iest summie kwadratów AH i CG z dwóch ramion kąta prostego.*

Dowod. Z wiérzchołka kąta prostego C spuściwszy CD prostopadłą do AB, i przedłużywszy ią aż do przecięcia się z bokiem IK w punkcie M. poprowadźmy liniie AG, CK: kąt CBG=ABK, bo obadwa proste: więc kąt CBG+CBA=ABK + CBA; czyli kąt ABG=CBK. A zatém w dwóch tróykątach ABG, CBK bok BG=CB iako boki kwadratu BE, bok AB=BK iako boki kwadratu AK, i kąty między temi bokami zawarte, ABG, CBK równe: więc dwa te tróykąty przystaną do siebie (24), a tém samém powiérzchnie ich są równe. Tróykąt ABG iest połową

kwadratu BE: gdyż maią tę samę podstawę BG, i wysokość CB (149): gdy bowiem kąty BCA i BCE czynią dwa kąty proste, liniie AC i CE składaią iednę liniią prostą AE (17), która iest równoodległą od BG. Tróykąt CBK iest połową prostokąta BM, gdyż maią tę samę podstawę BK, i wysokość BD. Gdy więc połowa kwadratu BE, równa iest połowie prostokąta BM, tém samém i cały kwadrat BE równy iest całemu prostokątowi BM. Poprowadziwszy liniie od F do B, i od C do I tym samym sposobem dowiedlibyśmy, że kwadrat AH równy iest prostokątowi AM.

Lecz summa prostokątów AM i BM czyni kwadrat AK; więc kwadrat AK z przeciwprostokątnéy AB równy iest summie kwadratów AH i BE z dwóch ramion kąta prostego.

162. *Wniosek.* 1. Prostokąt AM i kwadrat AK maiące tęż samę podstawę AI są do siebie iak wysokości AD, AB. podobnież prostokąt BM i kwadrat AK, maiąc tęż samę podstawę KB są do siebie iak wysokości BD i AB: to iest ADMI: ABKI=AD: AB. BDMK: ABKI=BD: AB. W tych dwóch proporcyach zamiast prostokątów ADMI, BDMK położywszy równe im kwadraty ACHF, BCEG: będzie ACHF: ABKI=AD: AB. BCEG: ABKI=BD: AB. to iest, kwadraty z ramion kąta prostego, maią się do kwadratu z przeciwprostokątnéy; iak odcinki AD, BD przyległe tym ramionom, do przeciwprostokątnéy.

163. *Wniosek.* 2. ADMI, BDMK maiące równe podstawy, są do siebie iak wysokości AD, BD; to iest, ADMI: BDMK=AD: BD. Zamiast prostokątów położywszy równe im kwadraty, będzie ACHF: BCEG=AD: BD. To iest, kwadraty z ramion kąta prostego, maią się do siebie iak

przyległe tym ramionom odcinki przeciwprostokątnéy.

164. Zagadnie. *Wykréślić kwadrat równy summie dwóch kwadratów danych.*

Rozwiąz. Wykréśliwszy kąt prosty daiąc mu za iedno ramie bok iednego kwadratu, za drugie ramie bok drugiego kwadratu danego, i końce tych dwóch ramion złączywszy liniią prostą; utworzy się tróykąt prostokątny, któregó przeciwprostokątna będzie bokiem kwadratu szukanego (161).

165. *Wniosek.* Gdyby dwa dane kwadraty były sobie równe, kwadrat trzeci znaleziony równy ich summie, byłby dwa razy większy od iednego z danych. A zatém chcąc mieć kwadrat dwa razy większy od danego; trzeba wykréślić kąt prosty, daiąc mu za ramiona dwie liniie równe bokowi danego kwadratu; złączywszy końce tych ramion liniią prostą, utworzy się tróykąt prostokątny, którego przeciwprostokątna będzie bokiem kwadratu szukanego.

Uwaga. W danym kwadracie ABCD fig. 89. poprowadziwszy przekątną AC, w tróykącie ABC prostokątnym przy B, iest $AC^2 = AB^2 + BC^2$ (161) czyli $AC^2 = 2AB^2$ gdyż BC=AB. To iest, kwadrat z przekątnéy iest dwa razy większy od kwadratu z boku AB, czyli od kwadratu danego.

Prawdę tę można okazać naocznie. Przez punkta D i B poprowadziwszy liniie HG, FE równoodległe od AC, aż do przecięcia się z liniiami HE, GF przez punkt A i C poprowadzonemi równoodległe od DB przekątney danego kwadratu ABCD, powstanie nowy kwadrat EFGH, który iest kwadratem z AC przekątnéy danego kwa-

dratu, i który zamyka 8 tróykątów równych między sobą i takich, iakich dany kwadrat ABCD zamyka 4. Więc kwadrat EFGH iest dwa razy większy od kwadratu ABCD.

A zatém chcąc wykréślić kwadrat dwa razy większy od danego, trzeba w danym kwadracie poprowadzić przekątną: ta będzie bokiem kwadratu szukanego.

166. *Wniosek.* Ponieważ kwadrat z przekątnéy AC iest 2 razy większy od kwadratu ABCD, czyli od kwadratu z boku AB, będzie więc $AB^2 : AC^2 = 1 : 2$. A zatém $AB : AC = 1 : \sqrt{2}$. To iest; bok kwadratu tak się ma do przekątnéy tegoż kwadratu, iak 1 do pierwiastku liczby 2. A że 1, i $\sqrt{2}$ są dwie liczby niespółmierne, gdyż prawdziwego piérwiastku kwadratowego liczby 2 mieć nie można: więc bok i przekątna kwadratu, są dwie liniie niespółmierne.

167. Z poprzedzaiącego twierdzenia wypada, że chcąc wykréślić kwadrat trzy razy większy od danego, trzeba narysować tróykąt prostokątny, w którymby iedno ramie kąta prostego było równe bokowi danego kwadratu, a drugie ramie równe przekątnéy tegoż kwadratu: przeciwprostokątna będzie bokiem kwadratu szukanego. Chcąc mieć kwadrat 4 razy większy od danego, trzeba tróykątowi prostokątnemu dać ramiona kąta prostego równe przekątnéy danego kwadratu; przeciwprostokątna będzie bokiem kwadratu szukanego; albo też wykreślić kwadrat, któregoby bok był dwa razy większy od boku kwadratu danego. Chcąc mieć kwadrat 5 razy większy od danego, trzeba dać tróykątowi prostokątnemu iedno ramie kąta prostego równe przekątnéy danego kwadratu, drugie równe bokowi kwadratu 3 razy większego niż iest dany: przeciwprostokątna będzie bokiem kwadratu szukanego: albo też znaleźć kwadrat równy summie danego i 4 razy większego niż iest dany. Podobnież chcąc mieć kwadrat 6 razy większy od danego, trzeba znaleźć kwadrat równy summie kwadratu danego, i pięć razy większego niż iest dany; albo też trzeba znaleźć kwadrat równy summie dwóch kwadratów innych, z którychby ieden był dwa razy, drugi 4 razy większy od danego; albo nakoniec, trzeba znaleźć kwadrat 3 razy większy od danego; przekątna tego kwadratu, będzie bokiem kwadratu 6 razy większego niż iest dany.

Tym sposobem można znaleźć kwadrat tyle razy większy od danego, ile się podoba. Lecz można także i następuiącym sposobem rozwiązać to samo zagadnienie:

Daymy że trzeba znaleźć kwadrat 5 razy większy od danego kwadratu *ac* fig. 90. Prowadzę liniią AB 5 razy dłuższą od boku *ab* danego kwadratu; na téy linii iako na średnicy kréślę półkole; wziąwszy potém $AD = ab$, z punktu D wyprowadzam DC prostopadłą do AB aż do przecięcia się z okręgiem w punkcie C; nakoniec prowadzę cięciwę AC; cięciwa ta będzie bokiem kwadratu szukanego: gdyż poprowadziwszy cięciwę CB, kąt ACB iest prosty (127), a zatém kwadrat z ramienia kąta prostego AC, równy iest prostokątowi z linii AB i AD (161), ten zaś prostokąt maiąc podstawę 5 razy większą od wysokości $AE = AD$ z wykréślenia, może być podzielonym na 5 kwadratów maiących za boki liniią AD; czyli prostokąt ten może być podzielony na 5 kwadratów takich, iak iest kwadrat da-

ny *ac*: a zatém prostokąt ten iest od kwadratu danego *ac* 5 razy większy; a tém samém i kwadrat z linii AC będzie od danego kwadratu 5 razy większy.

168. Zagad. *Wykréślić kwadrat równy różnicy dwóch kwadratów danych ABKI, CBGE fig.* 88.

Rozwiąz. Kréślę kąt prosty ACB, daiąc mu za iedno ramie bok CB kwadratu mniéyszego; z punktu B iako ze środka promieniem równym bokowi kwadratu większego, kréślę łuk przecinaiący drugie ramie kąta prostego w punkcie A: liniia AC będzie bokiem kwadratu szukanego: gdyż poprowadziwszy liniią AB, w tróykącie ACB prostokątnym przy C iest $AB^2 = AC^2 + BC^2$. Odiąwszy po obu stronach BC^2, zostanie $AB^2 - BC^2 = AC^2$. To iest, różnica między kwadratem z boku AB, którym iest kwadrat dany ABKI, i między kwadratem z boku BC, którym iest drugi kwadrat dany CBGE iest kwadrat z linii AC.

Sposób 2. Prowadzę liniią AB fig. 90. równą bokowi kwadratu większego z dwóch danych, i na niéy iako średnicy wykréśliwszy półkole, z punktu B prowadzę cięciwę CB równą bokowi kwadratu mnieyszego, z punktu A poprowadziwszy cięciwę AC, ta będzie bokiem kwadratu szukanego: gdyż kąt ACB iest prosty (127), a zatém $AB^2 = AC^2 + BC^2$; więc $AB^2 - BC^2 = AC^2$.

169. Zagad. *Prostokąt AF fig.* 90. *zamienić na kwadrat równy mu co do powierzchni.*

Rozwiąz. Na większym boku danego prostokąta iako na średnicy, kréślę półkole; wziąwszy potém AD=AE, i z punktu D wyprowadziwszy

DC prostopadłą do AB, aż do przecięcia się z okręgiem w punkcie C prowadzę cięciwę CA: ta będzie bokiem kwadratu szukanego: gdyż poprowadziwszy cięciwę CB, w tróykącie ACB prostokątnym przy C, kwadrat z ramienia kąta prostego AC równy iest prostokątowi z przeciwprostokątnéy AB, i z odcinka AD przyległego temu ramieniowi (161), to iest, $AC^2 = AB \times AD$; czyli, $AC^2 = AB \times AE$; gdyż AD=AE z wykréślenia: to iest, kwadrat z linii AC równy iest prostokątowi danemu.

170. *Wniosek.* Ponieważ wielokąt iakikolwiek można zamienić na tróykąt (141), tróykąt zaś na prostokąt (155), a prostokąt na kwadrat równy mu co do powierzchni; więc każdy wielokąt zamienić można na kwadrat równy mu co do powiérzchni.

171. *Twierd.* W tróykącie ACB fig. 72, Nro I. z końca C, boku CB przeciwnego kątowi ostremu A, spuściwszy CD prostopadłą do AB ramienia tegoż kąta A, będzie *kwadrat z przeciwostrokątnéy CB równy summie kwadratów z dwóch ramion kąta ostrego AC i AB, mniéy dwoma prostokątami z ramienia AB na które spuszczona iest prostopadła, i z odcinka AD przyległego temuż kątowi ostremu A; to iest, będzie* $BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2AB \times AD$.

Dowod. W tróykącie CDB prostokątnym przy D, iest $BC^2 = CD^2 + DB^2$ (161). W tróykącie ACD, $CD^2 = AC^2 - AD^2$ (168). Liniia DB=AB—AD: a zatém $DB^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB \times AD$ (159). W równaniu więc piérwszém z drugiéy strony zamiast $CD^2 + DB^2$ położywszy znalezione ich ważności, równanie to zamieni się w następuiące:

$BC^2 = AC^2 = AD^2 + AB^2 + AD^2 - 2AB \times AD$: czyli $BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2AB \times AD$.

Albo tak, Liniia $DB = AB - AD$: więc $DB^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB \times AD$ (159). W tém równaniu dodawszy po obu stronach CD^2, będzie $DB^2 + CD^2 = AB^2 + AD^2 + CD^2 - 2AB \times AD$...A.

W tróykącie CDB iest $DB^2 + CD^2 = BC^2$ (161). W równaniu A z jednéy strony zamiast $DB^2 + CD^2$ położywszy CB^2, z drugiéy strony zamiast $AD^2 + CD^2$ położywszy AC^2; równanie to zamieni się w następuiące: $BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2AB \times AD$.

172. *Twierd.* W tróykącie ACB fig. 72. Nro 2 z końca C boku BC przeciwnego kątowi roztwartemu A, spuściwszy CD prostopadłą do AB ramienia tegoż kąta, będzie *kwadrat z przeciwroztwartokątnéy BC równy summie kwadratów z ramion AC, AB, powiększonéy dwoma prostokątami z AB i AD;* to iest, będzie $BC^2 = AC^2 + AB^2 + 2AB \times AD$.

Dowod. W tróykącie CDB prostokątnym przy D, iest $CB^2 = CD^2 + BD^2$ (161). W tróykącie CDA, $CD^2 = AC^2 - AD^2$ (168). Liniia $BD = AB + AD$: więc $BD^2 = AB^2 + AD^2 + 2AB \times AD$ (158). W równaniu więc piérwszém zamiast $CD^2 + BD^2$ położywszy znalezione ich ważności, równanie to zamieni się w następuiące.

$CB^2 = AC^2 - AD^2 + AB^2 + AD^2 + 2AB \times AD$: czyli $CB^2 = AC^2 + AB^2 + 2AB \times AD$. Sposób 2gi iak w twierdzeniu poprzedzaiącém.

173. *Wniosek.* Z trzech ostatnich twierdzeń wypada, że maiąc w liczbach wyrażone trzy boki tróykąta, można doyść czy kąt przeciwny któremukolwiek z boków iest prosty, czy ostry, czy roztwarty. Jeżeli kwadrat z jednego boku iest

równy summie kwadratów z dwóch innych boków, kąt przeciwny pierwszemu bokowi iest prosty: ieżeli zaś kwadrat z iednego boku iest mnieyszy lub większy od summy kwadratów z dwóch innych boków, kąt przeciwny bokowi piérwszemu będzie w piérwszym przypadku ostry, w drugim roztwarty.

174. Twierd. *W tróykącie ABC fig.* 91. *podzieliwszy podstawę AB na dwie równe części w punkcie E, i poprowadziwszy liniią CE, będzie* $AC^2 + BC^2 = 2AE^2 + 2CE^2$.

Dowod. Z wiérzchołka kąta C. spuściwszy CD prostopadłą do AB, w tróykącie CDE prostokątnym przy D, kąt CED iest ostry (86), a zatém w tróykącie ACE iest $AC^2 = AE^2 + CE^2 - 2AE \times ED$ (171).

W tróykącie CBE; którego kąt CEB iest roztwarty (15), iest $BC^2 = CE^2 + BE^2 + 2BE \times ED$ (172), czyli $BC^2 = CE^2 + AE^2 + 2AE \times ED$: gdyż BE=AE.

Dodawszy strony równania piérwszego i ostatniego, będzie $AC^2 + BC^2 = 2AE^2 + 2CE^2$.

175. *Wniosek.* A zatém w każdym równoległoboku ABCD fig. 41. summa kwadratów ze cztérech boków, równa iest summie kwadratów z dwóch przekątnych AC, BD: gdyż przekątne te w punkcie F dzielą się na dwie części równe: tróykąty bowiem DFC, AFB, w których bok DC = AB (78), kąt DCF=BAF, i kąt CDF=ABF, iako naprzemianległe wewnętrzne, przystaną do siebie (26), a w szczególności DF=BF, i AF=CF. Więc w tróykącie ABC, podług twierdzenia poprzedzaiącego, iest $AB^2 + BC^2 = 2AF^2 + 2BF^2$. Podobnież w tróykącie ADC, iest $DC^2 +$

$AD^2 = 2AF^2 + 2DF^2$, czyli $DC^2 + AD^2 = 2AF^2 + 2BF^2$; gdyż DF=BF z dowodzenia.

Dodawszy strony równania piérwszego i ostatniego, będzie.

$AB^2 + BC^2 + DC^2 + AD^2 = 4AF^2 + 4AF^2$....A.

Lecz AC = 2AF; więc $AC^2 = 4AF^2$; BD = 2BF; więc $BD^2 = 4BF^2$: W równaniu A zamiast $4AF^2 + 4BF^2$, położywszy $AC^2 + BD^2$, będzie $AB^2 + BC^2 + DC^2 + AD^2 = AC^2 + BD^2$, to iest, summa kwadratów ze cztérech boków równoległoboku, równa iest summie kwadratów z dwóch iego przekątnych.

ROZDZIAŁ VII.

O podobieństwie wielokątów, a naprzód tróykątów, i o proporcyonalności ich boków.

176. *Twierd.* W tróykącie iakimkolwiek ACB fig. 92. poprowadziwszy liniią DE równoodlegle od podstawy AB; *liniia ta podzieli boki AC, BC na części proporcyonalne: to iest będzie* CD: AD=CE: BE.

Dowod. Poprowadziwszy liniie proste AE, BD, dwa tróykąty ADE, BDE, stoiące na iednéy podstawie DE, i maiące wiérzchołki swoie A i B na linii AB równoległéy od téy podstawy, maią iednakową podstawę i wysokość: a tém samém są sobie równe co do powierzchni (139).

Dwa tróykąty CDE, DAE, maiące podstawy na linii CA, a spólny wierzchołek w punkcie E, maią równą wysokość, a zatém są do siebie iak podstawy (150): to iest,

CDE: DAE=CD: AD: — : — : = A.

Podobnież tróykąty CDE i BDE maiące podstawy na linii BC, a spólny wiérzchołek w punkcie D, maią równą wysokość, a zatém są do siebie iak podstawy, to iest, CDE: BDE = CE: EB, czyli CDE: DAE = CE: EB; .... B. gdyż tróykąt BDE = DAE co do powierzchni, iakośmy dowiedli wyżéy. Porównawszy z sobą dwie proporcye A i B, postrzeżemy że dwa piérwsze wyrazy CDE, DEA, w obudwu proporcyach są te same: więc tak się ma piérwszy poprzednik do swego następnika w piérwszéy proporcyi, iak piérwszy poprzednik do swego następnika w drugiéy: a zatém będzie też i drugi poprzednik do swego następnika w piérwszéy, iak drugi poprzednik do swego następnika w drugiéy proporcyi: to iest, będzie CD: AD=CE: BE.

177. *Wniosek.* 1. Ponieważ iest CD: AD =CE: BE; więc też będzie

1*ód.* CD + AD: CD: = CE + BE: CE; czyli AC: CD=BC: CE;

2*re* CD + AD: AD = CE + BE: BE; czyli, AC: AD=BC: BE.

178. *Wniosek.* 2. Kiedy dwie liniie proste AB, CD, fig. 93. iakiekolwiek położenie względem siebie maiące, przecięte są od iakiéykolwiek liczby liniy między sobą równoległych AC, EF, GH i t. d. części dwóch piérwszych liniy zawarte między równoległemi są sobie proporcyonalne, to iest, będzie AE: CF=EG: FH=BG: DH.

Jakoż przedłużywszy liniie AB, CD aż do przecięcia się w punkcie S. w tróykącie SEF, którego boki SE, SF przecina liniia AC równolegle od podstawy EF, iest SE: AE=SF: CF (177); czyli SE: SF=AE: CF: — : — : A.

Podobnież w tróykącie SGH, którego boki SG, SH przecina liniia EF równolegle od podstawy GH, iest SE: SF=EG: FH: —:— B.

Porównawszy z sobą proporcye A i B, będzie AE: CF=EG: FH.

Podobnymże sposobem dowieśdź można że EG: FH=BG: DH.

179. *Twierd.* Gdy w tróykącie ABC fig. 94. liniia DE dzieli dwa którekolwiek boki *np.* AC, BC na części proporcyonalne; *liniia ta DE będzie od trzeciego boku AB równoodległa.*

Dowod. Jakoż gdyby liniia DE nie była równoległa od AB, natenczas z punktu D możnaby było wyprowadzić inną iaką liniią *np.* DF od boku AB równoległą. A zatem w tróykącie ACB, którego dwa boki AC, BC przecina liniia DF równoległa od boku trzeciego AB, byłaby następuiąca proporcya: AC: CD=BC: CF; a że podług założenia AC: CD=BC: CE; więc gdy 3 wyrazy piérwszéy proporcyi równe są trzem odpowiadaiącym wyrazom drugiéy proporcyi, czwarty wyraz w piérwszéy powinien być równy czwartemu wyrazowi drugiéy proporcyi; czyli powinno być CF=CE. To iest, liniia z punktu D wyprowadzona równoodległe od boku AB powinna bok CB przecinać w takiéy odległości od wiérzchołka C, w iakiéy odległości przecina go liniia z tegoż punktu D wyprowadzona, i dzieląca dwa boki AC, BC proporcyonalnie: czyli, co na iedno wychodzi, punkta F i E powinny się znaydować na boku BC w iednéyże odległości od punktu C; a zatém dwa te punkta F i E powinny być iednymże punktem; a tém samém liniie DE, DF, z których 1sza dzieli boki AC, BC proporcyonalnie, 2ga iest równoległa od boku AB, składaią iednę liniią, bo przez

dwa punkta iedna tylko liniia prosta przechodzić może.

180. *Twierd.* W tróykącie iakimkolwiek ABC fig. 95. podzieliwszy ieden z kątów *np.* kąt C na dwie równe części liniią CD; *liniia ta podzieli bok AB na dwa odcinki AD i DB proporcyonalne bokom przyległym; to iest, będzie AC: BC=AD: BD.*

Dowod. Wyprowadziwszy z punktu A liniią AF równoodległą od CD, aż do przecięcia się w punkcie F z przedłużonym bokiem BC; w tróykącie ABF, w którym liniia CD iest równoległa od AF: iest CF: BC=AD: BD (176).

Nadto kąt CAF = ACD iako wewnętrzne naprzemianległe względem siecznéy AC i równoległych AF, CD; kąt ACD=DCB podług założenia; kąt DCB = AFC iako iednostronnè odpowiadaiące względem siecznéy FB i równoległych AF, DC; a zatém kąt CAF=AFC. Więc tróykąt ACF iest równoramienny (32); i bok CF= AC. W powyższéy więc proporcyi położywszy AC zamiast FC, będzie AC: BC=AD: BD.

181. Zagadnienie. 1. *Przez punkt D wzięty od upodobania między ramionami kąta C, fig. 96. poprowadzić liniią AB tak, aby części iéy AD, BD, będące między ramionami kąta C i punktem D, były równe.*

Rozwiąz. Przez punkt D poprowadziwszy DF, równoodległą od BC, wziąć FA = CF: i przez punkta A, D poprowadzić liniią prostą ADB: liniia ta iest szukana: gdyż w tróykącie ABC iest AF: CF=AD: DB (176), a że AF=CF z wykréślenia, więc i AD=DB.

182. Zagad. *Maiąc dane 3 liniié AC, BC, DC fig. 97. znaleźć czwartą proporcyonalną.*

Rozw. Wykréśliwszy kąt iakikolwiek C, na iedném iego ramieniu biorę CA równą 1széy linii danéy, i CB równą 2giéy linii danéy, a na drugiém ramieniu biorę CD równą 3ciéy linii danéy: złączywszy potém punkta A i D liniią prostą AD, i z punktu B poprowadziwszy BE równoodległą od AD, aż do przecięcia się z bokiem CD w punkcie E, liniia CE iest szukana: gdyż w tróykącie ACD iest AC: BC=DC: CE (177).

183. *Uwaga.* Gdyby druga liniia dana CB była dłuższa od piérwszéy AB, znalezlibyśmy 4tą proporcyonalną tymże samym sposobem, z tą tylko odmianą że liniia CB równa 2giéy linii danéy wypadłaby na przedłużeniu boku AC; a liniia CE na przedłużeniu boku CD.

Gdyby 2ga i 3cia liniia dana, były sobie równe, na ten czas liniia szukana byłaby 3cią ciągłą ieometrycznie proporcyonalną. Wykréślenie iest to samo; kréśli się naprzód iakikolwiek kąt C, potém wziąwszy CA równe piérwszéy linii danéy, a CB i *Cb* równe między sobą i równe drugiéy linii danéy, punkta A i *b* łączą się liniią prostą *Ab*: a z punktu B prowadzi się Be równoległa od *Ab*: liniia Ce iest szukana, gdyż w tróykącie AC*b* iest AC: CB=*Cb*: Ce, czyli AC: CB=CB: Ce, albowiem C*b*=CB.

184. Wiedząc sposób, którym się znayduie 4ta liniia ieometrycznie proporcyonalna, możua dwa zagadnienia wyżéy podane (156, 157) rozwiązać innym sposobem.

Zagad. *Dany prostokąt AC lub równoległobok iakikolwiek fig. 84. zamienić na prostokąt lub równoległobok inny równy danemu co do powierzchni, któryby miał za podstawę liniią daną BG.*

Rozw. Do danéy linii BG, do podstawy AB i wysokości BC danego prostokąta, szukam 4téy ieometrycznie proporcyonalnéy BE, ta będzie wysokością szukanego prostokąta: gdyż podług wykréślenia iest BG: AB=BC: BE; więc BG×BE =AB×BC; to iest: powiérzchnia prostokąta znalezionego, równa powiérzchni prostokąta danego.

185. Zagad. *Maiąc dane dwa prostokąty lub równoległoboki, których podstawy i wysokości są różne, wykreślić trzeci któregoby powiérzchnia równa była summie lub różnicy powiérzchni dwóch równoległoboków danych.*

Rozw. Nazwawszy powierzchnią iednego równoległoboku R, iego podstawę P, wysokość W; powiérzchnią drugiego *r*, podstawę *p*, wysokość *w*, będzie R=P×W, *r*=*p*×*w*, A zatém R+*r*=P×W+*p*×*w*; R−*r*=P×W−*p*×*w*: —: —: —: —: —: —: — A.

Do obudwu podstaw P i *p*, tudzież do wysokości *w*, znaydźmy 4tą ieometrycznie proporcyonalną (182), którą nazwiymy M; będzie P: *p*=*w*: M: więc P×M=*p*×*w*:

W równaniach A, zamiast *p*×*w*, położywszy P×M, równania te zamienią się w następuiące: R+*r*=P×W+P×M=P(W+M); R−*r* =P×W−P×M=P(W−M): to iest, summa lub różnica powiérzchni dwóch równoległoboków danych równa iest 3mu maiącemu podstawę równą podstawie iednego z dwóch danych a wysokość równą summie lub różnicy wysokości tegoż równoległoboku danego, i 4téy ieometrycznie proporcyonalnéy do obudwu podstaw i wysokości 2go równoległoboku danego:

186. Zagad. *Maiąc dane dwa prostokąty AC i EG fig.* 80. *wyrazić ich stosunek w liniiach:* to iest, znaleźć dwie liniie proste: któreby się tak miały do siebie, iak się maią dwa dane prostokąty.

Rozw. Do wysokości BC iednego, do podstawy EF i wysokości FG drugiego prostokąta danego, szukam czwartéy ieometrycznie proporcyonalnéy, którą nazwiymy M. Prostokąt AC tak się będzie miał do prostokąta EG, iak podstawa AB do linii znalezionéy M: gdyż ABCD: EFGH = AB×BC: EF×FG (144); że zaś podług wykréślenia BC: EF = FG: M; więc BC × M = EF×FG. W pierwszéy proporcyi zamiast EF×FG położywszy BC × M; proporcya ta zamieni się w następuiącą: ABCD: EFGH = AB×BC: BC×M. Podzieliwszy dwa drugie wyrazy przez BC, będzie ABCD: EFGH = AB: M.

187. Tym samym sposobem postępuiąc można znaleźć dwie liniie któreby się tak miały do siebie, iak dwa dane kwadraty. Możnaby też zagadnienie to rozwiązać sposobem następuiącym:

Niech będą AC, AF, fig. 98. boki danych kwadratów, których stosunek wyrazić mamy w liniiach. Prowadzę liniią AB, iakieykolwiek długości, byleby większą od AF boku kwadratu większego z dwóch danych: na linii AB iako na średnicy wykréśliwszy półkole, z końca A średnicy AB prowadzę dwie cięciwy AC, AF piérwszą równą bokowi danemu AC, drugą równą bokowi danemu AF; z punktu C i F spuszczam CD, FG prostopadłe do AB: odcinki AD, AG. są liniiami szukanemi; to iest, dwa dane kwadraty będą się miały do siebie iak liniie AD, AG. Jakoż poprowadziwszy cięciwy CB, FB, kąty ACB,

AFB są proste (127). A że $AC^2 = AB \times AD$, $AF^2 = AB \times AG$ (161); więc $AC^2 : AF^2 = AB \times AD : AB \times AG$; czyli $AC^2 : AF^2 = AD : AG$:

Albo tak. Kréślę kąt prosty daiąc mu ramiona równe bokom dwóch kwadratów danych: poprowadziwszy potém przeciwprostokątną, i z wiérzchołka kąta prostego spuściwszy do niéy prostopadłą, przeciwprostokątna podzielona będzie na dwa odcinki, które są liniiami szukanemi (163).

188. Jeżeli dwa tróykąty ABC, *abc.* fig. 99. są *równokątne*, to iest takie, że kąt $A = a$, $B = b$, $C = c$; i ieżeli boki ich *odpowiadaiące*, czyli przyległe kątom równym są między sobą proporcyonalne; to iest, gdy iest AB: *ab* = BC: *bc* = AC: *ac*; takie dwa tróykąty nazywać będziemy *podobnymi. Triangula similia.*

W ogólności wszystkie wielokąty równokątne, i których boki odpowiadaiące, to iest, przyległe kątom równym, są między sobą proporcyonalne, zwać będziemy *podobnemi.* I tak *np.* pięciokąty ABGDE, *abcde* fig. 107. są podobne, ieżeli kąt $A = a$, $B = b$, $C = c$, $D = d$, $E = e$; i ieżeli iest AB: *ab* = BC: *bc* = CD: *cd* = DE: *de* = AE: *ae.*

189. Twierd. *Jeżeli dwa tróykąty ABC*, abc *fig.* 99. *są równokątne, będą też boki odpowiadaiące proporcyonalne, a tém samém tróykąty te będą podobne.*

Dowod. Na boku AC wziąwszy CD = *ac*, na boku CB wziąwszy CE = *cb* i poprowadziwszy DE; w dwóch tróykątach CDE, *cab*, bok CD = *ac*, bok CE = *cb* z wykréślenia, i kąty między temi bokami zawarte C i *c* równe z założenia; więc dwa te tróykąty przystaną do siebie; (24) a w szczególności bok DE = *ab*, i kąt CDE = *cab*;

że zaś kąt *cab*=CAB podług założenia, więc i kąt CDE=CAB, a tém samém liniia DE iest równoległa od AB (66). Będzie więc AC: DC= BC: CE (177), czyli AC: *ac*=BC: *bc*, gdyż *ac*= DC, *bc*=CE.

W tróykącie ABC z punktu E poprowadziwszy EF równoległą od AC, będzie BC: CE= AB: AF czyli BC: *bc*=AB: *ab*: gdyż *bc*=CE, AF=DE=*ab*.

Tę ostatnią proporcyą złączywszy z powyższą AC: *ac*=BC: *bc*; będzie AC: *ac*=BC: *bc*=AB: *ab*.

190. *Wnioski* 1. Stąd wypada, że dwa tróykąty są równokątne, a tém samém podobne, gdy dwa kąty iednego równe są dwóm kątom drugiego tróykąta: gdyż i trzeci kąt piérwszego musi być równy 3mu kątowi drugiego tróykąta (83).

191. *Wnios.* 2. Dwa tróykąty są także równokątne a tém samém podobne, gdy boki iednego są równoodległe względem boków drugiego tróykąta: bo ieżeli boki CA, CB fig. 99. są równoodległe względem boków *ca*, *cb*, a boki CB, AB są równoodległe względem boków *cb*, *ab*; będzie kąt C=*c*, kąt B=*b* (69), a zatém dwa te tróykąty są podobne podług poprzedzaiącego wniosku.

Jeżeli zaś w dwóch tróykątach ABC, *abc*, fig. 100. boki AB i *ab*, AC i *ac*, względem siebie równoodległe, rozchodzą się w strony przeciwne, przedłużywszy bok CB aż do przecięcia się z bokami *ab*, *ac* w punktach *d*, *f*, w dwóch tróykątach ABC *adf*, kąt CBA=*fda* iako naprzemian ległe zewnętrzne względem siecznéy C*f*, i dwóch równoodległych AB, *ab*; kąt ACB=*afd*, iako naprzemianległe wewnętrzne względem siecznéy C*f*, i dwóch równoodległych AC, *ac*; więc dwa te tróykąty ABC, *adf*, są równokątne (190). A że tróykąty *adf*, *abc* są równokątne, gdyż maią kąt *a* spólny, kąt *adf*=*abc* iako iednostronne odpowiadaiące względem siecznéy *ab* i dwóch równoległych C*f*, *bc*, więc i tróykąty ABC; *abc* są równokątne.

192. *Wniosek.* 3. Nakoniec dwa tróykąty są także równokątne a tém samém podobne, gdy boki iednego są prostopadłe względem boków drugiego tróykąta. Jakoż gdy w dwóch tróykątach CAB, *cab* fig. 101. boki AB i *ab*, AC i *ac*, BC i *bc* są względem siebie prostopadłe; z wiérzchołka kąta C wyprowadziwszy iednę liniią CD prostopadłą do CB a tém samém równoległą od *cb* (58); drugą CF prostopadłą do AC a tém samém równoodległą od *ac*, będzie kąt DCB=ACF iako proste z wykréślenia. Dodawszy po obu stronach kąt BCF, będzie DCB + BCF = ACF + BCF: czyli DCF = ACB. A że kąt DCF = *cba*, iako zawarte między ramionami względem siebie równoodległemi z wykréślenia, i rozchodzącemi się w jednęż stronę, więc i kąt ACB=*bca*.

Podobnież z punktu A wyprowadziwszy iednę liniią AG prostopadłą do AB, a tém samém równoodległą od *ab*, drugą AH prostopadłą do AC, a tém samém równoodległą od *ac*, będzie kąt CAH=BAG iako proste z wykréślenia. Odiąwszy po obu stronach kąt CAG, zostanie CAH—CAG= BAG—CAG; czyli GAH=BAC. A że kąt GAH =*bac*, iako zawarte między ramionami względem siebie równoodległemi z wykréślenia, i rozchodzącemi się w iednęż stronę; więc i kąt BAC =*bac*. Dwa więc tróykąty BAC, *bac* są podług wniosku 1. równokątne, a tém samém podobne.

Gdyby tróykąt *abc* znaydował się wewnątrz tróykąta ABC, iak iest fig. pod liczbą 2. dowodzenie byłoby ieszcze łatwieysze: gdyż w czworokącie *Adaf* summa wszystkich kątów waży 4 kąty proste (94); a że dwa kąty przy *d* i *f* ważą dwa kąty proste z założenia, więc kąt *daf* z kątem A, waży dwa kąty proste. Tenże sam kąt *daf* z kątem przyległym *cab*, waży także dwa kąty proste: więc kąt A=*cab*. Tym sposobem okazać można, że kąt B=*cba*; a zatém dwa tróykąty ACB, *acb* są równokątne, a tém samém podobne: będzie więc AB: *ab*=BC: *bc*:=AC: *ac*.

193. *Uwaga.* Uważać tu należy 1ód, że kiedy dwa tróykąty ABC, *abc* fig. 99. są równokątne, boki ich też są odpowiadaiące a tém samém proporcyonalne, które są przeciwne kątom równym: i tak *np.* boki BC i *bc* przeciwne kątom równym A i *a*, są bokami odpowiadaiącemi: 2re, że kiedy dwa tróykąty ABC, *abc* fig. 100. maią boki względem siebie równoodległe, te boki są odpowiadaiące, a tém samém proporcyonalne, które są od siebie równoodległe; 3cie; że kiedy dwa tróykąty ABC, *abc*, fig. 101. maią boki względem siebie prostopadłe; te boki są proporcyonalne, które są względem siebie prostopadłe.

194. Twierd. *Jeżeli we dwóch tróykątach trzy boki w iednym, są proporcyonalne odpowiadaiącym trzem bokom w drugim troykącie, takie dwa tróykąty są równokątne a tém samém podobne.*

Dowod. Niech będą dwa tróykąty ACB, *acb* fig. 102. których boki są między sobą proporcyonalne: na okazanie że tróykąty te są równokątne a tém samém podobne, na boku AC wziąwszy CD=*ac*, i poprowadziwszy DE równoodległą od AB; dwa tróykąty ACB, DCE są podobne 189, będzie więc AC: CD=CB: CE=AB: DE. Lecz z założenia iest AC: *ac*=CB: *cb*=AB: *ab*. W tych dwóch ciągach stusunek piérwszy ciągu 1go równy iest stosunkowi pierwszemu ciągu 2go: gdyż CD=*ac* z wykréślenia; a zatém wszystkie stosunki obudwu ciągów muszą być między sobą równe. A że poprzedniki ciągu 1go równe są poprzednikom ciągu 2go, więc i następniki w ciągu 1szym muszą być równe następnikom w ciągu 2gim: to iest CE=*cb*, DE=*ab*. Dwa więc tróykąty CDE, *acb* przystaną do siebie (28), a tém samém są równokątne: a że tróykąty CDE, ACB są równokątne, więc i tróykąty *acb* i ACB są równokątne, a tém samém podobne (189).

195. Twierd. *Dwa tróykąty są podobne, gdy dwa boki iednego są proporcyonalne odpowiadaiącym dwom bokom drugiego tróykąta, i gdy kąty między temi bokami zawarte, są sobie równe.*

Dowod. Niech będą dwa tróykąty ACB, *acb* fig. 102. w których kąt C=*c*, i AC: *ac*=BC: *bc*. Na boku AC wziąwszy CD=*ac*, na boku CB wziąwszy CE=*bc*, i poprowadziwszy DE, dwa tróykąty CDE, *cab* przystaną do siebie (24), a tém samém są równokątne. Ponieważ zaś podług założenia iest AC: *ac*=BC: *bc*; będzie więc AC: CD=BC: CE; gdyż CD=*ac*, CE=*bc*.

Więc liniia DE iest równoległa od AB (179), a tém samém tróykąty ABC, DEC są równokątne: że zaś tróykąt DCE iest równokątny z tróykątém *acb*, więc tróykąty ACB, *acb* są równokątne, a tém samém podobne (189).

196. Zagad. *Na daney linii AB. fig.* 102. *wystawić tróykąt podobny danemu* acb.

Rozw. Sposób 1. Przy punktach A i B, kréślę kąt A=*a* i kąt B=*b*, ramiona tych kątów przedłużam aż do przecięcia się w punkcie C: tróykąt ACB iest szukany (190).

Sposób 2. Przedłużam bok *ab* do *d*, tak aby była liniia *ad*=AB; przez punkt *d* prowadzę równoodległą od *bc* aż do przecięcia się z przedłużonym bokiem *ac* w punkcie *f*. tróykąt *adf* iest szukany (195).

Sposob 3. Do *ab*, AB i *ac* szukam linii 4téy ieometrycznie proporcyonalnéy(282). Przy punkcie A na daney linii AB, kréślę kąt A=*a*, daiąc mu za drugie ramie znalezioną 4tą ieometrycznie proporcyonalną: końce tych dwoch ramion łączę liniią prostą i będzie tróykąt podobny danemu (195).

Sposób 4ty. Szukam 4téy ieometrycznie proporcyonalnéy; 1od. do *ab*, AB i *ac*; 2re, do *ab*, AB i *bc*, i na linii AB kréślę tróykąt ABC daiąc mu za boki AB i BC dwie 4te proporcyonalne znalezione, będzie tróykąt ABC podobny danemu (194).

197. *Twierd.* Z punktu A, fig. 103. poprowadziwszy iakąkolwiek liczbę liniy AB, AC, AD i t. d. któreby się przecinały z dwiema od siebie równoodległemi GL i BF; *liniie te AB, AC it.d. podzielone będą w punktach przecięcia się z równoodległemi na części proporcyonalne, i liniie równoodległe będą także podzielone na części proporcyonalne.*

Dowod. Dwa tróykąty ACB, AHG, maiące kąt przy A spólny i kąt ABC=AGH (66), są podobne (190). Dla téyże przyczyny dwa tróykąty ACD, AIH są także podobne. Toż mówić o tróykątach AED, AKI, tudzież o tróykątach AFE, ALK. Boki zatém tych tróykątów są między sobą proporcyonalne: będzie więc:

AB: AG=AC: AH=BC: GH.
AC: AH=AD: AI=CD: HI.
AD: AI=AE: AK=DE: IK.
AE: AK=AF: AL=EF: KL.

Wszystkie te stosunki są równe: gdyż w każdym ciągu stosunek drugi iest ten sam, co w następuiącym ciągu stosunek pierwszy. Wziąwszy naprzód te tylko stosunki, których wyrazami są liniie z punktu A poprowadzone, będzie.

AB: AG=AC: AH=AD: AI=AE: AK=AF: AL; więc:

AB—AG: AG=AC—AH: AH=AD—AI: AI i t. d. czyli

BG: AG=CH: AH=DI: AI=EK: AK=FL: AL; to iest, liniie AB, AC, AD i t. d. podzielone są na części proporcyonalne.

Wziąwszy potém w 4 powyższych ciągach te tylko stosunki, których wyrazami są części dwóch liniy równoodległych GL, BF, będzie.

BC: GH=CD: HI=DE: IK=EF: KL; to iest, liniie równoległe GL, BF podzielone są na części proporcyonalne.

198. Zagad. *Daną liniią MN podzielić na części proporcyonalne częściom linii BF.*

Rozw. Na linii BF kréślę tróykąt równoboczny BAF; wziąwszy potém AG=MN, i AL=MN, i poprowadziwszy liniią GL, punkt A z punktami podziałów linii BF łączę liniiami prostemi AC, AD, AE, które liniią GL przecinaią w punktach H, I, K na części proporcyonalne

częściom linii BF: gdyż AB=AF, i AG=AL z wykréślenia: będzie więc AB: AG=AF: AL. Więc liniia GL iest równoodległa od BF (179), a tém samém dwa tróykąty AGL, ABF są podobne: będzie więc AB: AG=BF: GL, W téy proporcyi poprzednik drugi BF, równy iest poprzednikowi piérwszemu AB z wykréślenia; więc i następnik drugi, równy być musi następnikowi piérwszemu; to iest, GL=AG=MN. A zatém podług twierdzenia poprzedzaiącego części linii GL czyli MN, są proporcyonalne częściom linii BF.

Gdyby dana liniia do dzielenia była większa od linii BF, iak iest *np.* liniia *mn*, na ten czas wykréśliwszy na linii BF tróykąt równoboczny ABF, i boki AB, AF przedłużywszy do *g* i *l*, tak aby *Ag=mn*, *Al=mn*, poprowadźmy liniią *gl* przecinaiącą się w punktach *h*, *i*, *k* z przedłużonemi liniiami AC, AD, AE. Tym sposobem liniia *gl* czyli *mn* podzielona będzie na części proporcyonalne częściom linii BF.

Sposób 2. Niech będzie liniia AF fig. 104. do podzielenia na 5 części proporcyonalnych częściom linii danéy: z punktu A wyprowadziwszy liniią AL nieograniczonéy długości, pod iakimkolwiek nachyleniem do linii AF, i części drugiéy linii danéy, przeniosłszy na liniią AL, 1wszą część od A do G, 2gą od G do H, 3cią od H do I, 4tą od I do K, 5tą od K do L, punkt L i F złączyć liniią prostą LF, i przez punkta podziałów linii AL poprowadzić linie KE, ID i t. d. równoodległe od LF, aż do przecięcia się z liniią AF w punktach E, D, C, B; liniia AF w tych punktach podzielona będzie na części szukane: gdyż w 4 tróykątach ACH, ADI, AFL, których dwa boki

przecięte są przez liniie BG, CH i t. d. równoodległe od boku 3go iest (177).

AB: AG=AC: AH=BC: GH.
AC: AH=AD: AI=CD: HI.
AD: AI=AE: AK=DE: IK.
AE: AK=AF: AL=EF: KL.

Wszystkie te stosunki są równe: gdyż drugi stosunek w iednym ciągu, iest tenże sam co stosunek piérwszy w ciągu następuiącym. Biorąc te tylko stosunki, których wyrazami są znalezione części linii AF i dane części linii AL, będzie.

AB: AG=BC: GH=CD: HI=DE: IK =EF: KL; to iest, części AB, BC, i t. d. linii AF, są proporcyonalne częściom AG, GH i t. d. linii AL.

Uwaga: Aby się ustrzedz uchybienia w prowadzeniu liniy KE, ID i t.d. równoodległych od LF, można z końca F linii AF poprowadzić liniią FM tak, aby kąt AFM=LAF; wziąwszy potém na linii FM część FQ=LK, QP=KI. PO=IH, ON=HG, NM=GA; punkta A i M, G i N, H i O i t. d. połączyć liniiami prostemi AM, GN, HO i t. d. które liniią daną podzielą w punktach B, C i t. d. na części szukane.

199. *Wniosek*. Gdyby części linii GL fig. 103. były między sobą równe, części linii BF byłyby także między sobą równe. A stąd wypada sposób łatwy podzielenia linii danéy na iąkąkolwiek liczbę części równych.

Sposób 1. Poprowadziwszy liniią BF fig. 103. nieograniczonéy długości, i oznaczywszy na niéy tyle części równych iakiéykolwiek długości na ile ma być podzielona liniia dana GL, lub *gl*; wykréślić na linii BF tróykąt równoboczny BAF,

i wziąwszy na bokach AB, AF, lub na ich przedłużeniu liniie AG, AL, lub Ag, A*l* równe linii danéy do podzielenia, przez punkt A i przez punkta podziału linii BF, poprowadzić liniie proste, które przetną liniią daną GL, lub *gl*, na części szukane.

Sposób 2. Z punktu A linii AF fig. 104. danéy do podzielenia na części równe, poprowadziwszy liniią AL, nieograniczonéy długości, pod iakimkolwiek do linii AF nachyleniem; i zaczynaiąc od punktu A, oznaczywszy na linii AL tyle części równych iakiéykolwiek długości, na ile ma być liniia AF podzielona; poprowadzić liniie BG, CH i t. d. równoodległe od linii LF: liniia AF będzie w punktach B, C i t. d. podzielona na części szukane.

Sposób 3. Są także inne sposoby podzielenia linii prostéy na części równe. Niechby *np.* trzeba było podzielić na 20 równych części liniią *mn.* fig. 103. która do takowego dzielenia iest dla swéy małości niewygodna, lecz którą wygodnie podzielić można na części równych 4 i 5. Daymy, że *ma* iest 4tą, a *mb* iest 5tą częścią linii *mn*; liniia *ab* będąca różnicą między 4tą i 5tą częścią linii danéy, będzie iéy częścią 20stą gdyż $\frac{1}{4} - \frac{1}{5} = \frac{1}{20}$. Znalazłszy 20stą część linii *mn*, łatwo będzie podzielić ią na części szukane.

Sposób. 4. Sposób następuiący dzielenia linii na części równe, może być także wygodnie użyty. Niechby *np.* liniią AM, fig. 104. potrzeba było podzielić na części równych 5. Z końców linii danéy wyprowadziwszy dwie liniie ME, AL od siebie równoodległe nieograniczonéy długości, na iedney z nich ME wziąć 5 części równych iakiéykolwiek długości MN, NO, i t. d. przeniosłszy potém te same części na liniią AL, zaczynaiąc od A ku L, i połączywszy punkta podziałów liniiami prostemi GN, HO, i t. d. w równoległoboku LM poprowadzić przekątną AF, która liniie GN, HO i t. d. równe linii *d*anéy AM, podzieli na części szukane: gdyż w tróykącie AFM, którego dwa boki AF i MF dzieli liniia EQ równoodległa od boku trzeciego AM, iest MF: QF = AM: EQ.

A że liniia QF iest 5tą częścią linii MF podług wykréślenia, więc i EQ będzie 5tą częścią linii AM. Tymże sposobem okazać można że DP = $\frac{2}{5}$ częściom linii AM i t. d.

200. Znaiąc sposób dzielenia linii prostéy na części równe, łatwo będzie wykréślić *podziałkę scala*, która służy do mierzenia liniy prostych. Naywygodniéysza iest podziałka dziesiętna, która się kréśli sposobem następuiącym: podzieliwszy liniią AB fig. 105. na 10 części równych i z punktów A i B. poprowadziwszy AD, CB prostopadłe do AB nieograniczonéy długości. na iedney z nich *np.* na linii AD wziąść 10 części równych iakiéykolwiek długości; i te same części przenieść na liniią BC, poczynaiąc od B do C. Poprowadziwszy potém przez punkta podziałów liniie proste iak wyraża figura, łatwo okazać, że *np.* część linii oznaczonéy liczbą 1. równoodległéy od AB, zawarta między liniiami BC i B*a* iest 10tą częścią linii C*a* = A*b*. A że A*b* iest 10tą częścią linii AB z wykréślenia, więc 10ta część linii A*b*, będzie setną częścią linii AB. Podobnież części liniy oznaczonych liczbami 2, 3, 4, i t. d. równoodległych od AB, zawarte między liniiami BC i B*a* są $\frac{2}{100}, \frac{3}{100}, \frac{4}{100}$, i t. d. Linii AB. Sznur mierniczy ma, iak wiadomo, prętów 10,

a pręt pręcików 10. Gdyby więc liniia AB wyrażała sznur 1, liniia A*b* lub C*a* wyrażałaby 1 pręt, a liniie zawarte między liniiami BC i B*a* wyrażałyby 1, 2. 3, 4 i t. d. pręciki. Liniia *np. cd*: wynosi 5 prętów i 3 pręciki; liniia *ef* wynosi 7 prętów i 6 pręcików. Przedłużywszy liniią AB do E tak aby BE=AB i dokończywszy figury; liniia *cg* wynosi sznur 1, prętów 5, pręcików 3; liniia *eh* wynosi sznur 1, prętów 7 i 6 pręcików i t. d.

101. *Twierd.* W tróykącie prostokątnym ACB fig. 106. z wiérzchołka kąta prostego C spuściwszy CD prostopadłą do AB;

1ód. *Prostopadła ta podzieli tróykąt dany na dwa inne podobne danemu, a tém samém podobne między sobą*; 2re. *Przeciwprostokątna podzielona będzie na dwa odcinki, między któremi prostopadła ta iest średnią ieometrycznie proporcyonalną*; 3cie. *boki przyległe kątowi prostemu w tróykącie danym, będą średniemi ieometrycznie proporcyonalnemi między przeciwprostokątną i odcinkami przyległemi.*

Dowod. 1ód. Dwa tróykąty ACD, ACB maią kąt A spólny, kąt prosty ADC piérwszego równy kątowi prostemu ACB drugiego tróykąta: więc i trzeci kąt ACD który oznaczamy głoską *m*, w pierwszym, równy iest trzeciemu kątowi B oznaczonemu głoską *m* w drugim tróykącie. A zatém dwa te tróykąty są podobne (189). Podobnie dwa tróykąty CBD, ACB maią kąt B spólny, kąt CDB piérwszego równy kątowi ACB 2go tróykąta; więc i trzeci kąt DCB czyli *o* w piérwszym równy iest 3*mu* kątowi BAC czyli *o* w drugim tróykącie, a zatém dwa te tróykąty są podobne.

2re: Aby okazać, że prostopadła CD iest średnią ieometrycznie proporcyonalną między AD, i BD, czyli że iest AD: DC=DC: DB, uważmy dwa podobne tróykąty ACD i BCD, których bokami są liniie AD, DC i DB tę proporcyą składaiące. Ponieważ w tróykątach podobnych boki odpowiadaiące, to iest, przyległe albo też przeciwne kątom równym są proporcyonalne (193), będzie więc bok AD przeciwny kątowi *m* w 1szym tróykącie ACD, do boku CD przeciwnego kątowi *m* w 2gim tróykącie DCB, iak bok CD przeciwny kątowi *o* w 1szym: do boku DB przeciwnego kątowi *o* w 2gim tróykącie; czyli AD: DC =DC: DB.

3cie. Aby okazać; że AC iest średnią ieometrycznie proporcyonalną między AD i AB, czyli że iest AB: AC=AC: AD, uważmy dwa podobne tróykąty ACB i ACD, których bokami są liniie AB, AC, AD proporcyą tę składaiące: będzie więc iak wyżéy; bok AB przeciwny kątowi prostemu w 1szym tróykącie ACB, do boku AC przeciwnego kątowi prostemu w 2gim tróykącie ACD, iak bok AC przeciwny kątowi *m* w 1szym, do boku AD przeciwnego kątowi *m* w 2gim tróykącie; czyli AB: AC=AC: AD.

Podobnież na okazanie że iest AB: BC=BC:BD uważmy, dwa podobne tróykąty ABC, DBC, których bokami są linie AB, BC i BD, składaiące tę proporcyą: będzie więc, bok AB przeciwny kątowi prostemu w piérwszym tróykącie ABC, do boku BC, przeciwnego kątowi prostemu w 2gim tróykącie DCB, iak bok BC przeciwny kątowi *o* w 1szym, do boku BD przeciwnego kątowi *o* w 2gim tróykącie: czyli AB: BC=BC: BD.

202, *Wniosek.* Ponieważ podług 3ciéy części poprzedzaiącego twierdzenia iest:

AB: AC=AC: AD, AB: CB=CB: DB; więc $AB \times AD = AC^2$, $AB \times DB = CB^2$. A zatém $AB \times AD + AB \times DB = AC^2 + CB^2$, czyli $AB\,(AD + DB) = AC^2 + CB^2$; czyli $AB \times AB = AB^2 = AC^2 + CB^2$ gdyż $AD + DB = AB$; to iest, w tróykącie prostokątnym ACB kwadrat z przeciwprostokątnéy AB, równy iest summie kwadratów z dwóch ramion kąta prostego; własność którąśmy iuż wyżéy (161) innym sposobem okazali.

203. Zagad. *Maiąc dane dwie liniie, znaleźć między niemi średnią ieometrycznie proporcyonalną.*

Rozw. Poprowadziwszy iakiéykolwiek długości liniią prostą, i wziąwszy na niéy liniią AD fig. 90. równą piérwszéy linii danéy i DB równą drugiéy linii danéy, na linii AB iako na średnicy wykréślić półkole; i z punktu D wyprowadzić liniią DC prostopadłą do AB, aż do przecięcia się z półokręgiem w punkcie C: prostopadła CD będzie szukana: gdyż poprowadziwszy dwie cięciwy AC, BC, w tróykącie ACB prostokątnym przy C (127), iest AD: CD:=CD: DB (201).

Sposób 2. Poprowadziwszy liniią AB równą większéy z dwóch liniy danych, i od końca B wziąwszy BD równą mnieyszéy z dwóch liniy danych; na linii AB iako na średnicy, wykréślić Półkole, z punktu D poprowadzić DC prostopadłą do AB, aż do przecięcia się z półokręgiem w punkcie C; punkt C z punktem B złączywszy cięciwą CB, ta będzie liniią szukaną: gdyż poprowadziwszy cięciwę CA, w tróykącie ACB prostokątnym przy C, iest AB: CB=CB: CD (201).

204. Zagad. 2. *Dany prostokąt ABCD fig. 79. zamienić na kwadrat równy mu co do powiérzchni.*

Rozw. Między podstawą AB i wysokością BC danego prostokąta, znaydźmy średnią ieometrycznie proporcyonalną (203), którą oznaczmy głoską M: ta będzie bokiem szukanego kwadratu: gdyż podług wykréślenia iest AB: M=M: CB; więc $AB \times CB = M^2$: to iest, powiérzchnia danego prostokąta, równa iest powierzchni kwadratu wykréślonego na linii M.

205. Zagad. 3. *Dany tróykąt ABC fig. 106. zamienić na kwadrat równy mu co do powiérzchni.*

Rozw. Między połową podstawy AB i między wysokością CD danego tróykąta znaydźmy średnią ieometrycznie proporcyonalną, którą oznaczmy głoską M; ta będzie bokiem szukanego kwadratu: gdyż podług wykréślenia iest $\frac{1}{2}$ AB: M=M: CD; więc $\frac{1}{2} AB \times CD = M^2$; to iest, powiérzchnia danego tróykąta, równa iest powiérzchni kwadratu wykréślonego na linii M.

206. *Wniosek.* Okazaliśmy wyżéy (141), że każdy wielokąt może być zamieniony na tróykąt równy mu co do powiérzchni: w zagadnieniu poprzedzaiącém podaliśmy sposób zamienienia tróykąta na kwadrat równy mu co do powiérzchni: a zatém każdy wielokąt można zamienić na kwadrat równy mu co do powiérzchni.

207. Twierd. *Wielokąty foremne o iednéyże liczbie boków są podobne.*

Dowod. Ponieważ kąty wewnętrzne wielokąta, ważą kątów prostych 2 razy tyle, ile wielokąt ma boków mniéy 4 (94), w dwóch zatém wielokątach o iednéyże liczbie boków kąty we-

wnętrzne iednego tyle ważą kątów prostych, ile ich ważą kąty wewnętrzne wielokąta drugiego. A że kąty iednego wielokąta są między sobą równe, i kąty drugiego wielokąta są także między sobą równe, gdyż dwa te wielokąty są podług założenia foremne; będą więc kąty iednego równe kątom drugiego wielokąta; to iest, dwa te wielokąty będą równokątne.

2re. Ponieważ wielokąty te są foremne, więc boki iednego wielokąta są między sobą równe, i boki drugiego wielokąta, są także między sobą równe. Jeżeli więc bok ieden w 1szym wielokącie iest *np* dwa razy większy od boku iednego w drugim; będzie też bok drugi w piérwszym, dwa razy większy od boku drugiego w 2gim wielokącie; i bok trzeci w 1szym dwa razy większy od boku 3go w 2gim wielokącie i t. d. to iest boki tych dwóch wielokątów będą między sobą proporcyonalne.

Kiedy więc dwa te wielokąty są równokątne i maią boki proporcyonalne, są tém samém podobne.

208. Twierd. *Dwa iakiekolwiek wielokąty np. dwa pięciokąty ABCDE*, abcde *fig.* 107. *złożone z téyże samey liczby tróykątów podobnych między sobą i podobnież ułożonych, są sobie podobne; i odwrotnie.*

Dow. W dwóch tróykątach ABC, *abc* podobnych z założenia iest kąt B=*b*; kąt ACB=*acb*. Podobnież w tróykątach CAD, *cad* podobnych z założenia iest kąt ACD=*acd*; gdy więc iest ACB=*acb*, ACD=*acd*; więc ACB+ACD =*acb*+*acd*; czyli kąt BCD=*bcd*. Tymże sposobem okazać można równość kątów CDE i *cde*, DEA i *dea*. Co się tycze kątów BAE, *bae*,

te są także sobie równe, gdyż piérwszy z nich składa się z kątów BAC, CAD, DAE równych kątom odpowiadaiącym *bac*, *cad*, *dae* z których składa się kąt drugi.

Nadto w tróykątach ABC i *abc*, ACD i *acd*, ADE i *ade* podobnych między sobą z założenia, iest:

AB: *ab*=BC: *bc*=AC: *ac*.
AC: *ac*=CD: *cd*=AD: *ad*.
AD: *ad*=DE: *de*=AE: *ae*.

Wszystkie te stosunki są równe: gdyż w piérwszym ciągu ostatni stosunek iest ten sam co piérwszy w drugim ciągu, ostatni zaś w drugim ciągu, iest ten sam co piérwszy w trzecim. Biorąc zatém te tylko stosunki, których wyrazy są bokami wielokątów; będzie AB: *ab*=BC: *bc*=CD: *cd*=DE: *de*=AE: *ae*. Dwa więc te wielokąty będąc równokątnemi, i maiąc boki odpowiadaiące proporcyonalne są podobne (188).

Odwrotnie. Gdy są dwa wielokąty podobne, składaią się z jednéyże liczby tróykątów podobnych i podobnie ułożonych.

Dow. Niech będą dwa wielokąty ABCDE, *abcde* podobne: z wiérzchołka dwóch kątów A, *a*, odpowiadaiących sobie poprowadziwszy przekątne AC, AD, *ac*, *ad*; tróykąty ABC i *abc*, ACD i *acd*, ADE i *ade* będą między sobą podobne. Jakoż w tróykątach ABC, *abc* kąt B=*b* z założenia, i boki AB, BC są proporcyonalne bokom *ab*, *bc* z założenia: więc dwa te tróykąty są podobne (195) będzie więc BC: *bc*=AC: *ac*; i kąt ACB=*acb* iako przyległe bokom proporcyonalnym BC, *bc*. Że zaś podług założenia kąt BCD=*bcd* będzie więc BCD—ACB=*bcd*—*acb*; czyli ACD=*acd*.

A że BC: *bc*=CD: *cd* podług założenia,
BC: *bc*=AC: *ac* z dowodzenia; więc
CD: *cd*=AC:*ac*.

Dwa więc tróykąty ADC, *adc* maiąc kąty ACD, *acd* równe, zawarte między bokami względem siebie proporcyonalnemi są sobie podobne (195); a w szczególności kąt ADC=*adc*, iako przyległe bokom proporcyonalnym CD i *cd*, będzie więc CD: *cd*=AD: *ad*: Tymże samym sposobem dowieść można podobieństwa innych tróykątów.

209. *Uwaga.* W dwóch iakichkolwiek wielokątach podobnych, w dwóch *np.* pięciokątach ABCDE; *abcde* fig. 108. z dwóch końców któregokolwiek boku *np.* AB i *ab* poprowadziwszy przekątne AD, AC, BD, BE, *ad ac, bd, be*: łatwo byłoby okazać sposobem któregośmy użyli w twierdzeniu poprzedzaiącém, że tróykąty ABC, ABD, ABE, których spólną podstawą iest bok AB wielokąta 1go, tudzież tróykąty *abc, abd, abe*, których spólną podstawą iest bok *ab* wielokąta 2go odpowiadaiący bokowi AB, że mówię, te wszystkie tróykąty są między sobą podobne. I odwrotnie założywszy; że tróykąty te są między sobą podobne, łatwo byłoby okazać że wielokąty ABCDE, *abcde* są także podobne

210. Zagad. *Na daney linii* ab *fig.* 107. *wykréślić wielokąt podobny danemu BD:*

Rozw. W danym wielokącie BD prowadzę przekątne AC, AD; na daney linii *ab* kréślę tróykąt *abc* podobny tróykątowi ABC; na linii *ac* kréślę tróykąt *acd* podobny tróykątowi ACD, na linii *ad* kréślę tróykąt *ade* podobny tróykątowi ADE. Wielokąt *abcde* będzie podobny danemu (208).

Sposób 2gi. Wiérzchołki kątów danego wielokąta ABCDE fig. 108. złączywszy z dwoma końcami któregokolwiek boku *np.* AB przez przekątne AC, AD, BD, BE i na daney linii *ab* wykréśliwszy tróykąty *acb, adb, aeb*, podobne względem tróykątów ACB, ADB, AEB: punkt *d* złączyć z punktem *c* i *e*, liniiami prostemi *dc, de*: wielokąt *abcde* będzie podobny danemu (209).

Sposób 3ci. Na boku AB danego wielokąta ABCDE fig. 107. wziąść liniią A*b*, równą linii daney; z punktu *b* poprowadzić *bc* równoodległą od BC, aż do przecięcia się z przekątną AC w punkcie *c;* z punktu *c* poprowadzić *cd* równoodległą od CD, aż do przecięcia się z przekątną AD w punkcie *d*, z punktu *d* poprowadzić *de* równoodległą od DE aż do przecięcia się z bokiem AE w punkcie *e*: wielokąt *Abcde* będzie szukany.

Gdyby dana liniia *ab* dłuższa była od boku AB, na ten czas przedłużywszy bok AB, tak, aby wraz z przedłużeniem równy był linii daney, prowadząc iak wyżey równoodległe od boku BC, CD, DE, aż do przecięcia się z liniiami AC, AD, AE, przedłużonemi, wykréślimy wielokąt podobny danemu.

211. Twierd. *Obwody dwóch wielokątów podobnych, są do siebie w stosunku dwoch boków odpowiadaiących sobie w tych wielokątach.*

Dow. Ponieważ wielokąty ABCDE, *abcde* fig. 108. są podobne, będzie więc:

AB: *ab*=BC: *bc*=CD: *cd*=DE: *de*.=EA: *ea;* więc

AB+BC+CD+DE+EA: *ab*+*bc*+*cd*+*de*+*ea*=AB: *ab*; to iest: obwód wielokąta ABCDE do obwodu wielokąta *abcde*, iak bok 1wszego AB do boku *ab* w drugim wielokącie.

112. Twierd. *Powiérzchnie wielokątów podobnych maią się iak kwadraty z boków odpowiadaiących.*

1*ód.* Niech będą dwa tróykąty ABC, *abc* fig. 109. podobne, mamy dowieść że powiérzchnia tróykąta ABC, tak się ma do powiérzchni tróykąta *abc*, iak kwadrat z boku *np.* AC do kwadratu z boku *ac*, czyli, że iest tróykąt ACB: $acb = AC^2 : ac^2$,

Z wiérzchołka kąta C i *c* spuściwszy CD i *cd* piérwszą prostopadłą do AB, drugą prostopadłą do *ab*; dwa tróykąty ACD *acd* prostokątne przy D i *d* w których kąt A równy kątowi *a*, są podobne (190), będzie więc:

CD: $cd = AC$: *ac*; a że podług założenia

AB: $ab = AC$: *ac*: więc rozmnożywszy w tych dwóch proporcyach wyrazy sobie odpowiadaiące będzie:

$AB \times CD$: $ab \times cd = AC \times AC$: $ac \times ac$; czyli $\frac{1}{2}(AB \times CD) : \frac{1}{2}(ab \times cd) = AC^2 : ac^2$ to iest, połowa iloczynu podstawy tróykąta ABC przez wysokość tegoż tróykąta, tak się ma do połowy iloczynu podstawy tróykąta *abc* przez wysokość tegoż troykąta, iak kwadrat z boku AC do kwadratu z boku *ac*. A że iloczyny te równe są; piérwszy powiérzchni tróykąta ABC, drugi powiérzchni tróykąta *abc* (149) więc powiérzchnie tych dwóch tróykątów maią się iak kwadraty z boków odpowiadaiących.

2*re.* Niech będą dwa iakiekolwiek wielokąty podobne, *np.* dwa pięciokąty ABCDE, *abcde* fig. 107. Z wiérzchołka kątów A, *a*, poprowadziwszy przekątne AC, AD, *ac*, *ad*; obadwa te wielokąty podzielone będą na równą liczbę tróykątów podobnie ułożonych i podobnych (208);

będzie zatém podług piérwszéy części ninieyszego twierdzenia, tróykąt.

ABC: $abc = BC^2 : bc^2$. ACD: $acd = CD^2 : cd^2$, ADE: $ade =$, $DE^2 : de^2$. A że dla podobieństwa wielokątów iest.

BC: $bc = CD : cd = DE : de$; a tém samém $BC^2 : bc^2 = CD^2 : cd^2 = DE^2 : de^2$: więc będzie też:

ABC: $abc = ACD : acd = ADE : ade$. A zatém summa wszystkich poprzedników do summy wszystkich następników iak którykolwiek poprzednik do swego następnika; to iest:

$ABC + ACD + ADE : abc + acd + ade = ABC : abc$: czyli ABCDE: $abcde = ABC : abc$. A że $ABC : abc = BC^2 : bc^2$, więc $ABCDE : abcde = BC^2 : bc^2$: to iest, powierzchnie dwóch wielokątów podobnych maią się iak kwadraty z boków odpowiadaiących.

Uwaga. Stosunek kwadratowy zowie się inaczéy stosunkiem *dwumnożnym*, *ratio duplicata*. Przeto też twierdzenie poprzedzaiące zwyczaynie tak się wyraża: *Dwa wielokąty podobne są do siebie w stosunku dwu-mnożnym boków odpowiadaiących.*

213. Zagad. *Maiąc dane dwa wielokąty podobne, wykreślić trzeci podobny któremukolwiek z dwóch danych, któregoby powierzchnia równa była summie lub różnicy dwóch wielokątów danych:*

Rozw. 1. Wykreśliwszy tróykąt ABC. fig. 110. prostokątny przy C, w którymby ramiona kąta prostego AC, BC były bokami odpowiadaiącemi dwóch danych wielokątów P i Q, na przeciwprostokątnéy AB wykreślmy wielokąt R podobny wielokątom P, i Q, i w którymby bok AB był od

powiadaiący bokom AC, BC w dwóch wielokątach danych: wielokąt R iest szukany: gdyż ponieważ wielokąty te są podobne, więc podług twierdzenia poprzedzaiącego $P:Q = AC^2:BC^2$; a tém samém:

$P+Q:Q = AC^2+BC^2:BC$. A że też iest $Q:R = BC^2:AB^2$; więc złożywszy te dwie proporcye, będzie $P+Q:R = AC^2+BC^2:AB^2$. W téy proporcyi ponieważ 2gi poprzednik AC^2+BC^2 równy iest swemu następnikowi (161); więc i poprzednik 1szy $P+Q$ równy iest także swoiemu następnikowi R; to iest, dwa dane wielokąty P i Q równe są znalezionemu R.

2. Chcąc znaleźć wielokąt Q podobny dwom wielokątom danym P i R, i któregoby powierzchnia równa była różnicy tychże dwóch wielokątów danych, trzeba wykreślić tróykąt prostokątny ABC, daiąc mu za iedno ramie kąta prostego AC bok wielokąta mnieyszego P. a za przeciwprostokątną AB bok odpowiadaiący wielokąta większego R: BC będzie bokiem odpowiadaiącym wielokąta szukanego Q: gdyż ponieważ wielokąty R i P, są podobne, będzie $R:P = AB^2:AC^2$; a tém samém:

$R-P:P = AB^2-AC^2:AC^2$. A że iest także $P:Q = AC^2:BC^2$; więc złożywszy te dwie proporcyie, będzie $R-P:Q = AB^2-AC^2:BC^2$. W téy proporcyi poprzednik 2gi AB^2-AC^2 równy iest swemu następnikowi BC^2 (168); więc i poprzednik 1szy R—P równy iest także swemu następnikowi Q: to iest, różnica powierzchni dwóch danych wielokątów R i P. równa iest wielokątowi znalezionemu Q.

214. Zagad. *Wykreślić wielokąt podobny danemu; któregoby powierzchnia do powierzchni danego, miała się w stosunku danym; lub któregoby powierzchnia równa była danemu kwadratowi.*

Roz. 1. Daymy że powierzchnia danego wielokąta X fig. 111, ma być do powierzchni wielokąta szukanego w stosunku dwóch iakichkolwiek liniy prostych M i N. Poprowadziwszy linią AB iakieykolwiek długości, i wziąwszy na niéy dwie części AD i BD, któreby się miały do siebie w stosunku dwóch liniy M i N; na linii AB iako na średnicy wykreślić półkole, i z punktu D wyprowadzić DC prostopadłą do AB. Poprowadziwszy potém cięciwy AC, BC, i wziąwszy CE równą *ce* bokowi danego wielokąta X; z punktu E poprowadzić EF równoodległą od AB, aż do przecięcia się w punkcie F z cięciwą CB: linia CF będzie bokiem szukanego wielokąta odpowiadaiącym bokowi *ce*: to iest, na linii CF wykréśliwszy wielokąt podobny danemu, wielokąt ten będzie szukany. Jakoż w tróykącie ACB, iest $AC:CB = EC:FC$ (177), a tém samém

$AC^2:BC^2 = EC^2:FC^2$. A że

$AC^2:BC^2 = AD.BD$: (163); więc złożywszy dwie te proporcye będzie $EC^2:FC^2 = AD:BD$. Że zaś $AD:BD = M:N$ podług wykréślenia, więc $EC^2:FC^2 = M:N$; a tém samém wielokąt wykréślony na boku EC, czyli *ec*, to iest, wielokąt dany X, ma się do podobnego wielokąta wykréślonego na boku FC, iak linia M do linii N: gdyż wielokąty podobne maią się iak kwadraty z boków odpowiadaiących (212).

Gdyby bok *ec* wielokąta X większy był od AC, na ten czas linią CA przedłużylibyśmy do *e* tak, aby $Ce = ce$: w reszcie wykréślenie i dowodzenie byłoby to samo.

2re. Chcąc wykréślić wielokąt podobny danemu X, któregoby powierzchnia równa była danemu kwadratowi N^2, trzeba naprzód wielokąt dany X zamienić na kwadrat M^2 równy mu co do powierzchni; potém do boków tych dwóch kwadratów, to iest do M i N, tudzież do boku *ec* danego wielokąta X znaleźć 4tą ieometrycznie proporcyonalną; ta będzie bokiem szukanego wielokąta odpowiadaiącym bokowi *ec*. Jakoż oznaczywszy 4tą ieometrycznie proporcyonalną głoską P.a wielokąt na niéy wykréślony głoską Z, ponieważ dwa wielokąty X i Z są podobne z wykréślenia, będzie więc X: $Z = ec^2p^2$: —:—:—:—:—:—:—:A.

A że podług wykréślenia M: N = *ec*: P, a tém samém M^2: $N^2 = ec^2$: p^2, złożywszy tę proporcyą z proporcyą oznaczoną głoską A, będzie X: Z = M^2: N^2.

W téy proporcyi ponieważ poprzednik Iszy X iest równy z wykréślenia poprzednikowi 2mu M^2, więc i następnik 1wszy Z, iest także równy następnikowi 2mu N^2; to iest, wielokąt znaleziony, równy iest co do powierzchni danemu kwadratowi.

215. Twierd. *Z punktu C wziętego za kołem fig.* 112. *poprowadziwszy dwie liniie CA, CB przecinaiące okrąg w punktach D i A, B i F; będzie CA: CB = CF: CD.*

Dowod. Poprowadziwszy dwie cięciwy AF, BD, dwa tróykąty ACF, BCD, maią kąt C spolny, kąty A i B równe, gdyż obudwu miarą iest połowa łuku DF: więc dwa te tróykąty są podobne; będzie zatém CA: CB = CF: CD.

Uwaga. W proporcyi téy CA: CB = CF CD, sieczna iedna CA i część iéy za kołem CD, są wyrazami skraynemi; sieczna druga CB i część iéy za kołem CF, są wyrazami średniemi proporcyi; to iest, tak się ma sieczna 1wsza do 2giéy, iak część za kołem siecznéy 2giéy, do części za kołem siecznéy 1wszéy. Stosunek takowy nazywa się odwrotny, *ratio inversa*, dla różnicy od stosunku prostego *directa*, któryby był na ten czas, gdyby się miała siéczna 1sza do 2giéy, iak część za kołem siecznéy 1wszéy, do części za kołem drugiéy. Dla tego też poprzedzaiące twierdzenie zwyczaynie tak się wyraża: *z punktu wziętego za kołem poprowadziwszy dwie sieczne; sieczne te są do siebie w stosunku odwrotnym części swoich za kołem.*

216. Twierd. *Z punktu C. wziętego za kołem; poprowadziwszy styczną CB fig.* 113, *i sieczną CA przecinaiącą okrąg w punktach A i D; będzie styczna BC średnią ieometrycznie proporcyonalną między całą sieczną CA; i częścią iéy za kołem CD*: to iest: będzie CA: CB = CB: CD.

Dowod. Poprowadziwszy dwie cięciwy BA, BD, dwa tróykąty ABC, BDC maią kąt C spólny, kąt A = DBC, gdyż obadwa maią za miarę połowę łuku BD (125), a zatém dwa te tróykąty są podobne; będzie więc CA: CB = CB: CD.

217. *Twierd.* Wziąwszy w kole punkt C fig. 114 od upodobania, i przez ten punkt poprowadziwszy dwie cięciwy AB, DF w punkcie C przecinaiące się; *części tych cięciw będą do siebie w stosunku odwrotnym*; *to iest będzie* AC: DC = FC: BC.

Dowod. Poprowadziwszy cięciwy FA, BD, tróykąty CFA, CBD maią kąty przy C równe, kąt A równy kątowi D, gdyż obadwa maią z-

miarę połowę łuku BF: więc dwa te tróykąty są podobne; będzie zatém AC: DC=FC: BC.

218. *Uwaga.* Porównawszy to twierdzenie z twierdzeniem wyżéy podaném (215), łatwo iest postrzedz, że one są dwoma przypadkami następuiącego twierdzenia:

Gdy dwie liniie proste przecinaiące się z sobą w punkcie wziętym w kole lub za kołem przedłużone będą tak, aby każda z nich przecinała okrąg we dwóch punktach; odległości spólnego ich przecięcia się od punktów przecięcia się ich z okręgiem są do siebie w stosunku odwrotnym.

219. *Wniosek.* Gdyby cięciwa AB fig. 115. przechodziła przez środek koła, a cięciwa DF była do niéy prostopadła, a tém samém w punkcie C na dwie równe części podzieloną (107); na ten czas proporcya AC: DC = FC: BC (217), zamieniłaby się w następuiącą: AC: DC = DC: BC; gdyż FC = DC; to iest DC iest średnią ieometrycznie proporcyonalną między odcinkami AC i BC średnicy AB: cośmy iuż wyżéy innym sposobem okazali (201).

220. Zagad. *Daną liniią BC fig.* 116. *podzielić w stosunku średnim i skraynym*: to iest, podzielić tę liniią na dwie części tak, aby część większa CF była średnią ieometrycznie proporcyonalną między całą liniią BC i częścią mnieyszą BF, czyli aby było BF: CF = CF: CB.

Rozw. Z końca B linii danéy poprowadziwszy BS prostopadłą do BC i równą połowie linii BC; punkt S z drugim końcem C danéy linii złączyć liniią prostą SC, z punktu S iako ze środka promieniem SB nakreślić koło którego okrąg liniią SC przecina w punkcie D; nakoniec z punktu C iako ze środka promieniem CD wykreślić łuk

DF, który liniią daną BC podzieli w punkcie F na części szukane.

Gdyż ponieważ BC iako prostopadła z końca promienia SB wyprowadzona, iest styczna z kołem (113), przedłużywszy zatém CS do A, będzie CD: CB = CB: CA (216).

Że zaś podług wykreślenia CB — CD = CB — CF = BF; a liniia BS równa połowie BC, a tém samém BC = 2BS = AD; będzie więc

CA — CB = CA — AD = CD = CF;

ostatnia zatém proporcya zamieni się w następuiącą, BF: CF = CF: BC.

Że zaś część CF iest większa od części BF, to iest przez się widoczna: bo ponieważ w ostatniéy proporcyi następnik 2gi BC większy iest od swego poprzednika, więc i następnik pierwszy CF większy być musi od swego poprzednika BF.

221. Zagad. *Nakreślić koło, któregoby okrąg przeszedł przez dwa dane punkta A i D, i stykał się z daną liniią CE fig.* 117.

Rozw. Złączywszy dwa dane punkta liniią prostą AD i przedłużywszy ią aż do przecięcia się z liniią daną CE w punkcie C; między liniiami CA i CD znaleźć średnią ieometrycznie proporcyonalną, którą będzie liniia CF, podług tego co się wyżéy powiedziało (203). Z punktu C promieniem CF wykreślić łuk FB, przecinaiący liniią daną EC w punkcie B. Nakoniec wykreślić koło, któregoby okrąg przechodził przez trzy punkta A, B, D sposobem podanym wyżéy (110), koło to będzie szukane: iakoż podług wykreślenia AC: CF = CF: CD; czyli AC: CB = CB: CD: gdyż CB = CF z wykreślenia, A że AC iest sieczna koła ACB, a CD iest część iéy za kołem, więc CB iest styczna tegoż koła (216). Gdy więc

okrąg znalezionego koła przechodzi przez dwa dane punkta A i D, i dotyka się linii danéy CE w punkcie B, koło zatém ACB iest szukane.

Gdy liniia AD iest od CE równoodległa, na ten czas punkt szukany B oznaczy prostopadła ze środka linii AD spuszczona do CE.

ROZDZIAŁ VIII.

o *Wielokątach w koło wpisanych i opisanych na kole.*

222. *Uwaga* I. Powiedzieliśmy wyżéy (110) że maiąc dane trzy punkta, byle nie w linii prostéy, można zawsze wykreślić koło, któregoby okrąg przechodził przez te trzy punkta. Z tego wypada, że maiąc dany iakikolwiek tróykąt ABC fig. 118 można zawsze wykreślić koło, któregoby okrąg przechodził przez wierzchołki trzech kątow tego tróykąta: taki tróykąt zowie się tróykątem w koło *wpisanym*, *triangulum circulo inscriptum*. W ogólności każdy wielokąt nazywa się wielokątem w koło wpisanym, gdy przez wierzchołki wszystkich iego kątów przechodzi okrąg iednego koła; koło zaś takie zowie się kołem opisanem na wielokącie.

223. *Uwaga* 2. Zastanowiwszy się nad tróykątem ABC w koło wpisanym, można niektóre iego własności wyżéy dowiedzione innym sposobem okazać. I tak 1*ód*, trzy kąty tróykąta ważą dwa kąty proste: gdyż każdy z nich ma za miarę połowę łuku zawartego między iego ramionami (124); a że łuki między ramionami tych trzech kątów zawarte równaią się całemu okręgowi, więc miarą tych trzech kątów iest połowa okręgu, czyli miara dwóch kątów prostych.

2*re*. Gdy dwa kąty B i C są równe, połowa łuku AC równa będzie połowie łuku AB, a tém samém i cały łuk AC równy całemu łukowi AB, gdy zaś łuki te są równe, będą też i cięciwy ich AC AB równe (105), a że cięciwy te są bokami tróykąta ABC, więc tróykąt ten iest równoramienny.

3*cie*. Odwrotnie równość boków AC, AB ciągnie za sobą równość łuków AC, AB i równość kątów B i C.

4*te*. Gdy trzy kąty A, B, C są równe, łuki też CB, CA, AB będą równe, i cięciwy tych łuków CB, CA, AB, które tu są bokami tróykąta, będą równe: to iest; tróykąt będzie równoboczny.

5*te*. Odwrotnie równość boków CB, CA, AB, ciągnie za sobą równość łuków CB, CA, AB, i równość kątów A, B, C.

6*te*. Jeżeli kąt A > B będzie też łuk CB > AC, a tém samém i cięciwa CB, która tu iest bokiem tróykąta, większa od cięciwy AC (121), i t. d.

224. Zagad. *Wewnątrz danego tróykąta ABC fig.* 119. *wykreślić koło takie, aby boki tróykąta były stycznemi tego koła.*

Rozw. Dwa którekolwiek kąty A i B podzieliwszy na dwie równe części (46), przez liniie AS, BS przecinaiące się w punkcie S, i z punktu S do któregokolwiek boku tróykąta *np.* do boku AB spuściwszy prostopadłą SD, punkt S będzie środkiem, a prostopadła SD promieniem koła szukanego.

Gdyż spuściwszy do innych dwóch boków prostopadłe SE, SF, w dwóch tróykątach ASD, ASE, bok AS iest spólny, kąty przy A równe z wykréślenia, kąt ADS=AES iako proste: więc dwa te tróykąty przystaną do siebie (26), a w szczególności SD=SE. Tymże sposobem z tróykątów SDB, SFB mogących do siebie przystać dowiedziemy, że SF=SD. Trzy więc prostopadłe SD, SE, SF są sobie równe. Okrąg zatém koła z punktu S promieniem SD nakréślonego, przeydzie przez punkta E i F; i boki tróykąta ABC w punktach D, E, F, będą stycznemi z kołem (113).

Koło wewnątrz tróykąta wykréślone, którego boki stycznemi są tróykąta, zowie się kołem w tróykąt wpisaném: a tróykąt zowie się tróykątem opisanym na kole; *Triangulum circulo circumscriptum.* W ogólności każdy wielokąt, którego wszystkie boki są stycznemi iednego koła wykréślonego wewnątrz wielokąta, zowie się *wielokątem na kole opisanym*, a koło takie zowie się kołem wpisaném w wielokąt.

Poprzedzaiące więc zagadnienie można inaczéy tak wysłowić: *wpisać koło w dany tróykąt.*

225. *Uwaga.* Ponieważ przez trzy punkta A, C, B fig. 118, okrąg tylko iednego koła przechodzić może (111); więc wziąwszy punkt 4ty D za kołem, rzeczą iest widoczną, że okrąg koła ACB nie może przeyść przez punkt D, a tém samém czworokąt ADCB nie może być w koło wpisany. Lecz gdyby 4ty punkt F znaydował się na okręgu koła ACB, czworokąt AFCB byłby w koło wpisany. Stąd się okazuie, że nie każdy czworokąt, a tém bardziéy nie każdy wielokąt maiący boków więcéy niż 4ry, może być w koło wpisany.

226. Twierd. *Każdy wielokąt foremny może być w koło wpisany i opisany na kole.*

Dowod 1. Niech będzie iakikolwiek wielokąt foremny ABCDEF fig. 120. Nakréślmy koło któregoby okrąg przechodził przez trzy wierzchołki trzech przyległych kątów, A, B, C; niech punkt S będzie środkiem tego koła: mamy okazać, że okrąg iego przeydzie przez wszystkie wierzchołki kątów wielokąta. Jakoż z punktu S poprowadziwszy liniie proste SA, SB, SC, *SD*, i t. d. do wszystkich wierzchołków kątów wielokąta, trzy pierwsze liniie SA, SB, SC są podług wykreślenia, promieniami tego koła, a tém samém równe: więc dwa tróykąty SBA, SBC, w których bok SB spólny, bok SA = SC, bok BA = BC, przystaną do siebie (28), a w szczególności kąt SBA = SBC; a zatém ieden z nich *np.* SBC iest połową obudwu, czyli kąt SBC iest połową kąta ABC; że zaś kąt ABC= BCD, gdyż wielokąt ABCDEF iest foremny; więc kąt SBC iest także połową kąta BCD. Nadto w tróykącie SBC bok SB=SC z wykréślenia; więc kąt SBC=SCB, a zatém i kąt SCB iest połową kąta BCD, a tém samém i kąt SCD iest drugą połową tegoż kąta BCD. Więc kąt SCB = SCD. W dwóch zatém tróykątach SCB; SCD, bok SC iest spólny, bok CB = CD z założenia, i kąty między temi bokami zawarte SCB, SCD równe: więc dwa te tróykąty przystaną do siebie (24), a wszczególności bok SB = SD: a zatém okrąg przechodzący przez 3 punkta A, B, C, przeydzie także i przez punkt D. Tymże sposobem okazać można, że okrąg przechodzący przez 3 punkta B, C, D, przeydzie także przez punkt E i t. d. Więc ten sam okrąg który przechodzi przez punkt A, B, C, przeydzie przez

punkta D, E, F, to iest, przez wszystkie wierzchołki kątów wielokąta; a zatém koło to będzie opisane na wielokącie.

2re. Ze środka S koła opisanego na wielokącie, spuściwszy prostopadłe SM, SN. i t. d. do boków wielokąta, wszystkie te prostopadłe będą między sobą równe: gdyż boki wielokąta są cięciwami koła opisanego: cięciwy te są między sobą równe, wielokąt bowiem ABCDEF iest foremny; a zatém odległości tych cięciw od środka koła, to iest, prostopadłe SM, SN i t. d. są między sobą równe (123). Wziąwszy więc liniią SM za promień, i z punktu S. iako ze środka nakreśliwszy koło, okrąg tego koła przeydzie przez wszystkie punkta M. N, O i t. d. i boki wielokąta w punktach M. N, O, i t. d. będą styczne tego koła (113), a zatém koło to będzie wpisane w wielokąt.

227. *Uwaga.* Punkt S. spólny środek koła wpisanego w wielokąt i na niem opisanego, może być także uważany iako środek wielokąta, dla téy przyczyny kąty ASB, BSC i t. d. zawarte między dwoma promieniami do końców boków wielokąta poprowadzonemi, zowią się kątami we środku wielokąta.

Wszystkie kąty we środku wielokąta foremnego, są między sobą równe: gdyż cięciwy AB BC i t. d. a tém samém i łuki AB, BC i t. d. będące miarami tych kątów, są równe. A że wszystkie te kąty ważą 4 kąty proste (16), więc iednego ważność znaydzie się podzieliwszy 4 przez liczbę boków wielokąta. I tak *np.* w ośmiokącie foremnym ieden kąt we środku iest $\frac{1}{8}$ cztérech kątów prostych czyli $\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$ iednego kąta prostego i t. d.

228. *Wniosek.* A stąd wypada, że wpisać w koło wielokąt foremny o iakiéykolwiek liczbie boków, iest to samo, co podzielić okrąg koła danego na tyle łuków równych, ile wielokąt mieć powinien boków, i poprowadzić cięciwy tych łuków; cięciwy te będą bokami wielokąta foremnego w koło wpisanego: gdyż lod boki AB, BC i t. d. iako cięciwy łuków równych, są sobie równe.

2re. Tróykąty ABS, BCS, CDS i t. d. przystaną do siebie (28), więc kąty SBA, SBC, SCB, SCD i t. d. są równe: a tém samém i kąty ABC BCD i t. d. będą sobie równe. A zatém figura ABCDEF będzie wielokątem foremnym.

229. Zagad. *W dane koło wpisać tróykąt równoboczny.*

Rozw. Ponieważ tróykąt równoboczny iest wielokątem foremnym maiącym trzy boki, trzeba więc okrąg koła danego podzielić na 3 części równe; a cięciwa 3ciéy części okręgu będzie bokiem tróykąta szukanego (228); albo też okrąg podzielić na 6 części równych, a cięciwa dwóch takowych części, będzie bokiem tróykąta szukanego: gdyż $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$. Aby zaś podzielić okrąg na 6 części równych, trzeba w daném kole poprowadzić cięciwę równą promieniowi tegoż koła: cięciwa ta odetnie łuk równy szóstéy części okręgu.

Jakoż niech będzie sześciokąt foremny ABCDEF fig. 121. w koło wpisany: na okazanie że bok tego sześciokąta, będący cięciwą szóstéy częścią okręgu, iest równy promieniowi tegoż koła, poprowadźmy promienie SA, SB: w tróykącie ABS, kąt ASB, we środku sześciokąta iest $\frac{1}{6}$ częścią 4 kątów prostych, czyl $\frac{4}{6}$ lub $\frac{2}{3}$ iednego prostego (228); więc dwa kąty

SAB, SBA ważą resztę do 2 kątów prostych: to iest ważą $\frac{4}{3}$ kąta prostego. A że kąty te są równe; gdyż SA = SB; więc każdy z nich waży połowę $\frac{4}{3}$, to iest, kąty SAB, SBA ważą po $\frac{2}{3}$ kąta prostego. Tróykąt zatém ASB, maiący wszystkie trzy kąty równe, iest równoboczny: więc bok AB = SA; to iest, *bok sześciokąta w koło wpisanego równy iest promieniowi tegoż koła.* Poprowadziwszy liniie AC, CE, EA, z których każda iest cięciwą dwóch szóstych części okręgu, będzie ACE tróykąt równoboczny w koło wpisany.

230. *Uwaga.* Podaliśmy wyżéy (109), sposób podzielenia łuku danego na dwie równe części. Kiedy więc okrąg koła podzielony być może na 6 części równych, można go także podzielić na 12 części równych: na ten koniec dosyć będzie łuk równy szóstéy części okręgu podzielić na dwie równe części: iedna takowa część będzie równa dwunastéy części okręgu. Podzieliwszy znowu łuk równy dwunastéy części okręgu na dwie części równe, będziemy mieli 24tą część okręgu i t. d. Można więc okrąg podzielić na części równych 3, 6, 12, 24, 48 i t. d. czyli co na iedno wychodzi, wpisać wielokąty foremne o 3, 6, 12, 24, 48, i t. d. bokach.

231. *Uwaga.* 2. W czworokącie ABCS boki przeciwne są sobie równe, a zatém czworokąt ten iest równoległobokiem (78): będzie więc $AC^2 + BS^2 = AB^2 + BC^2 + CS^2 + AS^2$ (177); czyli $AC^2 + BS^2 = 4\,BS^2$; gdyż liniie AB, BC, CS, AS, są między sobą równe; a zatém i kwadraty ich są także równe. W ostatnim równaniu odiąwszy po obu stronach BS^2, zostanie $AC^2 = 3BS^2$; to iest; AC^2 trzy razy większy od BS^2. A zatém $BS^2 : AC^2 = 1 : 3$, a tém samém BS: AC = 1: $\sqrt{3}$, to iest, promień koła tak się ma do boku tróykąta równoboczuego w to koło wpisanego, iak iedność do pierwiastku liczby 3. A stąd wypada *lod*, że maiąc wiadomy promień koła, można będzie wyrachować bok tróykąta równobocznego w toż koło wpisanego; i odwrotnie; *2re* że ponieważ prawdziwy pierwiastek kwadratowy liczby 3 nie może być wyrażony w liczbach, więc promień koła i bok tróykąta równobocznego w toż koło wpisanego, są dwie liniie niespółmierne (38).

232, Zagad. *W dane koło wpisać kwadrat.*

Rorw. W daném kole poprowadziwszy dwie średnice AC, BD do siebie prostopadłe fig. 122. i końce ich połączywszy cięciwami AB, BC, CD, DA, czworokąt ABCD w koło wpisany iest kwadratem szukanym: gdyż wszystkie kąty iako zawarte w półkolu (127) są proste; wszystkie boki są między sobą równe, bo są cięciwami cztérech łuków równych, iako będących miarą 4 kątów prostych, maiących swóy wierzchołek w punkcie S.

233, *Uwaga.* 1. Wpisawszy w koło kwadrat, łatwo będzie można wpisać wielokąty foremne 0 8, 16, 32 i t. d, bokach używaiąc sposobu wyżéy podanego (230),

224. 2. *Uwaga.* W tróykącie ASB prostokątnym przy S, iest $AB^2 = AS^2 + BS^2$; czyli $AB^2 = 2BS^2$; gdyż AS = BS iako promienie; to iest, kwadrat z boku AB, czyli kwadrat w koło wpisany, iest dwa razy większy od kwadratu z promienia tegoż koła; a zatém $BS^2 : AB^2 = 1 : 2$, a tém samém BS: BA = 1: $\sqrt{2}$: to iest, promień koła tak się ma do boku kwadratu w toż koło wpisanego. iak iedność do pierwiastku liczby 2. A stąd

wypada *lod* że maiąc wiadomy promień koła, można będzie wyrachować bok kwadratu w koło wpisanego, i odwrotnie; 2*re* że ponieważ prawdziwy pierwiastek liczby 2 nie może być wyrażony w liczbach, więc promień koła i bok kwadratu w toż koło wpisanego, są dwie liniie niespołmierne (38).

235. Zagad. *W koło dane wpisać pieciokąt foremny.*

Rozw. Aby zagadnienie to rozwiązać, trzeba okrąg koła danego podzielić na 5 części równych; a cięciwa piątéy części okręgu, będzie bokiem pięciokąta szukanego: albo też podzielić okrąg na 10 części równych, a cięciwa dwóch dziesiątych części okręgu będzie bokiem pięciokąta szukanego: gdyż $\frac{1}{5}=\frac{2}{10}$: trzeba więc znaleźć cięciwę dwóch dziesiątych części okręgu, albo co na iedno wychodzi, bok dziesięciokąta foremnego w koło wpisanego.

Niech będzie promien SB fig. 123 podzielony w punkcie C w stosunku średnim i skraynym. Wziąwszy cięciwę AB=CS, i poprowadziwszy *SA*, CA; ponieważ podług założenia BS: CS= CS:BC, a AB=CS z wykréślenia, będzie więc BS: AB = AB: BC; tróykąty zatém SBA, CBA są podobne (195), a tém samém kąty przeciwne bokom proporcyonalnym są równe; to iest kąt S = CAB, i kąt SAB = ACB: a że kąt SAB = B, gdyż tróykąt SBA iest równoramienny, więc i kąt ACB = B, a tém samém bok AB = AC; że zaś AB = CS z wykréślenia, więc AC = CS: tróykąt zatém ABS iest równoramiennny, a tém samém kąt S= CAS.

Lecz

Lecz kąt ACB=S+CAS (84); czyli kąt SAB =2S; a tém samém kąt B=2S.

W ostatnich dwóch równaniach dodawszy strony odpowiadaiące, będzie

Kąt SAB+B=4S. Dodawszy po obu stronach kąt S, będzie kąt SAB+B+S=5S; to iest, w tróykącie SBA summa wszystkich trzech kątów iest 5 razy większa od kąta S, czyli co na iedno wychodzi, kąt S. iest piątą częścią trzech kątów tróykąta: czyli kąt S iest piątą częścią dwóch kątów prostych, czyli dziesiątą częścią 4 kątów prostych, a tém samém łuk AB będący miarą kąta S, iest dziesiątą częścią całego okręgu, więc cięciwa łuku tego AB równa z wykréślenia większéy części promienia podzielonego w stosunku średnim i skraynym, iest bokiem dziesięciokąta foremnego w koło wpisanego.

Uwaga. Wpisawszy w koło pięciokąt i dziesięciokąt foremny, łatwo będzie w to samo koło wpisać wielokąty foremne o 20, 40, 80 i t. d. bokach sposobem wyżéy podanym.

236. Zagad. *Wpisać w koło wielokąt foremny o* 15 *bokach.*

Rozw. Bok sześciokąta foremnego w koło wpisanego, czyli promień koła, iest cięciwą 6téy części okręgu: bok dziésięciokąta iest cięciwą 10téy części okręgu. Różnica między $\frac{1}{6}$ i $\frac{1}{10}$ iest $\frac{1}{15}$ Więc z punktu A przeniosłszy bok dziesięciokąta od A do D, i promień koła od A do E, łuk DE= AE—AD, czyli łuk DE iest różnicą między $\frac{1}{6}$ i $\frac{1}{10}$ częścią okręgu, a tém samém iest $\frac{1}{15}$ częścią okręgu. Więc cięciwa tego łuku będzie bokiem piętnastokąta foremnego w koło wpisanego.

Uwaga. 1. Wpisawszy w koło piętnastokąt foremny, łatwo będzie w to samo koło wpisać wielokąty foremne o 30, 60, 120 i t. d. bokach sposobem wyżéy podanym.

237. *Uwaga.* 2. W powyższych zagadnieniach podaliśmy sposób podzielenia okręgu, 1*ód* na części równych 3, 6, 12 i t. d. 2*re*, na 4, 8, 16 i t. d, 3*cie*, na 5, 10, 20 i t. d. 4*te*, na 15, 30, 60 i t. d.

Są także sposoby dzielenia okręgu na inne części równe a mianowicie na 25, 50, 100; 200, 400 i t. d. na 45, 90, 180, 360 i t. d. lecz sposoby te w Jeometryi Elementarnéy wyłożone być nie mogą.

238. Część $\frac{1}{360}$ okręgu zowie się *stopniém gradus.* Wprowadzono ten podział okręgu na stopnie dla łatwieyszego oznaczenia wielkości kątów, których miarą są łuki między ramionami zawarte, iakośmy powiedzieli wyżéy (118); a dla większéy dokładności każdy stopień dzieli się ieszcze na 60 części równych zwanych *minutami piérwszemi*, *minuta prima*, każda minuta na 60 części równych zwanych *sekundami*, *minuta secunda*; każda sekunda na 60 części równych zwanych *tercyami*, *minuta tertia* i t. d. Zero położone u góry z prawéy strony liczby iakiéy oznacza stopnie, a znamie iedno, dwa, trzy i t. d. takież położenie maiące, oznacza minuty, sekundy, tercye i t. d. *np.* łuk iakikolwiek $a=37°$, 15, 24, znaczy, że łuk ten ma stopni 37, minut 15, i sekund 24.

Ponieważ miarą kąta prostego iest czwarta część okręgu (119), więc kąt prosty ma 90 stopni; kąt roztwarty więcéy, a kąt ostry mniéy niż 90 stopni.

Można było inną iakąkolwiek część okręgu wziąść za stopień: zgodzono się iednak na część $\frac{1}{360}$ dla téy podobno przyczyny, że liczba 360 iest podzielona przez wszystkie liczby, zacząwszy od 1, aż do 10, wyłączywszy tylko liczbę 7.

Późniéy we Francyi przyięto inny podział okręgu na stopnie: $\frac{1}{400}$ część okręgu nazwano *grade* stopniem: setną część stopnia nazwano minutą, setną część minuty nazwano sekundą i t. d. W takim więc podziale kąt prosty ma 100 stopni; kąt roztwarty więcéy, a kąt ostry mniéy a niżeli 100 stopni: łuk *np.* iakikolwiek $a=24,91$, znaczy, że łuk ten ma stopni 24 i minut 91, podług nowego podziału.

Nowy ten podział w tém iest wygodny, że działania arytmetyczne z ułomkami dziesiętnemi nie wymagaią wiele pracy.

Wreszcie stopnie dawnego podziału łatwo być mogą obrócone na stopnie podziału nowego, i odwrotnie. Chcąc *np.* 72 stopnie podziału dawnego, obrócić na stopnie podziału nowego, trzeba ułożyć następuiącą proporcyą:

90: 100=72: X=80.

Podobnież chcąc *np.* 50 stopni nowego podziału obrócić na stopnie podziału dawnego, trzeba ułożyć następuiącą proporcyą:

100: 90=50: X=45. i t. d.

239. Powiedzieliśmy wyżéy (120), że w niektórych szczególnych przypadkach można kąt dany, a tém samém łuk będący miarą tego kąta podzielić na części równych 3, 5 i t. d. Zagadnienia poprzedzaiące ułatwią do tego drogę; trzeba tylko uważać iaką częścią całego okręgu iest dany łuk. Niechby *np.* dany łuk był 4tą częścią okręgu koła: bok dwunastokąta foremnego w to

koło wpisanego, byłby cięciwą 3ciéy części danego łuku, a bok dwudziestokąta foremnego w toż koło wpisanego byłby cięciwą 5tey części tegoż łuku. Gdyby łuk dany był 5tą częścią okręgu koła, bok piętnastokąta foremnego w to koło wpisanego byłby cięciwą 3ciéy części danego łuku i t. d.

240. Zagad. *Maiąc wiadomy bok wielokąta foremnego o iakiéykolwiek liczbie boków w koło wpisanego, znaleźć ważność boku innego wielokąta foremnego w toż koło wpisanego, który ma boków dwa razy więcéy niż wielokąt piérwszy,*

Rozw. Niech będzie AB fig. 124; bok wielokąta piérwszego, AM bok wielokąta drugiego. Przedłużywszy promień MS do N, i poprowadziwszy cięciwę AN, w tróykącie MAN prostokątnym przy A (127), i w którym AB iest prostopadła do MN (108), iest MN: AM = AM: MO (201). Więc $AM^2 = MN \times MO$. A że MN = 2MS, a MO = MS—SO; będzie więc.

$AM^2 = 2SM\ (MS—SO)$:—:—:—: A.

W tróykącie ASO prostokątnym przy O, iest $SO^2 = AS^2 - AO^2$ (168); czyli $SO^2 = MS^2 - (\frac{1}{2}AB)^2$: gdyż MS = AS, $AO = \frac{1}{2}AB$. Więc $SO = \sqrt{MS^2 - (\frac{1}{2}AB)^2}$. W równaniu zatém A zamiast SO położywszy znalezioną ważność, równanie to zamieni się w następuiące: $AM^2 = 2MS\ (MS - \sqrt{MS^2 - (\frac{1}{2}AB)^2}$.

Wziąwszy promień MS równy 1, będzie $AM^2 = 2(1 - \sqrt{1 - (\frac{1}{2}AB)^2})$; to iest: połowę boku danego wielokąta podnieść do kwadratu, kwadrat ten odiąć od 1, z pozostałéy reszty wyciągnąć pierwiastek kwadratowy, który odięty od 1 i rozmnożony przez 2, iloczyn ten będzie kwadratem boku wielokąta szukanego; a zatém piérwiastek tego kwadratu będzie ważnością tegoż boku.

Łuk AM w punkcie P podzieliwszy na dwie równe części, i poprowadziwszy dwie cięciwy AP, PM; cięciwy te byłyby dwoma przyległemi bokami wielokąta foremnego w koło wpisanego, maiącego boków dwa razy więcéy niż wielokąt drugi; i byłoby podług powyższego zagadnienia $AP^2 = 2(1 - \sqrt{1 - (\frac{1}{2}AM)^2})$; i tak daléy,

241. Zagad. *Maiąc wielokąt foremny o iakiéykolwiek liczbie boków ABCD i t. d. fig. 125 wkoło wpisany, opisać na tém kole drugi wielokąt podobny piérwszemu.*

Rozw. Ze środka koła S, spuściwszy promienie *Sa*, *Sb* i t. d. prostopadłe do boków wielokąta ABCDEF, i przez punkta *a*, *b*, *c*, i t. d. poprowadziwszy styczne koła GH, HI i t. d. aż do przecięcia się z sobą w punktach G, H, I, K i t. d. wielokąt GHI i t. d. będzie szukany: gdyż poprowadziwszy liniie SG, SH, SI i t. d. tróykąty SH*a*, SH*b* prostokątne przy *a* i b maią bok SH wspólny; bok S*a* = S*b*; więc przystaną do siebie (52), a w szczególności kąt HS*a*, = HS*b*, a zatém i miary tych kątów są równe; to iest, łuk B*a* = B*b*. Więc liniia SH przechodzi przez wiérzchołek kąta B. Tymże sposobem okazać można, że liniia SI przechodzi przez wierzchołek kąta C i t. d. Że zaś liniia GH iest równoległa od AB, gdyż obiedwie są prostopadłe do S*a*, i liniia HI równoległa od BC i t. d. będzie kąt GHI = ABC (65). Podobnież okazać można, że kąt HIK = BCD i t. d.

Więc kąty wielokąta opisanego równe są kątom wielokąta wpisanego. Nadto w dwóch tróykątach GSH, ASB podobnych, tudzież w drugich dwóch HSI, BSC podobnych, iest GH: AB=SH: SB, HI: BC=SH: SB; a że SH: SB=SH: SB, więc GH: AB=HI: CB.

W téy proporcyi następnik 1wszy AB równy iest następnikowi 2mu BC z założenia; więc i poprzedniki są równe: to iest, GH=HI. Tymże sposobem okazać można, że HI=IK, IK=KL i t. d. a zatém wielokąt GHI i t. d. ma boki wszystkie między sobą równe; iest foremny i podobny wielokątowi wpisanemu.

Sposób 2gi. Niech będzie wielokąt foremny ABC i t. d. w koło wpisany fig. 126. Poprowadziwszy promienie SA, SB, SC i t. d. i z końców A, B, C i t. d. tych promieni poprowadziwszy liniie GH, HI, IK i t. d. prostopadłe do tych promieni, i przecinaiące się z sobą w punktach H, I, K i t. d. wielokąt GK będzie szukany.

Gdyż w dwóch tróykątach ABG, BCH, bok AB=BC iako boki wielokąta foremnego; kąt BAG=CBH maią bowiem za miarę połowę łuków równych AB, BC (125), kąt ABG=BCH dla téyże przyczyny, więc dwa te tróykąty przystaną do siebie, a w szczególności kąt G=H.

Tymże sposobem okazać można, że dwa tróykąty BCH, CDI przystaną do siebie; będzie więc kąt H=I. Toż mówić o innych tróykątach; a zatém wielokąt GHIK i t. d. ma kąty równe.

Nadto tróykąty ABG, BCH, CDI i t. d. są równoramienne; gdyż kąty ich przy podstawach AB, BC, CD i t. d. są równe, iako maiące za miarę połowy łuków AB, BC i t. d. więc bok AG=BG, BH=CH i t. d. a że wszystkie te tróykąty mogą do siebie przystać, więc będzie AG=GB=BH=HC=CI i t. d. Że zaś każdy bok wielokąta opisanego GHIK i t. d. złożony iest z dwóch takowych liniy, więc wszystkie boki będą między sobą równe. Wielokąt zatém opisany GHIK i t. d. maiąc wszystkie kęty i boki równe, iest foremny.

242. *Uwaga.* Przez wszystkie wierzchołki kątów kwadratu ABCD fig. 122. w koło wpisanego poprowadziwszy styczne; utworzy się EFGH kwadrat na kole opisany, który iest kwadratem ze średnicy tegoż koła: gdyż bok tegoż kwadratu EF iest równy DB średnicy koła. A zatém kwadrat na kole opisany iest to samo co kwadrat ze średnicy.

243. *Odwrotnie.* Maiąc wielokąt foremny GHIK i t. d. fig. 125. opisany na kole, aby wpisać w to samo koło drugi wielokąt foremny podobny piérwszemu, wierzchołki kątów danego wielokąta złączmy ze środkiem koła liniiami SG, SH, SI i t. d. które okrąg przecinaią w punktach A, B, C i t. d. Punkta te połączywszy liniiami prostemi AB, BC i t. d. wielokąt AD będzie szukany: gdyż *1ód* tróykąty SGH, SHI, SIK i t. d. mogą do siebie przystać; a w szczególności kąty ich przy S są między sobą równe, więc i miary ich, to iest, łuki AB, BC, CD i t. d. są także równe, a tém samém i cięciwy AB, BC CD i t. d. będące bokami wielokąta szukanego, są między sobą równe. *2re.* Ponieważ GS=HS i AS=BS, więc GS: AS=HS: BS a zatém liniia AB iest równoległa od linii GH (179). Podobnymże sposobem okazać można, że liniia BC iest równo-

legła od HI. A zatém kąt ABC=GHI, iako zawarte między liniiami względem siebie równoległemi i w iednęż stronę rozchodzącemi się. Dlatéyże przyczyny kąt BCD=HIK i t. d, a że kąty GHI, HIK i t. d. są równe z założenia, więc i kąty ABC, BCD i t. d. będą sobie równe. Wielokąt zatém wpisany ABCD i t. d. maiąc boki i kąty równe, iest foremny.

Sposób 2gi. Niech będzie wielokąt foremny GHIK i t. d. fig. 126. opisany na kole: aby wpisać w to samo koło drugi wielokąt foremny podobny danemu, punkta zetknięcia się boków wielokąta danego z okręgiem, to iest punkta A, B, C i t. d. połączywszy liniiami prostemi AB, BC i t. d. wielokąt ABCD i t. d. będzie szukany: gdyż w dwóch tróykątach ABG, BCH; bok AG=BH, bok AG=HC iakośmy okazali w zagadnieniu poprzedzaiącém (241); kąt AGB=BHC z założenia: a zatém dwa te tróykąty przystaną do siebie, a w szczególności AB=BC. Tymże sposobem okazać można, przez przystanie dwóch tróykątów BCH i CDI, tudzież drugich dwóch CDI i DEK i t. d. że bok BC=CD, bok CD=DE i t. d. Boki zatém wielokąta ABCD i t. d. są między sobą równe: a tem samém i łuki AB, BC, CD i t. d, których boki te są cięciwami, są między sobą równe. A stąd wypada, że i kąt ABC =BCD: gdyż piérwszy z nich obeymuie ramionami swoiemi łuk AEC, drugi obeymuie ramionami swoiemiłuk BFD: te zaś dwa łuki są sobie równe, każdy bowiem z nich złożony iest ze 4 łuków między sobą równych. Podobnież okazać można; że kąt BCD=CDE, kąt CDE=DEF i t.d. Wielokąt zatém ABCD i t. d. maiąc wszystkie boki i kąty równe iest szukany.

244. Zagad. *Maiąc wiadomy bok AB, wielokąta foremnego ABCD i t.d. w koło wpisanego fig. 125. znaleźć ważność boku HG wielokąta GHI i t. d. na témże kole opisanego.*

Rozw. Poprowadziwszy *Sa* prostopadłą do AB, dwa tróykąty SA*m*, S*Ga* prostokątne przy *m* i *a*, i maiące kąt S spólny są podobne, więc *Sm*: *Sa*=A*m*: G*a*. Rozmnożywszy 2gi stosunek przez 2, będzie *Sm*: *Sa*=2A*m*: 2G*a*; czyli *Sm*: *Sa*= AB: HG. Więc:

$$GH = \frac{AB \times Sa}{Sm} \quad :—:—:—:—: \text{ A.}$$

W tróykącie AS*m* iest $Sm^2 = AS^2 - AM^2$ (168) czyli $Sm^2 = Sa^2 - (\frac{1}{2}AB)^2$; a zatém $Sm = \sqrt{Sa^2 - (\frac{1}{2}AB)^2}$. Ważność tę położywszy w równaniu A zamiast *Sm*, będzie:

$$GH = \frac{AB \times Sa}{\sqrt{Sa^2 - (\frac{1}{2}AB)^2}}$$

Taka iest ważność boku GH wielokąta foremnego na kole opisanego. Oznaczywszy bok AB wielokąta w koło wpisanego głoską a, bok HG wielokąta na kole opisanego głoską A, a promień *Sa* uczyniwszy = 1, będzie

$$A = \frac{a \times 1}{\sqrt{1 - (\frac{1}{2}a)^2}} = \frac{a}{\sqrt{1 - (\frac{1}{2}a)^2}}$$

Podobnież oznaczywszy głoską *b* bok wielokąta wpisanego maiącego dwa razy więcéy boków, niż wielokąt 1wszy wpisany, a głoska B bok wielokąta opisanego, maiącego dwa razy więcéy boków, niż wielokąt 1wszy opisany; będzie:

$$B=\frac{b}{\sqrt{1-(\frac{1}{2}b)^2}}$$ i t. d.

245. Twier. *Obwody wielokątów foremnych o iedney liczbie boków, są w stosunku promieni kół opisanych lub wpisanych, a ich powiérzchnie są w stosunku dwumnożnym tychże promieni.*

Dow. 1ód. Niech będą dwa wielokąty foremne o iedney liczbie boków ABCDEF, *abcdef* fig. 120. wpisawszy w nie i opisawszy na nich koła, których środki są S, *s*, poprowadźmy promienie SA, SB, SC i t. d. *sa*, *sb*, *sc* i t. d. W dwóch tróykątach ABS, *abs*, kąt ASB=*asb*, kąt SAB=*sab*: gdyż każdy z nich iest połową kąta w wielokącie: więc dwa te tróykąty są podobne. Będzie zatém SA: *sa*=AB: *ab*. Że zaś i obwody tych dwóch wielokątów maią się iak AB: *ab* (211); więc obwody te maią się także iak SA: *sa*: to iest, iak promienie kół opisanych.

2re. Z punktów S i *s* do boków AB i *ab* spuściwszy prostopadłe SM, *sm*, dwa tróykąty AMS *ams* prostokątne przy M, *m*, i w których kąt SAM=*sam*, są podobne; więc SA: *sa*=SM: *sm*; a że podług dowiedzenia, SA: *sa*=AB: *ab*; więc AB: *ab*=SM: *sm* a tém samém obwód iednego wielokąta, do obwodu drugiego, iak SM: *sm* czyli iak promienie kół wpisanych w te wielokąty; liniie bowiem SM, *sm* są promieniami kół wpisanych.

3cie. Ponieważ iest AB: *ab*=SA: *sa* i AB: *ab*=SM: *sm*; będzie więc AB^2: ab^2=SA^2: sa^2 i AB^2: ab^2=SM^2: sm^2: A że powiérzchnie tych wielokątów maią się do siebie iak AB^2: ab^2 (212), więc będą się też miały iak SA^2: sa^2, albo iak SM^2: sm^2, to iest iak kwadraty promieni kół opisanych lub wpisanych; czyli, powiérzchnie wielokątów foremnych o iednéy liczbie boków są w stósunku dwumnożnym promieni kół opisanych lub wpisanych.

246. Twierd. *Powiérzchnia wielokąta foremnego na kole opisanego ABCD i t. d. fig.* 120. *równa iest iloczynowi iego obwodu przez połowę promienia koła wpisanego w ten wielokąt.*

Dowod. Do wiérzchołków wszystkich kątów danego wielokąta poprowadziwszy promienie SA, SB, SC i t. d. powiérzchnia wielokąta podzielona będzie na tyle tróykątów mogących do siebie przystać ile wielokąt ma boków. Każdy z tych tróykątów *np.* ASB, biorąc w nim za podstawę bok wielokąta AB, ma za wysokość SM promień koła wpisanego. Będzie więc powiérzchnia tróykąta.

ASB=AB $\times \frac{1}{2}$ SM. Podobnież powierzchnia tróykąta

BSC=BC $\times \frac{1}{2}$ SM; gdyż SN=SM: a zatém powierzchnie tróykątów ASB+BSC=BE $\times \frac{1}{2}$ SM+BC $\times \frac{1}{2}$ SM, czyli ASC+BSC=(AB+BC) $\frac{1}{2}$ SM.

Tymże sposobem postępuiąc daléy, okażemy, że powiérzchnie wszystkich tróykątów składaiących powiérzchnią wielokąta danego, równa iest (AC+BC+CD+DE+EF) $\frac{1}{2}$ SM, to iest, powiérzchnia wielokąta ABCD i t. d. równa iest iloczynowi iego obwodu, przez połowę promienia koła w ten wielokąt wpisanego (*).

247. *Wniosek.* Stąd wypada, że kiedy iest kilka wielokątów foremnych o różnéy liczbie bo-

(*) *Prostopadła SM spuszczona ze środka koła w wielokąt foremny wpisanego, do boku tegoż wielokąta zowie się po grecku* Apothema.

ków, na iednemże kole opisanych, powierzchnie ich maią się do siebie, iak obwody: gdyż nazwawszy ieden wielokąt Q drugi q. obwód piérwszego O, 2go o, a promień koła na którém te wielokąty są opisane, czyli co na iedno wychodzi, promień koła w te wielokąty wpisanego nazwawszy R, będzie podług poprzedzaiącego twierdzenia $Q=\frac{1}{2}RO$; $q=\frac{1}{2}Ro$; a zatém $Q:q=\frac{1}{2}RO:\frac{1}{2}Ro$. Podzieliwszy drugi stosunek przez $\frac{1}{2}R$, będzie $Q:q=O:o$, to iest, wielokąty Q i q są do siebie iak ich obwody.

248. Twierd. *Powiérzchnia wielokąta foremnego w koło wpisanego, maiącego parzystą liczbę boków, równa iest iloczynowi połowy promienia koła opisanego przez obwód innego wielokąta foremnego w toż koło wpisanego, lecz maiącego dwa razy mniéy boków niż wielokąt dany.*

Dow. Niech będzie AD fig. 121. sześciokąt foremny w koło wpisany, ACE tróykąt foremny czyli równoboczny w toż koło wpisany. Poprowadziwszy promienie SA, SB, SC i t. d. w tróykącie SBA wziąwszy za podstawę SB, wysokością iego będzie AG prostopadła do SB(108); a zatém powiérzchnia tróykąta $SBA=AG\times\frac{1}{2}SB$. Podobnież powierzchnia tróykąta $SBC=CG\times\frac{1}{2}SB$. Więc $SBA+SBC=(AG+CG)\frac{1}{2}SB$; czyli powiérzchnia czworokąta $ABCS=AC\times\frac{1}{2}SA$.

Tymże sposobem okazać można, że powiérzchnia czworokąta $CDES=CE\times\frac{1}{2}SB$, i $AFES=EA\times\frac{1}{2}SB$. A zatém powiérzchnia wszystkich trzech czworokątów, czyli powiérzchnia sześciokąta $AD=(AC+CE+EA)\frac{1}{2}SB$; to iest, powiérzchnia sześciokąta foremnego w koło wpisanego; równa iest iloczynowi obwodu tróykąta równobocznego w toż koło wpisanego, przez połowę promienia koła opisanego.

Ten sam iest sposób dowodzenia, gdy wielokąt w koło wpisany ma inną iakąkolwiek liczbę parzystą boków. Oznaczywszy zatém głoską W obwód wielokąta foremnego o iakiéykolwiek liczbie boków w koło wpisanego, a promień koła opisanego głoską R; iloczyn $\frac{1}{2}RW$ oznaczać będzie powiérzchnią wielokąta foremnego w koło wpisanego. Uważać tu tylko potrzeba, że ieżeli W znaczy obwód tróykąta, kwadratu, pięciokąta i t. d. iloczyn $\frac{1}{2}RW$ wyrażać będzie w piérwszym przypadku powiérzchnią sześciokąta, w drugim powiérzchnią ośmiokąta, w 3cim powiérzchnią dziesięciokąta i t. d.

Gimnazjum męsk. im. J. I. Kraszewskiego w Ostrogu Wołyńskim

ROZDZIAŁ IX.

O powiérzchni koła i o stosunku okręgu do średnicy.

249. Wiadomości w Rozdziale V i innych wyłożone, dały nam poznać rozmaite własności koła, do znacznéy liczby twierdzeń o liniiach prostych, o kątach i wielokątach ścisły wpływ maiących. Lecz pozostała ieszcze do wyłożenia rzecz w dalszéy Jeometryi istotnie potrzebna to iest, czyby nie można iakowym sposobem zmierzyć okręgu koła i iego powiérzchni, ieżeli nie z taką dokładnością, z iaką mierzyć możemy liniie proste i płaszczyzny liniiami prostemi zakończone, to przynaymniéy z iak naywiększem do rzeczywistéy ważności przybliżeniem. Wiadomości w poprzedzaiącym Rozdziale podane o

wielokątach foremnych w koło wpisanych i opisanych na kole ułatwią nam do tego drogę.

250. Przypatrzywszy się z uwagą dwom wielokątom foremnym o iednakowéy liczbie boków, iednemu wkoło wpisanemu, drugiemu opisanemu na kole, postrzeżemy 1ód. że obwód opisanego większy iest, niż obwód wpisanego wielokąta: gdyż w tróykątach ABG, BCH i t. d. fig: 126. AG+BG>AB, BH+CH>BC i t. d. (22).

251. 2re. Podwaiaiąc ciągle iiczbę boków wielokąta wpisanego, i opisanego obwód piérwszego będzie się co raz powiększał, obwód zaś drugiego będzie się co raz zmnieyszał. Jakoż niech będzie fig. 127. *ab* bok wielokąta foremnego w koło wpisanego, *a*M, *b*M połowy dwóch boków przyległych wielokąta na kole opisanego. Poprowadziwszy promień S*m* prostopadły do *ab*, i cięciwy *am*, *bm*, tudzież liniią AB prostopadłą do S*m*: cięciwy *am*, *bm*, będą dwoma bokami przyległemi wielokąta wpisanego maiącego dwa razy więcéy boków niż wielokąt piérwszy wpisany: liniie zaś *a*A, A*m*, *m*B, B*b*, będą połowami boków wielokąta opisanego maiącego dwa razy więcéy boków, niż wielokąt opisany piérwszy.

W tróykącie *amb* iest *am*+*bm*>*ab* (22). to iest, summa dwoch boków wielokąta wpisanego drugiego, większa iest od iednego boku wielokąta piérwszego: a zatém summa wszystkich boków, czyli obwód wielokąta wpisanego drugiego większa iest od summy wszystkich boków, czyli obwodu wielokąta wpisanego piérwszego. Tymże sposobem okazać można, że obwód trzeciego wielokąta wpisanego maiącego dwa razy więcéy boków niż wielokąt drugi, większy iest od obwodu wielokąta drugiego i t. d.

Podobnież w tróykącie AMB iest AB<AM+MB; czyli A*m*+*m*B<AM+MB. Dodawszy po obu stronach *a*A+B*b*, będzie

*a*A+A*m*+*m*B+B*b*<*a*A+AM+MB+B*b*; czyli *a*A+A*m*+*m*B+B*b*<*a*M+M*b*, To iest, summa dwóch boków wielokąta opisanego drugiego mniéysza iest od boku wielokąta opisanego piérwszego. A zatém summa wszystkich boków, czyli obwód wielokąta drugiego mnieysza iest od summy wszystkich boków czyli od obwodu wielokąta piérwszego. Tymże sposobem okazać można, że obwód trzeciego wielokąta opisanego maiącego dwa razy więcéy boków niż wielokąt opisany drugi, mnieyszy iest od obwodu wielokąta drugiego i t. d.

252. 3cie: Kiedy więc obwód wielokąta wpisanego tém iest większy, im więcéy boków ma wielokąt, a obwód wielokąta opisanego tém iest mniéyszy, im więcéy boków ma wielokąt: idzie zatém, że im więcéy dwa te wielokąty maią boków, tém mniéysza zachodzi różnica między ich obwodami. Można nawet wpisać w koło i na niém opisać dwa wielokąty foremne o iednéyże liczbie boków takie, że różnica między ich obwodami mniéysza będzie od wszelkiéy ilości naznaczonéy. Gdyż ponieważ obwody wielokątów foremnych o iednéyże liczbie boków maią się do siebie iak promienie kół wpisanych (245), oznaczywszy obwód wielokąta MI fig. 126. głoską O, obwód zaś wielokąta AD głoską W, będzie O: W=S*m*: S*q*; a tém samém O—W: O=S*m*—S*q*: S*m*; czyli O—W: O=*mq*: S*m*.

A zatém $O-W=\frac{mq \times O}{Sm}$; czyli uczyniwszy

promień $Sm = 1$, $O - W = mq \times O$. W tém równaniu ieżeli mq równa się $\frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}$ i t. d. części promienia Sm czyli 1, iloczyn $mq \times O$ będzie równy $\frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}$ i t. d. części obwodu wielokąta opisanego, a tém samém $O - W$, czyli różnica między obwodami tych wielokątów, równa będzie $\frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}$ i t. d. części obwodu tegoż wielokąta opisanego.

Wziąwszy zatém mq. fig. 123. równą $\frac{1}{10}$ lub innéy iakiéykolwiek części promienia Sm, byleby tylko liniia ta mq była mniéysza od ilości naznaczonéy, co będzie zawsze rzeczą podobną do uskutecznienia, i przez punkt q poprowadziwszy cięciwę FG prostopadłą do Sm, gdyby cięciwa ta nie była bokiem wielokąta foremnego w koło wpisanego, dosyćby było podzielić okrąg tego koła na takie części równe, aby każda część mniéysza była od łuku EG. Daymy że taką częścią iest łuk ab, który przeniosłszy na łuk FG tak, aby promień Sm dzielił go w punkcie m na dwie równe części, i poprowadziwszy cięciwę ab; cięciwa ta będąca bokiem wielokąta foremnego w koło wpisanego, odetnie liniią mc mniéyszą od mq, a tém samém ieszcze bardziéy mnieyszą od ilości naznaczonéy, niż iest liniia mq.

Można więc różnicę między obwodami dwóch tych wielokątów uczynić mniéyszą od wszelkiéy ilości naznaczonéy, podwaiaiąc podług potrzeby liczbę boków wielokąta wpisanego.

253. *4te.* Obwód wielokąta wpisanego AD fig. 126. o iakiéykolwiek liczbie boków, zawsze iest mniéyszy od okręgu koła: gdyż zawsze liniie proste AB, BC i t. d. krótsze są od liniy krzywych czyli od łuków AmB, BnC i t. d. (5). Obwód zaś wielokąta opisanego MI, o iakiéykolwiek

liczbie boków, zawsze iest większy od okręgu koła: gdyż liniie złamane AGB, BHC i t. d. bardziéy od liniy prostych AB, BC i t. d. oddalone, dłuższe są niż liniie krzywe, czyli łuki AmB, BnC i t. d. mniéy oddalone od tychże liniy prostych AB, BC i t. d. Okrąg zatém koła co do swoiéy długości, środkuie między obwodem wielokąta opisanego i wpisanego. Kiedy więc różnica między obwodami dwóch tych wielokątów może być mniéysza od wszelkiéy ilości naznaczonéy; tém bardziéy różnica między okręgiem koła i obwodem iednego z tych dwóch wielokątów mnieysza być może od wszelkiéy ilości naznaczonéy; bo z trzech ilości nie równych różnica między naywiększą i naymniéyszą, zawsze iest większa, niż między średnią i naywiększą, lub między średnią i naymnieyszą.

254. *Twierd.* Jeżeli dwie wielkości nieodmienne A i B są takie, że można dowieść, iż ich różnica A—B iest mniéysza niż trzecia wielkość naznaczona ; tak mała, iak tylko być może: dwie te wielkości A i B są między sobą równe.

Dowod. Jakoż, gdyby dwie te wielkości nie były równe, tedy zachodziłaby między niemi różnica, którą oznaczywszy przez D, byłoby A—B=D, a tém samém byłaby rzecz nie podobna wziąć między niemi różnicę mniéyszą od D, co się sprzeciwia założeniu.

Uwaga. Trzeba się tu dobrze zastanowić nad tém, że w powyższém twierdzeniu dwie wielkości A i B są *nieodmienne*: gdyż można *np.* otrzymać wyrażenie $\sqrt{2}$ tak bliskie pierwiastku prawdziwego. że różnica między znalezionym a prawdziwym może być mnieysza od wszelkiéy

ilości naznaczonéy; a iednak pierwiastek znaleziony nigdy nie będzie równy prawdziwemu: lecz tu pierwiastek tylko prawdziwy liczby 2 iest ilością nieodmienną, pierwiastek zaś znaleziony iest ilością odmienną: bo za każdém przybliżeniem otrzymuiemy wypadek odmienny, wielkości zaś A i B są obiedwie nie odmienne.

255. Twierd. *Okręgi kół są do siebie w stosunku swoich promieni.*

Dow. W koła dane, których okręgi oznaczamy przez C, c, wpisawszy dwa wielokąty foremne o iedneyże liczbie boków, i obwody ich oznaczywszy głoskami W, *w*, a promienie kół głoskami R, *r*; ponieważ obwody wielokątów podobnych maią się iak promienie kół opisanych (245), będzie więc W: *w* = R: *r*, a tém samém $\frac{W}{w} = \frac{R}{r}$. Nadto można przynaymniéy w myśli sobie wystawić, że liczba boków w tych wielokątach iest tak wielka, iż różnica między obwodem każdego z nich a okręgiem koła opisanego iest mniéysza, niż wielkość iakakolwiek tak mała iak tylko być może. Kiedy więc $\frac{C}{c}$ iest stosunkiem dwóch okręgów, różnica między stosunkami $\frac{C}{c}$ i $\frac{W}{w}$ ieżliby iaka była, może być przywiedziona do takiego stopnia małości, do iakiego ią przywieść zechcemy. Że zaś ta sama różnica zachodziłaby między stosunkami $\frac{C}{c}$ i $\frac{R}{r}$,

gdyż $\frac{W}{w} = \frac{R}{r}$; wypada stąd iż można dowieść, że różnica między ilościami nieodmiennemi $\frac{C}{c}$ i $\frac{R}{r}$ iest mniéysza niż trzecia wielkość naznaczona tak mała iak tylko być może; będzie więc podług twierdzenia poprzedzaiącego $\frac{C}{c} = \frac{R}{r}$; czyli C: *c* = R: *r*.

Sposób. 2gi. Oznaczywszy okręgi dwóch kół głoskami C, *c*, a ich promienie R, *r*; trzeba dowieść że iest R: *r* = C: *c*: — : — : — A.

Dow. Jeżeli ta proporcya iest fałszywa, tedy ostatni iéy wyraz *c* iest albo za mały do uczynienia proporcyi, albo za wielki.

W *iszym* przypadku weźmy ilość *m* większą od *c*, i daymy na to, ieżeli być może, że ta proporcya iest prawdziwa:

R: *r* = C: *m*, w którey *m* > *c*.

Opiszmy na kole *c* wielokąt foremny taki, aby różnica między iego obwodem, który zwać będziemy *o*, i okręgiem *c* mniéysza była od różnicy między ilością *m* i tymże okręgiem *c*; to iest, aby było *o* — *c* < *m* — *c*. Dodawszy po obu stronach *c*, wypadnie *o* < *m*.

Opiszmy i na kole C wielokąt foremny podobny wielokątowi opisanemu na kole *c*. Ponieważ obwody wielokątów podobnych, maią się do siebie iak promienie kół wpisanych (245; oznaczywszy więc obwód 2go wielokąta głoską O, będzie R: *r* = O: *o*. A że z przypuszczenia iest R: *r* = C: *m*; więc złożywszy dwie te proporcye, wypadnie O: C = *o*: *m*.

W téy proporcyi drugi poprzednik *o* iest mniéyszy od swego następnika z doświadczenia: 1szy zaś poprzednik O, czyli obwód wielokąta opisanego, iest większy od swego następnika C, czyli od okręgu koła (253). Proporcya więc ta iest fałszywa. Lecz proporcya ta powstała ze złożenia dwóch proporcyy ią poprzedzaiących, z których 1wsza R: *r*=O: *o*, iest dowiedziona wyżéy; 2ga zatém R: *r*=C: *m*, musi być fałszywa. Nie może więc w proporcyi A ostatni wyraz *c* być za mały.

W przypadku 2gim, ieżeli ostatni wyraz *c* w proporcyi A iest za wielki, weźmy ilość *n* mniéyszą od *c* i daymy na to, ieżeli być może, że ta proporcya iest prawdziwa, R: *r* = C: *n*, w któréy *n*<*c*.

W piszmy w koło *c* wielokąt foremny o takiéy liczbie boków, aby różnica między okręgiem c i obwodem tego wielokąta zwanym *w*, mniéysza była od różnicy między okręgiem *c* i ilością *n*; to iest aby było *c*—*w*<*c*—*n*. Dodawszy po obu stronach *w* i *n*, a odiąwszy c, zostanie *n*<*w*.

Wpiszmy w koło C wielokąt foremny podobny wielokątowi wpisanemu w koło *c*. Ponieważ obwody wielokątów podobnych maią się do siebie iak promienie kół opisanych; oznaczywszy więc obwód wielokąta w koło C wpisanego głoską W, będzie: R: *r*=W: *w*. A że podług przypuszczenia iest R: *r*=C: *n*; złożywszy zatém dwie ostatnie proporcye, będzie C: W=*n*: *w*.

W téy proporcyi 2gi poprzednik *n* mnieyszy iest od swego następnika *w* z dowiedzenia; 1wszy zaś poprzednik C to iest okrąg koła, większy iest od swego następnika W, to iest, od obwodu wielokąta w toż koło wpisanego: proporcya więc ta iest fałszywa. Lecz proporcya ta powstała ze złożenia dwóch proporcyy ią poprzedzaiących, z których 1sza R: *r* = W: *w*, iest wyżéy dowiedziona: 2ga zatém R: *r*=C: *n*, musi być fałszywa. Nie może więc ostatni wyraz *c* proporcyi A być za wielki.

Albo tak: Jeżeli w 2gim przypadku wyraz 4ty *c* proporcyi A iest za wielki, tedy albo wyraz ten potrzeba zmnieyszyć; albo też powiększyć wyraz 3ci C, co wychodzi na iedno; a na ten czas w proporcyi A odmieniwszy mieysce wyrazom, byłoby *r*: R=c: *m*, gdzie *m*>C, co podług 1go przypadku być nie może; a tém samém ostatni wyraz *c* proporcyi A nie może być za wielki.

A kiedy wyraz ten *c* nie iest ani za mały, ani za wielki do uczynienia proporcyi A; więc iest taki iak być powinien, a tém samém proporcya ta iest prawdziwa: to iest, okręgi kół maią się iak ich promienie.

256. *Wnioski.* Stąd wypada 1ód, że okręgi kół maią się także iak średnice: gdyż w powyższéy proporcyi C: *c* = R: *r* rozmnożywszy 2gi stosunek przez 2, będzie C: *c*=2R: 2*r*; a że 2R i 2*r* znaczą średnice tych kół, więc oznaczywszy średnice głoskami S i *s*, będzie C: *c*=S: *s*.

257. 2re Dwa łuki AB, *ab*, fig. 120. kół nierównych, będące miarą dwóch kątów ASB, *asb*, równych, które się zowią *łukami podobnemi*, są do siebie także w stosunku promieni lub średnic kół do których należą: gdyż ponieważ kąty ASB, *asb* są równe, więc iaką częścią 4 kątów prostych iest kąt 1szy, taką częścią 4 kątów prostych iest kąt 2gi; a tém samém iaką częścią okręgu swego iest łuk AB będący miarą kąta ASB, taką częścią okręgu swego iest łuk *ab*

będący miarą kąta *asb*: Łuki więc te są do siebie w stosunku swoich okręgów: a że okręgi maią się iak ich promienie lub średnice, więc i łuki AB, *ab* maią się iak promienie lub średnice kół do których należą.

258. 3*cie*. Z tego także twierdzenia wypada, że gdyby wiadomy był stosunek okręgu iednego tylko koła do iego promienia lub średnicy, iuż tém samém byłby wiadomy stosunek okręgu każdego innego koła do iego promienia lub średnicy. Jakoż niech π oznacza ten stosunek wiadomy; czyli co na iedno wychodzi, niech π będzie okrąg koła którego średnica iest 1; niech C oznacza okrąg innego koła, którego promień iest R, będzie podług poprzedzaiącego twierdzenia

1: π=2R: C, więc C=2πR.

Gdyby więc stosunek π czyli okrąg koła maiącego za średnicę 1 był wiadomy, łatwo byłoby znaleźć okrąg C każdego innego koła, którego promień R iako liniia prosta może być zawsze wiadomy. Idzie więc tylko o znalezienie stosunku okręgu iednego koła do średnicy: ułatwi to następuiące zagadnienie.

259. Zagad. *Znaleźć stosunek przybliżony okręgu do średnicy.*

Rozw. Ażeby to zagadnienie rozwiązać potrzeba 1*ód* wpisać w koło wielokąt foremny taki, aby stosunek obwodu iego do średnicy był wiadomy.

2*re*. Opisać na kole wielokąt podobny wpisanemu (241).

3*cie*. Za pomocą wiadomego boku wielokąta wpisanego wyrachować naprzód bok, a potém obwód wielokąta opisanego (244).

4*te*. Podwoiwszy liczbę boków obu tych wielokątów, wyrachować naprzód bok i obwód wielokąta drugiego wpisanego (240), potém bok i obwód wielokąta drugiego opisanego.

5*te*. To ostatnie działanie powtórzywszy kilkanaście razy, gdy nakoniec znaydziemy dwie liczby, iednę mniéyszą wyrażaiącą obwód wielokąta wpisanego, drugą większą wyrażaiącą obwód wielokąta opisanego, takie, że ich różnica iest bardzo mała; na ten czas liczba środek między niemi trzymaiąca, to iest, większa od ważności obwodu wielokąta wpisanego, a mnieysza od ważności obwodu wielokąta opisanego, może być wzięta za ważność okręgu, który co do długości swoiéy, trzyma środek między obwodami dwóch tych wielokątów (253). Ważność tę porównawszy z ważnością średnicy, otrzymamy stosunek przybliżony okręgu koła do średnicy.

Wpiszmy *np.* w koło sześciokąt foremny; ponieważ bok tego sześciokąta równy iest promieniowi koła opisanego (229), wziąwszy więc promień koła =1; obwód sześciokąta wpisanego będzie 6.

Oznaczywszy bok sześciokąta wpisanego *a*, opisanego A, bok 12 kąta wpisanego *b*, opisanego B, bok 24 kąta wpisanego *c*, opisanego C, i tak daléy; będzie podług tego cośmy powiedzieli wyżéy (244), $A = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{4}}}$.

Że zaś $1-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}(4-1)=\frac{1}{4}\times 3$; a wyciągaiąc pierwiastek z iloczynu trzeba go wyciągnąć z każdego czynnika; gdy więc w iloczynie $\frac{1}{4}\times 3$ czynnik $\frac{1}{4}$ iest kwadratem, którego piérwiastek iest $\frac{1}{2}$, powyższe równanie zamieni się

w następuiące: $A=\frac{1}{\frac{1}{2}\sqrt{3}}$; rozmnożywszy licznik i mianownik przez 2, będzie $A=\frac{2}{\sqrt{3}}$ a tém samém:

$6A=\frac{12}{\sqrt{3}}$; i ta iest ważność obwodu 6kąta opisanego; a że obwód sześciokąta wpisanego iest 6; więc okrąg koła będzie większy od 6, a mnieyszy od $\frac{12}{\sqrt{3}}$.

Podobnież podług zagadnienia podanego wyżéy (240), będzie bok 12kąta wpisanego, czyli $b=\sqrt{2\,(1-\sqrt{1-\frac{1}{4}}}=\sqrt{2\,(1-\frac{1}{2}\sqrt{3})}$ $=\sqrt{2-\frac{2}{2}\sqrt{3}}=\sqrt{2-\sqrt{3}}$; a tém samém obwód 12kąta wpisanego, czyli $12b=12\sqrt{2-\sqrt{3}}$; i t. d.

Wyciągnąwszy pierwiastek z liczby 3 będzie $\sqrt{3}=1{,}732050807568877$; przez pierwiastek ten podzieliwszy 12, będzie obwód 6kąta opisanego, czyli $6A=6{,}928203230275$.

Tenże pierwiastek liczby 3 odiąwszy od 2, zostanie 0,267949192431123; z czego wyciągnąwszy pierwiastek kwadratowy, będzie

$b=0{,}517638090205$; pierwiastek ten rozmnożywszy przez 12, będzie obwód 12kąta wpisanego, czyli $12b=6{,}211657082460$.

Tym sposobem postępuiąc daléy, znaydziemy obwody wielokątów wpisanych i opisanych,

począwszy od 6kątów, aż do wielokątów maiących po 12288 boków, iak wyraża następuiąca tablica.

6	a	$=6{,}0000000.$	6	A	$=6{,}9282032.$
12	b	$=6{,}2116571.$	12	B	$=6{,}4307806.$
24	c	$=6{,}2652572.$	24	C	$=6{,}3193199.$
48	d	$=6{,}2787004.$	48	D	$=6{,}2921724.$
96	e	$=6{,}2820639.$	96	E	$=6{,}2854292.$
192	f	$=6{,}2829049.$	192	F	$=6{,}2837461.$
384	g	$=6{,}2831152.$	384	G	$=6{,}2833260.$
768	h	$=6{,}2831678.$	768	H	$=6{,}2832203.$
1536	i	$=6{,}2831809.$	1536	I	$=6{,}2831941.$
3072	k	$=6{,}2831842$	3072	K	$=6{,}2831875.$
6144	l	$=6{,}2831850.$	6144	L	$=6{,}2831858.$
12288	m	$=6{,}2831852.$	12288	M	$=6{,}2831853.$

Widzimy tu iak obwody wielokątów tych coraz się bardziéy do siebie przybliżaią, tak dalece, że różnica między obwodami dwóch wielokątów ostatnich maiących po 12288 boków, równa się tylko dwom iednościom dziesiętnym siodmego rzędu. A że okrąg koła większy iest od obwodu wielokąta wpisanego, a mnieyszy od obwodu wielokąta opisanego: liczba więc trzymaiąca środek między ważnościami dwóch tych obwodów, to iest liczba 6,2831853 może być naznaczona za ważność okręgu koła, którego promień iest 1. Stosunek zatém okręgu do średnicy będzie 2: 6,2831853, czyli podzieliwszy obadwa wyrazy przez 2, będzie 1: 3,1415926. A zatém 3,1415926 iest ważnością stosunku przybliżonego, którymy wyżéy oznaczyli przez π (258).

W działaniach nie wymagaiących ścisłéy dokładności, można przestać na dwóch liczbach dziesiętnych: będzie więc stosunek średnicy do

okręgu 1: 3, 14. czyli rozmnożywszy przez 100 oba wyrazy, iak 100: 314.

Archimedes wpisawszy w koło i opisawszy na niém dwa wielokąty foremne o 96 bokach, znalazł, że okrąg koła iest mnieyszy od $3\frac{10}{70}$, a większy od $3\frac{10}{71}$. Podług tego więc rachunku będzie stosunek średnicy do okręgu 1: $3\frac{20}{140}$ czyli obróciwszy całkowitą na ułomek, obadwa wyrazy rozmnożywszy przez 70, a potém ie podzieliwszy przez 10; będzie stosunek średnicy do okręgu 7: 22. Późniéy dokładność w téy mierze posunięto daléy; lecz ze wszystkich stosunków wiadomych dwa następuiące, pod względem dokładności, zasługuią na szczególną uwagę: 1szy 113: 355; 2gi 1250: 3927.

260. *Twierd.* Jeżeli są trzy wielkości A, B, X, z których A iest odmienną, ale zawsze większą od B, i od X, które są nieodmienne, lecz takie, że A może być razem do B i do X tak przybliżoną iak się podoba, czyli że różnica tak między A i B, iako też między A i X, może być mniéysza od wszelkiéy wielkości naznaczonéy; będzie B=X.

Jakoż ieżeli X>B, będzie

A>X z założenia, X> B z przypuszczenia: kiedy więc różnica między A i B, może bydź mniéysza od wszelkiéy wielkości naznaczonéy, iakośmy założyli, tém bardziéy różnica między X i B może być mniéysza od wszelkiéy wielkości naznaczonéy.

Jeżeli B> X będzie

A>B z założenia, B>X z przypuszczenia, kiedy więc różnica między A i X może być mniéysza od wszelkiéy wielkości naznaczonéy, iakośmy założyli, tém bardziéy różnica między B i X,

może być mniéysza od wszelkiéy wielkości naznaczonéy.

Dwie zatém wielkości nie odmienne B, X, są takie, że różnica między niemi może być mnieysza od wszelkiéy wielkości naznaczonéy, a tém samém B=X (254).

261. Twierd. *Powierzchnia koła równa iest iloczynowi iego okręgu przez połowę promienia*; czyli oznaczywszy powiérzchnią koła głoską X, trzeba dowieść, że X=$\frac{1}{2}$RC.

Dowod. Opisawszy na kole wielokąt foremny o iakiéykolwiek liczbie boków, i obwód iego oznaczywszy głoską O; powierzchnia tego wielokąta równać się będzie iloczynowi $\frac{1}{2}$RO(246). Iloczyn ten $\frac{1}{2}$RO, wyrażaiący powierzchnią wielokąta opisanego, większy iest tak od powierzchni koła oznaczonéy głoską X, iako też od iloczynu $\frac{1}{2}$RC: gdyż zawsze będzie O>C. Lecz przez ciągłe podwaianie liczby boków, można będzie nakoniec otrzymać wielokąt opisany taki, że różnica między obwodem O i okręgiem koła C, a tém samém między iloczynem $\frac{1}{2}$RO i $\frac{1}{2}$RC, może być mniéysza od wszelkiéy ilości oznaczonéy (253). Podobnież różnica między powiérzchnią tego wielokąta i powiérzchnią koła, może być mniéysza od wszelkiéy wielkości naznaczonéy.

Trzy więc te ilości $\frac{1}{2}$RO, $\frac{1}{2}$RC; i prawdziwa powiérzchnia koła X, są zupełnie takie, o iakich mówiliśmy wyżéy (260): będzie więc X=$\frac{1}{2}$RC.

Sposób 2gi. Jeżeli to równanie X=$\frac{1}{2}$RC iest fałszywe, to iest, ieżeli powiérzchnia koła nie iest równa iloczynowi okręgu przez połowę promienia, tedy iloczyn ten iest albo mniéyszy, albo większy od powiérzchni koła.

W 1szym przypadku ieżeli iloczyn $\frac{1}{2}$ RC iest mniéyszy od powiérzchni koła, weźmy ilość M większą od C, i daymy na to, ieżeli być może, że powiérzchnia koła równa się iloczynowi $\frac{1}{2}$ RM, czyli że iest $X=\frac{1}{2}RM$.

Opiszmy na kole daném wielokąt foremny o takiéy liczbie boków, aby różnica między iego obwodem, który oznaczamy głoską O, i okręgiem C mniéysza była, niż iest między ilością M i tymże okręgiem C; to iest, aby było $O-C<M-C$. Dodawszy po obu stronach C, będzie $O<M$. Rozmnożywszy obie strony przez $\frac{1}{2}$ R, będzie $\frac{1}{2}RO$ mniéysze od $\frac{1}{2}RM$; a że podług przypuszczenia $X=\frac{1}{2}RM$ więc będzie $\frac{1}{2}RO<X$: to iest, iloczyn obwodu wielokąta opisanego przez połowę promienia koła wpisanego, czyli powiérzchnia wielokąta opisanego (246), mnieysza iest od powiérzchni koła, co być nie może. A zatém i to być nie może, aby iloczyn $\frac{1}{2}$ RC był mniéyszy od powiérzchni koła.

W 2gim przypadku, ieżeli iloczyn $\frac{1}{2}$RC iest większy od powiérzchni koła, weźmy ilość N mniéyszą od C, i daymy na to, ieżeli być może, że $X=\frac{1}{2}RN$.

Wpiszmy w koło dane wielokąt foremny o takiéy liczbie boków, aby różnica między okręgiem C i obwodem tego wielokąta oznaczonym głoską W, mniéysza była od różnicy między okręgiem C i ilością N, to iest aby było $C-W<C-N$. Dodawszy po obu stronach W i N. a odiąwszy C, będzie $N<W$. Rozmnożywszy obie strony przez $\frac{1}{2}$ R, będzie $\frac{1}{2}RN<\frac{1}{2}RW$. A że podług przypuszczenia $X=\frac{1}{2}RN$, będzie więc $X<\frac{1}{2}RW$; to iest, powiérzchnia koła mniéysza iest od powiérzchni wielokąta w toż koło wpianego co być nie może. Więc i to być

nie może, aby iloczyn $\frac{1}{2}$ RC był większy od powiérzchni koła.

Kiedy więc iloczyn $\frac{1}{2}$ RC nie może być ani mnieyszy, ani większy od powiérzchni koła, musi być zatém iéy równy.

262. *Wniosek.* 1. Oznaczywszy przez π okrąg koła, którego średnica $= 1$, promień przez R, przez C okrąg innego iakiegokolwiek koła; będzie (258) $\pi : 1 = C : 2R$; więc

1*ód.* $C = 2\pi R$;

$$2re.\ \pi = \frac{C}{2R}.$$

Piérwsze z dwóch ostatnich równań okazuie, że okrąg wszelkiego koła równa się liczbie π rozmnożonéy przez średnicę tego koła; Równanie drugie ostrzega, że liczba π równa się stosunkowi przybliżonemu okręgu do średnicy. A że stosunek ten przybliżony równy iest $\frac{3\,4\,1}{1\,0\,0}$; albo $\frac{1\,1\,3}{3\,5\,5}$ albo $\frac{2\,2}{7}$; i t. d. (259); Więc okrąg wszelkiego koła z łatwością wyrachować można w liczbach, kładąc zamiast niewiadomego okręgu C iego ważność $2\pi R$ a zamiast π którąkolwiek z liczb wyrażaiących przybliżony stosunek okręgu do średnicy.

263. *Wniosek.* 2. Ponieważ podług Nru poprzedzaiącego iest $C = 2\pi R$, rozmnożywszy obie strony równania tego przez $\frac{1}{2}$R, będzie

$$\tfrac{1}{2}RC = \pi R^2.$$

To iest: powiérzchnia koła iakiegokolwiek, równa się liczbie oznaczonéy przez π rozmnożonéy przez kwadrat promienia tego koła. Trzeba to dobrze uważać, że wyrażenia πa^2, πb^2, πs^2, πw^2 i t. d. oznaczaią powiérzchnie kół wykréślonych promieniem a,b,s,w. i t. d.

264. *Wniosek* 3. Niech będzie powiérzchnia iednego koła danego X, drugiego x, promień piérwszego = R promień drugiego = r, będzie podług Nru poprzedzaiącego

$$X = \pi R^2 , \quad x = \pi r^2 ; \text{ więc}$$

$X : x = \pi R^2 : \pi r^2$ podzieliwszy drugi stosunek przez π, wypadnie $X : x = R^2 : r^2$. To iest: powiérzchnie dwóch kół maią się iak kwadraty z ich promieni, a tém samém iak kwadraty z ich średnic.

265. *Wniosek.* 4. Niech będzie część koła APMS fig. 124, między dwoma promieniami AS, MS i łukiem APM zawarta, która się zowie *wycinkiem* koła, *sector circuli*: ieżeli powiérzchnia tego wycinka iest $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$, i t. d. częścią powiérzchni koła, łuk też wycinka APM będzie, $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ i t. d. częścią okręgu tegoż koła (117). Powiérzchnia zatém wycinka APMS tak się ma do powiérzchni koła, iak łuk wycinka APM do okręgu koła; czyli oznaczywszy powiérzchnią koła przez X, iego okrąg przez C, a promień przez R, będzie APMS : X = APM : C. Rozmnożywszy wyrazy 2go stosunku przez $\frac{1}{2}$R, będzie:

$$APMS : X = \tfrac{1}{2}R \times APM : \tfrac{1}{2}RC.$$

W téy proporcyi następnik 1wszy X, to iest, powiérzchnia koła danego, równy iest następnikowi 2mu $\frac{1}{2}$RC, to iest iloczynowi okręgu przez połowę promienia; a zatém i poprzednik 1wszy APMS równy być musi poprzednikowi 2mu $\frac{1}{2}$R $\times$ APM; to iest, powiérzchnia wycinka koła, równa iest iloczynowi łuku tegoż wycinka, przez połowę promienia.

266. Powierzchnia odcinka APMA, iest różnicą między powierzchnią wycinka APMS, i powierzchnią tróykąta AMS, powiérzchnia drugiego odcinka AMNA, iest różnicą między powiérzchnią koła i powiérzchnią odcinka APMA. A zatém powiérzchnie tych dwóch odcinków, mogą być łatwo wyrachowane.

267. Zagad. *Wykréślić koło któregoby powiérzchnia równa była summie lub różnicy powiérzchni dwóch kół danych.*

Rozw. W przypadku 1szym wykréślić tróykąt prostokątny i dać mu za boki przyległe kątowi prostemu promienie dwóch kół danych; przeciw prostokątna będzie promieniem koła szukanego. W przypadku 2gim wykréślić tróykąt prostokątny, i dać mu za iedno ramie kąta prostego promień koła mnieyszego, a za przeciw-prostokątną promień koła większego: drugi bok kątowi przyległy prostemu będzie promieniem koła szukanego.

Dowodzenie zupełnie iest takie, iakiego użyliśmy wyżéy (213), mówiąc o wielokątach podobnych, których powiérzchnie są do siebie w stosunku dwumożnym boków odpowiadaiących, tak iak powiérzchnie kół są do siebie w stosunku dwumożnym promieni.

268. *Uwaga.* Gdyby dwa dane koła były między sobą równe, trzecie koło znalezione równe summie ich powiérzchni byłoby od iednego z nich dwa razy większe. W ogólności można znaleźć koło 3, 4, 5 i t. d. razy większe od koła danego tym samym sposobem iakiśmy podali wyżéy (165), na znalezienie kwadratu 3, 4, 5 i t. d. razy większego niż kwadrat dany.

269. Zagad. *Maiąc dane koło; wykréślić drugie spółśrodkowe z danem, któregoby powiérzchnia była trzy razy mnieysza od powiérzchni koła danego.*

Rozw. Między całym promieniem koła danego i 3cią iego częścią znaleźć średnią ieometrycznie proporcyonalną (203); ta będzie promieniem koła szukanego. Daymy że AB fig. 98. iest promieniem koła danego, AD 3cia część tego promienia; liniia AC średnio ieometrycznie proporcyonalna między AB i AD iest promieniem koła szukanego: gdyż podług wykréślenia iest AB: AC=AC: AD: czyli zamiast liniy położywszy ich ważności w liczbach, będzie $3 : \sqrt{3} = \sqrt{3} : 1$. Więc AB: AC=3: $\sqrt{3}$; a tém samém $AB^2 : AC^2 = 9 : 3$: gdyż $\sqrt{3} \times \sqrt{3} = 3$, Że zaś powiérzchnie kół maią się iak kwadraty z promieni, oznaczywszy zatém powiérzchnią koła danego przez X, powierzchnią koła znalezionego przez x, będzie

X: x=AB^2 : AC^2; czyli

X: x=9: 3.

W téy proporcyi następnik 2gi, iest 3 razy mnieyszy od swego poprzednika; więc i następnik 1wszy x iest 3 razy mnieyszy od swego poprzednika X; to iest, powiérzchnia koła znalezionego iest 3 razy mniéysza od powiérzchni koła danego.

Tym samym sposobem postępuiąc, łatwo będzie rozwiązać dwa następuiące zagadnienia:

1ód. *Maiąc dane koło znaleźć drugie spółśrodkowe z daném, któregoby powiérzchnia była tyle razy mnieysza lub większa od powierzchni danego, ile się podoba.*

2re. *Dane koło podzielić kołami spółśrodkowemi na tyle równych części, na ile się podoba.*

270. Twierd. *Różnica powierzchni dwóch kół spółśrodkowych, równa iest prostokątowi maiącemu za wysokość różnicę dwóch promieni a za podstawę liniią prostą równą okręgowi koła wykréślonego promieniem równaiącym się połowie summy promieni dwóch danych kół spółśrodkowych.*

Dowód. Niech będą SC, Sc fig. 128 promienie dwóch kół spółśrodkowych. Daymy że liniia prosta CE prostopadła do SC, równa iest okręgowi C koła większego. Poprowadziwszy liniią prostą SE, i z punktu c liniią *ce* równoodległą od CE, aż do przecięcia się z liniią SE w punkcie *e*, w dwóch tróykątach SCE, *Sce* podobnych iest SC: *Sc* = CE: *ce*; czyli SC: *Sc* = C: *ce*: gdyż

$$CE = C$$

podług wykréślenia, a zatém $ce = \frac{Sc \times C}{SC}$

Aże okręgi kół maią się iak promienie (255); oznaczywszy więc przez *c* okrąg koła wykréślonego promieniem *Sc*, będzie SC: *Sc* = C: *c*; a zatém $c = \frac{Sc \times C}{SC}$

Z dwóch ostatnich równań wypada, że $ce = c$, to iest, że liniia *ce* równa się okręgowi koła wykréślonego promieniem *Sc*.

Powierzchnia tróykąta $SCE = \frac{1}{2} SC \times CE$ (149): Powierzchnia tróykąta $Sce = \frac{1}{2} Sc \times ce$. Że zaś CE równa się okręgowi koła wykréślonego promieniem SC podług założenia, a *ce* równa się okręgowi koła wykréślonego promieniem *Sc* podług dowodzenia, powierzchnia zaś koła równa iest iloczynowi iego okręgu przez połowę promienia (261); powierzchnia zatém tróykąta SCE

równa iest powierzchni koła większego, powierzchnia tróykąta *Sce* równa iest powierzchni koła mnieyszego, a tém samém różnica między powierzchniami dwóch tych tróykątów, to iest, czworobok *CceE* iest równy różnicy między powierzchniami dwóch danych kół spółśrodkowych.

Podzieliwszy liniią Cc w punkcie *ć* na dwie równe części i poprowadziwszy liniią *ćé* równoodległą od CE, aż do przecięcia się z liniią SE w punkcie *é*; przez punkt *é* poprowadźmy liniią *Bb* prostopadłą do CE, przecinaiącą się w punkcie *b* z liniią *ce*: prostokąt *CcbB* równy iest co do powierzchni czworobokowi *CceE*: gdyż dwa prostokątne tróykąty *ebé*, *éBE*, maiące kąty przy *é* równe i boki *bé Bé* równe (78), mogą do siebie przystać (26). Prostokąt zatém *CcbB* równy iest różnicy dwóch kół spółśrodkowych.

Prostokąt ten ma za wysokość liniią Cc, która iest różnicą dwóch promieni, a za podstawę liniią CB=*cb*, która iest równa okręgowi *ć* koła wykréślonego promieniem *Sć*; co tym samym sposobem okazać można, iakim okazaliśmy, że liniia *ce* iest równa okręgowi koła wykréślonego promieniem Sc. Idzie więc tylko o to, aby okazać, że promień *Sć* iest równy połowie summy dwóch promieni SC i *Sc*; co iest łatwo okazać przedłużywszy SC do A tak aby CA=*Sc*, i zważywszy, że z dwóch ilości nierównych, iakiemi tu są promienie SC i *Sc*, mnieysza równa iest połowie ich summy mniéy połową ich różnicy, większa równa połowie ich summy więcéy połową ich różnicy

Uwaga. Wszelka ilość równaiąca się połowie summy dwóch ilości innych iest między niemi średnią arytmetycznie proporcyonalną. Poprzedzaiące zatém twierdzenie można inaczéy tak wysłowić:

Różnica powierzchni dwóch kół spółśrodkowych, równa iest prostokątowi maiącemu za wysokość różnicę dwóch promieni, a za podstawę liniią prostą równą okręgowi koła wykréślonego promieniem średnio arytmetycznie proporcyonalnym między promieniami dwóch danych kół spółśrodkowych.

TRYGONOMETRYA

PROSTOKREŚLNA.

1. Z twierdzeń o przystawaniu i z zagadnień o kreśleniu tróykątów prostokreślnych, to iest liniiami prostemi zakończonych, łatwo wnieść można, że ieżeli z sześciu części tróykąta, któremi są iego boki i kąty, trzy części są wiadome, drugie trzy mogą być wyznaczone, i tróykąt może być wykreślony, byleby ieden bok przynaymniey znaydował się między częściami wiadomemi. Lecz kreślenie tróykątów zależące od większéy lub mnieyszéy wprawy i dokładności narzędzi do tego używanych, podlega rozmaitym uchybieniom, na których sprostowanie Jeometrya nie może podać żadnych prawideł, kiedy nawet liniia prosta nie może być tak wykréślona, aby nie miała żadnéy szerokości; gdy tym czasem w rachunku arytmetycznym wszelkie omyłki bez trudności poprawić można.

Dla dopełnienia więc nauki o tróykątch prostokréślnych, na które wszelkie inne wielokąty podzielone i zamienione być mogą, wypada do wykréślenia ieometrycznego przydać rachunek arytmetyczny, aby z trzech części tróykąta wyrażonych liczbami, drugie trzy części liczbami także wyrażone być mogły z taką dokładnością, do iakiéy tylko rachunek algiebraiczny doprowadzić można. Część Jeometryi podaiąca na to sposoby, zowie się *Trygonometryą prostokreślną*.

II. Niech będzie tróykąt ABC fig. 102 w rym wiadome są kąty A, B, i bok AB. Weźmy inny *abc*, którego wszystkie części są wiadome, i w którym kąt $a = A$, $b = B$: więc dwa te tróykąty są podobne (190), a zatém

$ab : AB = ac : AC$. $ab : AB = bc : BC$. Więc

$$AC = \frac{AB \times ac}{ab}; \quad BC = \frac{AB \times bc}{ab}.$$

Jeżeli więc *ab*, *ac*, *bc* i AB są wyrażone w liczbach, znaydziemy także w liczbach boki AC i BC; a że dwa te tróykąty są równokątne, kiedy więc kąty tróykąta *abc* są wiadome, będą także wiadome kąty tróykąta ABC a tym sposobem wszystkie części tróykąta ABC są wiadome i mogą być wyrażone w liczbach, czyli iak odtąd mówić będziemy, tróykąt ABC iest *rozwiązany*.

III. Stąd się okazuie, że gdybyśmy mieli ciąg tróykątów, którychby kąty miały wszelką ważność iaką tylko mieć mogą, i którychby wszystkie części były wiadome; w ciągu tym musiałby się znaydować ieden tróykąt równokątny z tróykątem danym do rozwiązania, za pomocą którego tróykąt dany moglibyśmy rozwiązać sposobem wyżéy okazanym.

Abyśmy ciąg taki tróykątów ułożyli, dosyć będzie uważać tróykąty prostokątne, na które wszystkie inne podzielone być mogą przez spuszczenie prostopadłéy z wierzchołka kąta naywiększego na bok przeciwny. Wszystkie takie tróykąty mogą być wykréślone w czwartéy części koła, spuszczaiąc ze wszystkich punktów łuku AB fig. 129, liniie SC ŚC i t. d. prostopadłe do promienia RA, i prowadząc promienie RS, RŚ i t. d. Tróykąty RCS, RCŚ i t. d. tym sposobem wykréślone, będą przy punktach C, C i t. d. prostokątne; a kąty ich przy R będą miały wszelkie ważności,

iakie tylko kąty ostre mieć mogą, gdyż miarą ich są łuki AS, AŚ i t. d. których wielkość zależy od naszéy woli; kąty zaś CSR, CŚR i t. d. w miarę powiększania się kątów przy R zmnieyszać się będą: gdyż kąt przy S, z kątem przy R w każdym tróykącie RCS waży ieden kąt prosty; i nie może być żaden tróykąt prostokątny dany do rozwiązania, któryby nie był podobny iednemu z tróykątów wykreślonych w czwartéy części koła.

IV. Wszystkie te tróykąty RCS i t. d. maią iednakową przeciwprostokątną równą promieniowi RA. Możnaby ułożyć inny ciąg tróykątów prostokątnych, którychby iedno ramie kąta prostego, równe było promieniowi RA: na ten koniec, dosyć iest z końca promienia RA wyprowadzić styczną AT nieograniczonéy długości, i ze środka koła R przez punkta SŚ i t. d. poprowadzić sieczne RN, RŃ i t. d. Rzeczą iest przez się widoczną, że kąty ostre przy R w tróykątach prostokątnych RNA, RŃA i t. d. będą miały wszelką ważność, iaką tylko kąty ostre mieć mogą, i że tém samém między temi tróykątami, musi być ieden podobny tróykątowi prostokątnemu danemu do rozwiązania.

V. W tróykątach RCS i t. d. przeciwprostokątna nie odmienia się, boki CS i t. d. rosną w miarę rosnących kątów CRS i t. d. i łuków AS i t. d. Wielkość zatém kątów CRS i t. d. i łuków AS i t. d. zależy w tróykątach prostokątnych od wielkości boków CS, CŚ i t. d. Boki te nazwano *Wstawami sinus*, łuków i kątów im odpowiaiących. I tak CS iest wstawą łuku AS i kąta ARS; CŚ iest wstawą łuku AŚ i kąta ARŚ i t. d. *Wstawa więc łuku iest prostopadła spuszczona z końca tego łuku na promień przechodzący przez drugi koniec tegoż łuku.*

VI. Liniie RC, RC i t. d. które zmnieyszaią się w miarę powiększaiących się łuków AS, AŚ i t. d. są równe liniiom SO, ŚO, i t. d. prostopadłym do promienia RB, który iest prostopadły do promienia RA. Liniie te SO i t. d. są tém względem łuków BS, BŚ i t. d. czém są liniie SC, ŚC i t. d. względem łuków AS, AŚ i t. d. To iest, liniia SO iest wstawą łuku BS; liniia ŚÓ' iest wstawą łuku BŚ i t. d. Dwa łuki, które do siebie dodane lub od siebie odięte równe są czwartéy części okręgu, nazywamy *Dopełnieniem* ieden drugiego, *complementum*. I tak łuk BS iest dopełnieniem łuku AS, BŚ iest dopełnieniem łuku AŚ i t. d. Liniie zatém SO, ŚÓ' i t. d. są wstawami dopełnienia łuków AS, i t. d. *sinus complementi*. Wstawa dopełnienia inaczéy zowie się *dostawą*, *cosinus*. Więc liniie SO, ŚÓ' i t. d. tudzież równe im liniie RC, RC i t. d. są dostawami łuków AS, AŚ i t. d. *Dostawa zatem łuku iest wstawą dopełnienia tegoż łuku, i równa się części promienia będącéy między środkiem koła i wstawą.*

Liniia AC, AC i t. d. równa promieniowi AR zmnieyszonemu dostawą łuku SA, ŚA i t. d. nazywa się wstawą *odwrótną sinus versus*, tegoż łuku. Lecz liniia ta w dalszéy Matematyce używana, do rozwiązywania tróykątów nie będzie nam potrzebna.

VII. W tróykątach więc prostokątnych RCS i t. d. przeciwprostokątna RS i t. d. iest promieniem koła; boki CS i t. d. są wstawami, a boki RC i t. d. są dostawami kątów ostrych R maiących swóy wierzchołek w środku koła. W każdym więc tróykącie prostokątnym wziąwszy przeciw-

prostokątną za promień, a wierzchołek iednego z dwóch kątów ostrych za środek koła, bok przeciwny kątowi ostremu maiącemu swóy wierzchołek w środku koła będzie iego wstawą, a bok przyległy temuż kątowi iego dostawą.

VIII. W tróykątach ARN, ARŃ i t. d. bok AR nie odmienia się; boki zaś RN, RŃ i t. d. tudzież boki AN, AŃ i t. d. rosną w miarę rósnących kątów ARN i t. d. i łuków AS, i t. d. które są miarą tychże kątów. Boki RN, RŃ i t. d. zowią się *Sieczne secantes*, łuków, AS i t. d. i kątów ARN i t. d. boki zaś AN, AŃ i t. d. *styczne*, *tangentes*, tychże łuków i kątów.

Sieczna zatém trygonometryczna łuku, iest promień przez koniec tego łuku poprowadzony i przedłużony aż do zeyścia się ze styczną wyprowadzoną z drugiego końca tegoż łuku; Styczna zaś trygonometryczna łuku iest część stycznéy przez ieden koniec tego łuku poprowadzonéy, zawarta między dwoma promieniami przez obadwa końce tegoż łuku poprowadzonemi.

IX. W tróykątach więc prostokątnych ARN, i t. d. bok AR iest promieniem koła, boki AN i t. d. są stycznemi, a przeciwprostokątne RN i t. d. siecznemi kątów ostrych ARN i t. d. maiących swóy wierzchołek w środku koła. W każdym więc tróykącie prostokątnym, wziąwszy iedno ramie kąta prostego za promień, a wierzchołek iednego z kątów ostrych za środek koła, drugie ramie kąta prostego będzie styczną, a przeciwprostokątna sieczną kąta ostrego maiącego swóy wierzchołek w środku koła.

X. Z końca B łuku AB fig. 130. wyprowadziwszy styczną B*n*, i przedłużywszy ią aż do zeyścia się z sieczną R*n*; liniia B*n* będzie styczną

a liniia R*n* sieczną łuku BS. Że zaś łuk BS iest dopełnieniem łuku AS (V), więc liniia B*n* iest styczną dopełnienia łuku AS, i zowie się inaczéy *dotyczną*, *cotangens*; liniia zaś R*n* iest sieczną dopełnienia tego łuku AS, i zowie się *dosieczną*, *cosecans*.

XI. Wszystkie te liniie trygonometryczne będąc bokami podobnych tróykątów RCS, RNA, RB*n*, ROS, są między sobą proporcyonalne: maiąc zatém wiadome ważności iednych, łatwo będzie wyznaczyć ważności drugich.

Jakoż w tróykącie RCS prostokątnym przy C iest $CS^2 + RC^2 = RS^2$; czyli oznaczywszy promień RS przez R, łuk AS przez *a*, liniie zaś trygonometryczne przez początkowe głoski ich nazwisk; będzie

$wst^2 a + dos^2 a = R^2$; więc $wst^2 a = R^2 - dos^2 a$ $dos^2 a = R^2 - wst^2 a$: a tém samém

$wst\ a = \sqrt{R^2 - dos^2\ a}$: — : — : — : 1

$dos\ a = \sqrt{R^2 - wst^2\ a}$: — : — : — : 2.

2*re* W tróykątach RAN, RCS podobnych iest RC: CS = RA: AŃ; czyli dos *a*: wst *a* = R: sty *a*;

więc $sty\ a = \frac{R.\ wst\ a}{dos\ a}$: — : — 3.

3*cie*. W tróykątach RCS RB*n* podobnych: iest CS: RC = BR: B*n*; czyli wst *a*: dos *a* = R, dot *a*; więc $dot\ a = \frac{R.\ dos\ a}{wst\ a}$ 4

4*te*. W tróykątach RCS, RAN podobnych iest RC: RS = RA: RN; czyli dos *a*: R = R: siec *a*; więc $siec\ a = \frac{R^2}{dos\ a}$: — : — : — 5.

5te. W tróykątach RCS, RB*n* podobnych iest CS: RS = RB: R*n*; czyli, wst a: R = R: dosiec a;

więc dosiec $a = \frac{R^2}{\text{wst } a:} : — : — : 6.$

Przypatrzywszy się równaniom 1, 2, 3, 4, 5 i 6, oznaczaiącym ważność 6ciu liniy trygonometrycznych, postrzeżemy, że ważność stycznéy i dotycznéy, siecznéy i dosiecznéy, zależy od wyznaczenia ważności wstawy, dostawy i promienia. Że zaś długość promienia w mierzeniu kątów za pomocą łuków koła iest rzeczą oboiętną, więc wziąwszy promień = 1, ważność innych liniy trygonometrycznych zależeć będzie od wyznaczenia wstawy i dostawy: a właściwie mówiąc od wyznaczenia ważności saméy tylko wstawy: gdyż dostawa zależy od ważności wstawy, iak się z równania pod liczbą 2 przekonać można.

Następuiące twierdzenie o ważności wstaw i dostaw summy lub różnicy dwóch łuków, zasługuie na naywiększą uwagę: gdyż zamyka w sobie wszystkie własności wstaw i dostaw.

XII. Twierd. *Niech będą dwa iakiekolwiek łuki* a, *b; będzie*

$$\text{wst } (a \pm b) = \frac{\text{wst } a. \text{ dos } b \pm \text{wst } b. \text{ dos } a}{R}$$

$$\text{dos } (a \pm b) = \frac{\text{dos } a. \text{ dos } b \pm \text{wst } a. \text{ wst } b}{R}$$

Dowód. Niech będzie fig. 131, łuk AM = a, MN = b: wziąwszy łuk MN = MN, i poprowadziwszy cięciwy NN i promień MR, z punktów N, M, E i N spuśćmy NC, MP, EF i NC prostopadłe do AR, tudzież NG i ED prostopadłe do NC.

Podług tego cośmy powiedzieli wyżéy (V), liniia MP iest wstawą, a PR dostawą łuku AM = a. Liniia NE z wykréślenia prostopadła do promienia MR (108), iest wstawą, a RE dostawą łuku MN = b.

Liniia NC iest wstawą łuku AN = AM + MN = $a + b$.

Liniia RC iest dostawą łuku AN = AM + MN = $a + b$.

Liniia RĆ iest dostawą łuku AŃ = AM — MN = $a - b$.

Liniia ŃĆ iest wstawą łuku AŃ = AM — MN = $a - b$.

Lecz NC = DC + DN = EF + DN: gdyż EF = DC,

ŃĆ = GC = DC — DG = EF — DG.

RC = RF — FC = RF — ED: gdyż ED = FC,

RĆ = RF + FĆ.

Nadto w tróykątach NŃG, END podobnych iest

ŃN: EN = NG: DN = ŃG: ED.

A że poprzednik Iszy ŃN iest dwa razy większy od swego następnika EN (107); więc i liniia NG dwa razy większa od DN, i ŃG czyli ĆC dwa razy większa od ED czyli FC; a tém samém DG = DN, ED czyli FC = FĆ.

W powyższych zatém równaniach zamiast liniy DG i FC położywszy równe im liniie DN i ED będzie

wst $(a + b)$ = NC = EF + DN:

wst $(a - b)$ = ŃĆ = EF — DN.

dos $(a + b)$ = RC = RF — ED.

dos $(a - b)$ = RĆ = RF + ED.

Idzie więc tylko o wynalezienie ważności czterech liniy EF, RF, DN i ED, z których dwie

pierwsze są bokami tróykąta EFR podobnego tróykątowi MPR, dwie drugie są bokami tróykąta EDN podobnego temuż tróykątowi MPR: gdyż boki 1go są z wykreślenia prostopadłe do boków 2go tróykąta. Będzie więc

RM: MP = RE: EF. RM: PR = RE: RF
RM: NE. = RP: DN. RM: EN = MP: ED.

czyli położywszy ważności trygónometryczne,

$$R: \text{wst } a = \text{dos } b: EF;\ \text{więc } EF = \frac{\text{wst } a.\ \text{dos } b}{R}$$

$$R: \text{dos } a = \text{dos } b: RF;\ \text{więc } RF = \frac{\text{dos } a.\ \text{dos } b}{R}$$

$$R: \text{wst } b = \text{dos } a: DN;\ \text{więc } DN = \frac{\text{wst } b.\ \text{dos } a}{R}$$

$$R: \text{wst } b = \text{wst } a: ED;\ \text{więc } ED = \frac{\text{wst } a.\ \text{wst } b}{R}$$

W powyższych zatém czterech równaniach zamiast liniy EF, RF, DN i ED położywszy znalezione ich ważności, równania te zamienią się w następuiące:

$$\text{wst } (a+b) = \frac{\text{wst } a.\ \text{dos } b + \text{wst } b.\ \text{dos } a}{R}$$

$$\text{wst } (a-b = \frac{\text{wst } a.\ \text{dos } b - \text{wst } b.\ \text{dos a}}{R}$$

$$\text{dos } (a+b) = \frac{\text{dost } a.\ \text{dos } b - \text{wst } a.\ \text{wst } b}{R}$$

$$\text{dos } (a-b) = \frac{\text{dos } a.\ \text{dos } b + \text{wst } a.\ \text{wst } b}{R}$$

Równania te za pomocą podwóynego znaku $\pm$ wyrażaiącego summę i różnicę wstaw i dostaw, można zamienić na dwa równania, któreśmy założyli w twierdzeniu.

XIII. Chcąc znaleźć wstawę i dostawę łuku dwa razy większego, niż iest łuk dany a, dosyć iest w równaniu 1szém i 3ciem, ze czterech równań poprzedzaiących, zamiast łuku b wziąć łuk a; tym sposobem dwa te równania zamienią się w następuiące:

$$\left.\begin{aligned} \text{wst } (a+a) &= \frac{\text{wst } a.\ \text{dos } a + \text{wst } a.\ \text{dos a}}{R} \\ \text{dos } (a+a) &= \frac{\text{dos } a.\ \text{dos } a - \text{wst } a\ \text{wst } a.}{R} \end{aligned}\right\} \text{ czyli}$$

$$\text{wst } 2a = \frac{2\text{wst} a.\ \text{dos } a.}{R} \quad \text{dos } 2a = \frac{\text{dos}^2 a - \text{wst}^2 a}{R}$$

W tychże samych równaniach zamiast b położywszy łuk $2a$, otrzymamy ważność wstawy i dostawy łuku trzy razy większego, niż iest łuk dany a: będzie bowiem

$$\text{wst}(a+2a) = \text{wst}3a = \frac{\text{wst } a.\text{dos } 2a + \text{wst } 2a.\ \text{dos } a}{R}$$

$$\text{dos}(a+2a) = \text{dos}3a = \frac{\text{dos } a.\ \text{dos } 2a - \text{wst } a.\text{wst } 2a.}{R}$$

Tym sposobem postępuiąc, można otrzymać wstawę i dostawę łuku 4, 5 i t. d. razy większego, niż iest łuk dany.

XIV. Z równania $\text{dos } 2a = \frac{\text{dos}^2 a - \text{wst}^2 a}{R}$ (XIII), można także otrzymać wstawę i dostawę łuku dwa razy mnieyszego niż iest łuk dany a:

iakoż zamiast łuku a, wziąwszy łuk $\frac{1}{2}a$ równanie to zamieni się w następuiące :

$$\text{dos } a = \frac{\text{dos}^2 \frac{1}{2}a - \text{wst}^2 \frac{1}{2}a}{R}$$

Zniósłszy mianownik, będzie

$\text{dos}^2 \frac{1}{2}a - \text{wst}^2 \frac{1}{2}a = R.\text{ dos } a$. Że zaś

$\text{dos}^2 \frac{1}{2}a + \text{wst}^2 \frac{1}{2}a = R^2$ (XI), więc strony tych dwóch równań raz od siebie odiąwszy, drugi raz do siebie dodawszy, będą dwa następuiące równania :

$2\text{wst}^2 \frac{1}{2}a = R^2 - R.\text{ dos } a$. $2\text{dos}^2 \frac{1}{2}a = R^2 + R.\text{ dos } a$.

Podzieliwszy obie strony przez 2, będzie $\text{wst}^2 \frac{1}{2}a = \frac{1}{2}R^2 - R.\text{dos}a$; $\text{dos}^2 \frac{1}{2}a = \frac{1}{2}R^2 + \frac{1}{2}R\text{dos } a$

Więc $\text{wst } \frac{1}{2}a = \sqrt{\frac{1}{2}R^2 - \frac{1}{2}R.\text{ dos } a}$

$\text{dos } \frac{1}{2}a = \sqrt{\frac{1}{2}R^2 + \frac{1}{2}R.\text{ dos } a}$.

Drugą stronę przed znakiem pierwiastkowym podzieliwszy przez 2, a wyrazy będące pod znakiem pierwiastkowym rozmnożywszy przez 2^2, czyli przez 4, co wypadnie na to samo, iak gdyby strona ta była podzieloną i rozmnożoną przez 2, będzie

$$\text{wst } \tfrac{1}{2}a = \tfrac{1}{2}\sqrt{2R^2 - 2R.\text{ dos } a}$$

$$\text{dos } \tfrac{1}{2}a = \tfrac{1}{2}\sqrt{2R^2 + 2R.\text{ dos } a}.$$

Za pomocą tych dwóch równań, można będzie znaleźć wstawę i dostawę nie tylko połowy łuku danego, ale też łuku 4, 8, 16 i t. d. razy mnieyszego, niż iest łuk dany; gdyż wstawa i dostawa łuku dwa razy mnieyszego niż iest łuk $\frac{1}{2}a$, będzie wstawą i dostawą łuku 4 razy mnieyszego, niż iest łuk a; i t. d.

XV. Liniia MP fig. 132 będąca wstawą łuku AM, iest oraz wstawą łuku MB, który do łuku AM dodany, czyni półokręgu AMB: gdyż liniia ta iest prostopadłą z końca M łuku BM spuszczona do promienia RB przechodzącego przez drugi koniec B tegoż łuku MB. Dwa łuki lub dwa kąty, które do siebie dodane czynią półokręgu lub dwa kąty proste, zowiemy *spełnieniem* ieden drugiego, *supplementum*. I tak łuk BM większy od czwartéy części okręgu iest spełnieniem łuku AM mnieyszego od czwartéy części okręgu; łuk AM iest spełnieniem łuku BM. Stąd wniesiemy, że *wstawa łuku iest ta sama, co wstawa spełnienia tegoż łuku.*

XVI. Poprowadziwszy cięciwę MN równoodległą od średnicy AB, fig. 143, i spuściwszy MP i NQ prostopadłe do AB, będzie NQ = MP. i łuk BN = AM (115). Że zaś łuk BN iest spełnieniem łuku AN, więc i łuk AM iest spełnieniem tegoż łuku AN. Dwa te łuki maiące równe wstawy NP i NQ, maią także równe dostawy SP i SQ; lecz kierunek tych dostaw iest odwrotny: dostawa SP łuku AM mnieyszego od 4éy części okręgu leży po lewéy stronie średnicy DC; dostawa zaś SQ łuku AN większego od 4téy części okręgu, leży po prawéy stronie téyże średnicy DC; gdy tym czasem ich wstawy MP i NQ leżą obiedwie z iednéy strony średnicy AB. Odwrotność ta kierunku dostaw i wszelkich innych liniy wyraża się w rachunku dwoma znakami + i —, z których pierwszy wyraża ilości dodayne, drugi odiemne. I tak ieżeli dostawa SP leżąca po lewéy stronie średnicy DC uważa się iako ilość dodayna, czyli ma przed sobą znak +, dostawa SQ leżąca po prawéy stronie téyże średnicy DC uważa się iako ilość odiemna, i ma przed sobą znak.— Dostawa zatém łuku większego od 4téy części okręgu iest równa dostawie iego spełnienia wzięte y

ze znakiem —; i odwrótnie dostawa łuku mnieyszego od 4téy części okręgu równa iest dostawie iego spełnienia wziętéy ze znakiem +; czyli *dostawa łuku równa iest dostawie iego spełnienia wziętéy ze znakiem przeciwnym.*

XVII. Nakoniec widzimy tu, że MC wstawa łuku MN fig. 132 iest połowa AM cięciwy łuku ANM dwá razy większego od łuku MN; podobnież MC wstawa łuku MN iest połowa MB cięciwy łuku MNB dwa razy większego od łuku MN. Stąd wniesiemy, że *wstawa łuku równa iest połowie cięciwy łuku dwa razy większego*; A zátém gdy wstawy są wiadome, łatwo można wyrachować cięciwy, i odwrotnie.

XVIII. Ponieważ średnica iest cięciwą półokręgu: połowa więc średnicy czyli promień, będzie wstawą połowy pół okręgu czyli czwartéy części okręgu (XVII); iakoż wstawa łuku AB fig. 130, równego czwartéy części okręgu iest promień BR z końca B tegoż łuku spuszczony prostopadle do promienia AR przechodzącego przez drugi koniec A tegoż łuku. A że średnica ze wszystkich cięciw koła iest naywiększa (100); więc wstawa czwartéy części okręgu iest ze wszystkich wstaw naywiększa. Wziąwszy zatém promień=1; wstawa czwartéy części okręgu będzie 1; wstawy zaś innych łuków będą mnieysze od 1; a tém samém ważności ich będą ułomkowe.

Że zaś kwadrat dostawy równa się kwadratowi promienia zmnieyszonemu kwadratem wstawy (XI); kiedy więc wstawą czwartéy części okręgu iest promień, dostawa czwartéy części będzie = *o*. I w saméy rzeczy dostawa łuku równa się części promienia zawartéy między wstawą i środkiem koła (VI); kiedy więc

stawa

wstawa BR łuku AB równego czwartéy części okręgu, przypada na środek koła R: dostawa tegoż łuku niknie czyli równa się *o*.

Ponieważ promień iest cięciwą łuku równego 6téy części okręgu; więc połowa promienia będzie wstawą łuku równego 12téy części okręgu (XVII). Wziąwszy zatém promień = 1. wstawa 12téy części okręgu będzie $=\frac{1}{2}$. A że dostawa łuku równa się piérwiastkowi różnicy między kwadratem promienia i kwadratem wstawy (XI), kiedy więc promień=1. wstawa 12téy części okręgu $=\frac{1}{2}$, będzie dostawą 12tey części okręgu

$$=\sqrt{1-\tfrac{1}{4}}=\sqrt{\tfrac{3}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}=\tfrac{1}{2}\sqrt{3}.$$

12sta część okręgu iest 3cią częścią łuku AB równego 4téy części okręgu. Oznaczywszy zatém 4tą część okręgu przez Q, będzie

1ó*d*. wst Q = 1 : dost Q = *o*.

2*re*. wst $\frac{1}{3}$ Q = $\frac{1}{2}$; dos $\frac{1}{3}$ Q = $\frac{1}{2}\sqrt{3}$.

Maiąc wstawy i dostawy tych dwóch łuków, można będzie znaleźć nie tylko styczne, dotyczne, sieczne i dosieczne tychże łuków, za pomocą formuł wyżéy (XI) podanych; ale też wstawy, dostawy i t. d. innych wszystkich łuków, biorąc łuki te, tak podług nowego podziału okręgu na 400 stopni, iako też podług podziału dawnego na stopni 360. Lecz piérwéy uczynić potrzeba dwie następuiące uwagi:

XIX. 1ó*d*. Łuk, co do długości zawsze iest mniéyszy niż iego styczna, a większy niż iego wstawa. Jakoż wziąwszy łuk A*m*=AM fig. 133. i poprowadziwszy cięciwę *Mm*, i styczne TM, T*m*; styczne te przetną się z promieniem AR w punkcie T: gdyż dwa tróykąty RTM, RT*m*

mogą do siebie przystać. Lecz łuk MA*m* czyli AM + A*m* < TM + T*m*, AM + A*m* > MP + P*m* (253); że zaś AM = A*m*, TM = T*m*, PM = P*m*; będzie więc 2AM < 2TM; 2AM > 2PM; a tém samém AM < TM, AM > PM.

2*re*. Stosunek między styczną i wstawą coraz bardziéy przybliża się do 1, w miarę coraz bardziéy zmnieyszaiącego się łuku; czyli, co na iedno wychodzi, im iest łuk mniéyszy, tém iest mniéysza różnica między iego styczną i wstawą. Jakoż ponieważ sty $a = \frac{\text{R. wst } a}{\text{dos } a}$ (XI), czyli wziąwszy promień = 1, sty $a = \frac{\text{wst } a}{\text{dos } a}$; więc obie strony rozmnożywszy przez dos *a*, i podzieliwszy przez sty *a*, będzie dos $a = \frac{\text{wst } a}{\text{sty } a}$: że zaś dostawa łuku tém iest większa, im iest łuk mniéyszy, to iest dostawa tem bardziéy przybliża się do promienia czyli do 1, im iest łuk mniéyszy; więc im łuk *a* iest mniéyszy, tém bardziéy ważność dos *a*, a tém samém i ważność ułomka $\frac{\text{wst } a}{\text{sty } a}$, przybliża się do 1; co dowodzi, że różnica między mianownikiem i licznikiem tego ułomka, to iest między sty *a* i wst *a* musi być bardzo mała, a ieszcze mniéysza między ważnością łuku *a*, i ważnością iego wstawy lub stycznéy. Wziąwszy *np*. PM = 0,0001, będzie

$$RP = \sqrt{RM^2 - PM^2} = \sqrt{1 - 0{,}00000001} = 0{,}999\,999\,95.$$

$$MT = \frac{RM \times PM}{RP} = \frac{1 \times 0{,}0001}{0{,}999\,999\,95} =$$

0,000 100 000000 5; ważność ta stycznéy MT różni się tylko od ważności wstawy PM w 13téy liczbie dziesiętnéy; można ią więc wziąść za ważność łuku AM wyrażonego w częściach promienia RA.

XX. Po tych uwagach i po wiadomościach które ie poprzedziły, nie trudno będzie wskazać sposób, którym ważność wstaw, dostaw i t. d. wszystkich łuków wynaleziono i ułożono w tablice.

Ponieważ wstawa 4téy części okręgu czyli wst Q = 1, dos Q = 0 (XVIII), uczyniwszy więc *a* = Q, i położywszy naznaczone ważności w dwóch równaniach wyżéy znalezionych (XIV), wst $\frac{1}{2}a = \frac{1}{2}\sqrt{2R^2 - 2R.\text{dos } a}$, dos $\frac{1}{2}a = \frac{1}{2}\sqrt{2R^2 + 2R.\text{dos } a}$, równania te zamienią się w następuiące:

wst $\frac{1}{2}Q = \frac{1}{2}\sqrt{2 - 2 \times 0} = \frac{1}{2}\sqrt{2} = 0{,}707\,106\,781\,186$

dos $\frac{1}{2}Q = \frac{1}{2}\sqrt{2 + 2 \times 0} = \frac{1}{2}\sqrt{2} = 0{,}707\,106\,781\,186.$

Ważność tę wstawy i dostawy $\frac{1}{2}$ Q można także następuiącym sposobem wyprowadzić.

Jeżeli łuk AB *fig*. 134. równy czwartéy części okręgu iest w punkcie M podzielony na dwie części równe, na ten czas liniia MP czyli wstawa łuku $\frac{1}{2}$ AB, równa iest linii RP czyli dostawie tegoż łuku: w tróykącie bowiem RPM kąt PRM = RMP, co iest łatwo okazać. Że zaś $MP^2 + RP^2 = MR^2$; czyli, $2MP^2 = MR^2 = 1$; więc $PM^2 = \frac{1}{2}$; a tém samém $MP = \sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{4} \times 2} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$.

Maiąc ważność wstawy i dostawy łuku $\frac{1}{2}$ Q, można będzie znaleźć ważność wstawy i dostawy połowy tego łuku czyli $\frac{1}{4}$ Q. Jakoż niech będzie $\frac{1}{2}$ Q = *a*: w równaniach powyższych (XIV), położywszy znalezione lub naznaczone ważności, będzie:

wst $\frac{1}{2}$ Q = $\frac{1}{2}\sqrt{(2 - 2 \times 0,707106781186)}$ = 0, 382683432365;

dos $\frac{1}{4}$ Q = $\frac{1}{2}\sqrt{(2 + 2 \times 0,707106781186}$ = 0,923879532511.

Lecz dzieląc tym sposobem każdy łuk na dwie części równe, nie doydziemy ani do części dziesiętnych które są stopniami, minutami, i t.d. podług nowego podziału okręgu, ani do części takich, któreby można wziąć za stopnie, minuty i t.d. podziału dawnego. Znaydziemy tylko łuki coraz mniéysze, a tém samém coraz bardziéy przybliżaiące się do swoich wstaw: i tak za 14tym podziałem będzie łuk = $\frac{1}{16384}$ Q, którego wstawa = 0,000095873799. Wstawa ta mniéysza od wstawy 0,0001; łuk więc ten nie różni się od swoiéy wstawy w piérwszych 12tu liczbach dziesiętnych (XIX): łuki zatém mniéysze ieszcze mniéy różnić się będą od swoich wstaw.

Łuki tak mało różniące się od swoich wstaw i stycznych, mogą być uważane za proporcyonalne tym liniiom: będzie więc:

wst $\frac{1}{16384}$ Q : wst $\frac{1}{100000}$ Q = $\frac{1}{16384}$ Q : $\frac{1}{100000}$ Q.

czyli = 100000 : 16384. A zatém

wst $\frac{1}{100000}$ Q, czyli wst 0,00001 Q = $\frac{16384 \times \text{wst } \frac{1}{16384} Q}{100000}$ = 0,000015707963.

Nadto ponieważ łuki małe są proporcyonalne swoim wstawom, łuków zatém 2, 3, 4, i t.d. razy większych od łuku 0,00001 Q, będą wstawy 2, 3, 4 i t. d. razy większe od wstawy tegoż łuku; będzie więc

wst 0,00002 Q = 2 wst 0,00001 Q,
wst 0,00003 Q = 3 wst 0,00001 Q.
wst 0,00004 Q = 4 wst 0,00001 Q t. d.

Tym sposobem znaydziemy ieszcze wiele łuków większych od łuku 0,00001 Q, których wstawy i styczne nie różnią się między sobą w piérwszych 12stu liczbach dziesiętnych. A chociaż za dalszém powiększaniem się łuków, różnica ta coraz się bardziéy powiększa; można iednak tym sposobem postępuiąc doyść aż do łuku = 0,001 Q którego wstawa i styczna tymże sposobem znalezione, ieszcze się między sobą nie różnią w piérwszych 8miu liczbach dziesiętnych.

W łukach większych od 0,001 Q, różnica ta znacznieby się powiększyła: wtenczas więc użyć potrzeba 4 równań wyżéy znalezionych (XII i XIII).

wst $2a$ = 2wst a. dos a;
dos $2a$ = dos$^2 a$ — wst$^2 a$;
wst $(a \pm b)$ = wst a. dos $b \pm$ wst b. dos a
dos $(a \pm b)$ = dos a. dos $b \pm$ wst a. wst b;

Wziąwszy naprzód a = 0,001 Q, potém a = 0,002 Q i t. d. z dwóch równań piérwszych otrzymamy:

wst 0,002 Q; dos 0,002 Q; wst 0,004 Q; dos 0,004 Q i t. d. Wziąwszy znowu naprzód a = 0,001 Q, b = 0,002 Q; potém a = 0,002 Q, b = 0,003 Q i t. d. z dwóch rownań drugich otrzymamy:

wst 0,003 Q, dos 0,003 Q; wst 0,005 Q, dos 0,005 Q i t. d.

XXI. Ten sam sposób postępowania można przystosować do dawnego podziału okręgu na 360°, z tą tylko różnicą, że działanie rozpocząć należy od wstawy i dostawy łuku = $\frac{1}{3}$ Q = 30° (XVIII). Łuk ten ciągle dzieląc na dwie części równe, i za każdym podziałem wynayduiąc ważność wstawy i dostawy łuków coraz bardziéy

zmnieyszaiących się, doydziemy nakoniec do łuków bardzo mało różniących się od swoich wstaw i stycznych, które mogą być wzięte za proporcyonalne tymże wstawom i stycznym. Dlszy sposób postępowania zupełnie iest podobny do podanego wyżéy.

XXII. Zamiast ważności wstaw, dostaw, stycznych i dotycznych w tablicach zwyczaynych położone są ich logarytmy, dla ułatwienia rachunku w rozwiązaniu dwóch następuiących zagadnień do wyrachowania części tróykąta istotnie potrzebnych:

1. *Maiąc dany łuk, znaleźć logarytm iego wstawy, albo dostawy, albo stycznéy albo dotycznéy.*

2. *Maiąc dany logarytm wstawy, albo dostawy, albo stycznéy, albo dotycznéy łuku; znaleźć ten łuk.*

Rozwiązanie tych zagadnień zależy od sposobu rozłożenia i uporządkowania tablic, który iest rozmaity, lecz zawsze na wstępie dzieła tablic wyłożony.

XXIII. Tablice te nie obeymuią łuków większych nad 4tą część okręgu, i nie maią powiększéy części ważności siecznych i dosiecznych: obaczymy iednak niżéy, że one są dostateczne do wynalezienia ważności wstawy, dostawy, stycznéy i dotycznéy wszystkich łuków choćby też nay większych. Co się zaś tycze siecznych i dosiecznych, te nie wchodzą do rozwiązywania tróykątów, iak się o tém przekonamy w zagadnieniach rozwiązywanie to za cel maiących, które wkrótce podamy: wyłożywszy piérwéy twierdzenia istotnie potrzebne do wyrachowania części tróykątów, co iest właściwym przedmiotem Trygonometryi.

XXIV. *W każdym tróykącie prostokątnym tak się ma promień do wstawy iednego z kątów ostrych, iak przeciwprostokątna do boku przeciwnego temu kątowi.*

Niech będzie ABC *fig.* 135. tróykąt prostokątny przy A, z punktu B iako ze środka promieniem BM równym promieniowi podług którego ułożone są tablice nakreśliwszy łuk ME, który będzie miarą kąta B, i z punktu M do AB spuściwszy prostopadłą MP, która będzie wstawą kąta B; w tróykątach BMP, BCA podobnych, iest

BM: MP=CB: AC; czyli, położywszy ważności trygonometryczne R: wst B=CB: AC.

XXV. *W każdym tróykącie prostokątnym tak się ma promień do stycznéy iednego z kątów ostrych, iak bok przyległy temu kątowi do boku przeciwnego.*

Wykréśliwszy iak wyżéy, łuk ME, i z punktu E do AB poprowadziwszy prostopadłą ED, która będzie styczną kąta B: w tróykątach BED, CAB podobnych iest BE: ED=AB: AC, czyli R: sty B=AB: AC.

XXVI. *W tróykącie prostokréślnym iakimkolwiek wstawy kątów maią się iak boki tym kątom przeciwne.*

Niech będzie tróykąt ABC *fig.* 72, z wiérzchołka C spusciwszy CD prostopadłą do AB, prostopadła ta padnie albo wewnątrz tróykąta iak iest na figurze 1, albo zewnątrz, iak iest na figurze 2. W 1wszym przypadku, w tróykątach prostokątnych ACD, BCD iest

R: wst A=AC: CD; R: wst B=BC: CD (XXIV), więc

R×CD=wst A×AC; R×CD=wst B×BC; a tém samém wst A×AC=wst B×BC. Więc wst A: wst B=BC: AC.

W przypadku 2gim w dwóch tróykątach prostokątnych CDA, CDB, iest:

R: wst DAC=AC: CD; R: wst B=CB:CD więc R × CD=wst DAC × AC; R × CD=wst B × BC; a zatém:

wst DAC × AC=wst B × BC; a tém samém wst DAC: wstB =BC: AC. Że zaś kąt DAC iest spełnieniém kąta CAB czyli kąta A (XXV), a tém samém wst DAC=wst A; będzie więc wst A: wst B=BC: AC.

Tę samę własność można także następuiącym sposobem wyprowadzić:

Dany tróykąt ACB *fig.* 136. opisawszy kołem, i ze środka S promieniem *Sa* równym promieniowi tablic wykréśliwszy koło, poprowadzić promienie AS, BS, CS przecinaiące okrąg drugiego koła w punktach *a*, *b*, c, i poprowadzić cięciwy *ab*, *bc*, *ac*; tróykąt *abc* będzie podobny tróykątowi ABC, gdyż ponieważ *a*S i *b*S są równe iako promienie iednego koła, tudzież AS i BS są także równe; więc w tróykącie ASB iest AS: *a*S=BS: *b*S; a tém samém bok *ab* iest równoodległy od AB. Tymże sposobem okazać można, że bok *bc* iest równoodległy od BC, bok *ac* równoodległy od AC. A zatém tróykąty ABC i *abc* są podobne: będzie więc:

AB: *ab*=BC: *bc*=AC: *ac*; czyli

AB: BC: AC=*ab*: *bc*: *ac*; więc:

AB: BC: AC=$\frac{1}{2}$ *ab*: $\frac{1}{2}$ *bc*: $\frac{1}{2}$ *ac*. Że zaś kąty tróykąta *abc*: których wierzchołki są na okręgu, maią za miarę połowy łuków, których cięciwami są boki tym kątom przeciwne; a wstawa łuku równa iest połowie cięciwy łuku dwa razy większego (XVII); więc $\frac{1}{2}$ *ab*=wst *c*=wst C; $\frac{1}{2}$ *bc*

=wst *a*=wst A; $\frac{1}{2}$ *ac*=wst *b*=wst B; a tém samém:

AB: BC: AC=wst C: wst A: wst B.

XXVII. *W każdym tróykącie prostokréślnym dostawa iednego z kątów tak się ma do promienia, iak summa kwadratów z boków przyległych temu kątowi zmnieyszona kwadratem boku trzeciego, do podwóynego iloczynu dwóch piérwszych boków.*

W tróykącie ACB *fig.* 72. z wiérzchołka kąta któregokolwiek np. C spuściwszy CD prostopadłą do AB, i dla skrócenia bok CB przeciwny kątowi A oznaczywszy przez *a*, bok AC przeciwny kątowi B przez *b*, bok AB przeciwny kątowi C przez *c*, a odcinek AD przez *x*; będzie $a^2 = b^2 + c^2 - 2cx$ (171). Dodawszy po obu stronach $2cx$, a odiąwszy a^2, i podzieliwszy przez $2c$, będzie $x = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}$

W tróykącie prostokątnym ACD iest R: wst DCA=*b*: *x* (XXIV). A że kąt DCA iest dopełnieniem kąta A, gdyż obadwa czynią kąt prosty, a tém samém wst DCA=dos A (VI); będzie więc R: dos A=*b*: *x*.

A zatém $x = \frac{\text{dost A} \times b}{\text{R}}$ Porównawszy z sobą dwie znalezione ważności dla *x* będzie $\frac{\text{dos A} \times b}{\text{R}} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}$; podzieliwszy obie strony przez *b*, wypadnie $\frac{\text{dos A}}{\text{R}} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$; a tém sa-

mém dos A: $R = b^2 + c^2 - a^2 : 2bc$. Gdyby tróykąt ACB był roztwartokątny, iaki iest pod liczbą 2, w którym prostopadła CD pada zewnątrz tróykąta, na ten czas byłoby $a^2 = b^2 + c^2 + 2cx$ (172); a tém samém $-x = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}$. (A).

W tróykącie CDA iest wst ACD = dos CAD = $\frac{R.\ x}{b}$ (XXIV), że zaś kąt CAB czyli kąt A iest spełnieniem kąta CAD, i ma tę samę dostawę co i kąt CAD lecz odiemną (XVI), będzie więc $-\text{dos A} = \frac{R.\ x}{b}$; a tém samém $-x = \frac{\text{dos A} \times b}{R}$ Ważność tę położywszy zamiast $-x$ w równaniu (A), będzie $\frac{\text{dos A} \times b}{R} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}$, iak iest w przypadku piérwszym.

XXVIII. W równaniu $a^2 = b^2 + c^2 - 2cx$ (XXVII), dodawszy po obu stronach $2cx$, a odiąwszy a^2 i c^2, będzie $2cx - c^2 = b^2 - a^2$. Strony tego równania rozłożywszy na czynniki, wypadnie:

$c(2x - c) = (b + a)(b - a)$; a zatém $c : b + a = b - a : 2x - c$.

Że zaś AB = c, AD = x; więc BD = $c - x$, a tém samém AD — BD = $x - c + x = 2x - c$. Ostatnia więc proporcya zamieni się w następuiącą:

AB: AC + BC = AC — BC: AD — BD, To iest:

W tróykącie, w którym prostopadła z wierzchołka do podstawy spuszczona pada wewnątrz troykąta, podstawa tak się ma do summy dwóch innych boków, iak różnica tychże boków, do różnicy odcinków podstawy.

Jeżeli kąt A iest roztwarty *fig.* 72. *Nro.* 2, na ten czas $a^2 = b^2 + c^2 + 2cx$ (172). Więc $a^2 - b^2 = c^2 + 2cx$; czyli $(a+b)(a-b) = c(2x + c)$; a zatém $c: a+b = a-b: 2x + c$. to iest, kiedy prostopadła z wierzchołka spuszczona do podstawy pada zewnątrz tróykąta, *tak się ma podstawa do summy dwóch innych boków, iak różnica tychże boków, do summy odcinków podstawy* $BD + AD$.

Tę samę własność można wyprowadzić sposobem następuiącym. Z punktu C iako ześrodka promieniem CB wykréśliwszy koło *fig.* 137. i bok AC przedłużywszy do przecięcia się z okręgiem w punkcie E, będzie podług tego cośmy powiedzieli wyżéy (215). AB: AE = AF: AM; czyli AB: AC + CE = AC — CF: AD — DM. Że zaś CE = CF = BC, a DM = BD, będzie więc AB: AC + BC = AC — BC: AD — BD.

Kiedy kąt A iest roztwarty, *fig.* 72. *Nro.* 2. Dowodzenie i wykréślenie podobne do poprzedzaiącego.

XXIX. *W każdym tróykącie prostokréślnym tak się ma summa dwóch boków do ich różnicy, iak styczna połowy summy kątów tym bokom przeciwnych do stycznéy połowy różnicy tychże kątów.*

W równaniach $\text{wst}(a+b) = \frac{\text{wst} a \text{ dost } b + \text{wst } b \text{ dos } a}{R}$

$\text{wst}(a-b) = \frac{\text{wst } a.\ \text{dos } b. - \text{wst } b \text{ dos } a}{R}$ (XII), stro-

ny odpowiadaiące raz do siebie dodawszy, drugi raz odiąwszy, będzie

$$\text{wst}\,(a+b)+\text{wst}\,(a-b)=\frac{2\,\text{wst}\,a\,\text{dos}\,b}{R};$$

$$\text{wst}\,(a+b)-\text{wst}\,(a-b)=\frac{2\,\text{wst}\,b.\,\text{dos}\,a.}{R}$$

Niech będzie $a+b=A$. $a-b=B$; a zatém $(a+b)+(a-b)=2a=A+B$; więc $a=\frac{A+B.}{2}=\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}B$.

$(a+b)-(a-b)=2b=A-B$; więc $b=\frac{A-B}{2}=\frac{1}{2}A-\frac{1}{2}B$.

Położywszy te ważności w dwóch powyższych równaniach, będzie:

$$\text{wst}\,A+\text{wst}\,B=\frac{2}{R}\text{wst}\,(\tfrac{1}{2}A+\tfrac{1}{2}B)\,\text{dos}\,(\tfrac{1}{2}A-\tfrac{1}{2}B);$$

$$\text{wst}\,A-\text{wst}\,B=\frac{2}{R}\,\text{wst}\,(\tfrac{1}{2}A-\tfrac{1}{2}B)\,\text{dos}\,(\tfrac{1}{2}A+\tfrac{1}{2}B).$$

Strony odpowiadaiące tych równań podzieliwszy przez siebie, wypadnie:

$$\frac{\text{wst}\,A+\text{wst}\,B.}{\text{wst}\,A-\text{wst}\,B}=\frac{\text{wst}\,(\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}B)\,\text{dos}\,(\frac{1}{2}A-\frac{1}{2}B)}{\text{dos}\,(\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}B)\,\text{wst}\,(\frac{1}{2}A-\frac{1}{2}B)}$$

Że zaś wstawa łuku podzielona przez dostawę równa się stycznéy tegoż łuku (XI), będzie więc:

$$\frac{\text{wst}\,A+\text{wst}\,B}{\text{wst}\,A-\text{wst}\,B}=\text{sty}\,(\tfrac{1}{2}A+\tfrac{1}{2}B)\times\frac{\text{dos}\,(\frac{1}{2}A-\frac{1}{2}B)}{\text{wst}\,(\frac{1}{2}A-\frac{1}{2}B)}.$$

Rozmnożywszy obie strony przez $\text{wst}(\frac{1}{2}A-\frac{1}{2}B)$, a podzieliwszy przez $\text{dos}\,(\frac{1}{2}A-\frac{1}{2}B)$, wypadnie:

$$\frac{\text{wst}\,A+\text{wst}\,B}{\text{wst}\,A-\text{wst}\,B}\times\frac{\text{wst}\,(\frac{1}{2}A-\frac{1}{2}B)}{\text{dos}\,(\frac{1}{2}A-\frac{1}{2}B)}=\text{sty}\,(\tfrac{1}{2}A+\tfrac{1}{2}B)\,\text{czyl}^{i}$$

$$\frac{\text{wst}\,A+\text{wst}\,B}{\text{wst}\,A-\text{wst}\,B}\times\text{sty}\,(\tfrac{1}{2}A-\tfrac{1}{2}B)=\text{sty}\,(\tfrac{1}{2}A+\tfrac{1}{2}B);\ \text{więc}$$

$$\frac{\text{wst}\,A+\text{wst}\,B}{\text{wst}\,A-\text{wst}\,B}=\frac{\text{sty}\,(\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}B)}{\text{sty}\,(\frac{1}{2}A-\frac{1}{2}B)}.$$

A tém samém

$$\text{wst}\,A+\text{wst}\,B:\text{wst}\,A-\text{wst}\,B=\text{sty}\frac{A+B\cdot}{2}:\text{sty}\frac{A-B}{2}$$

Że zaś w tróykącie wstawy kątów, maią się iak boki tym kątom przeciwne (XXVI); oznaczywszy zatém boki przeciwne kątom A i B głoskami a i b, będzie $a:b=\text{wst}\,A:\text{wst}\,B$: a tém samém $a+b:a-b=\text{wst}\,A+\text{wst}\,B:\text{wst}\,A-\text{wst}\,B$. Proporcyą tę porownawszy z proporcyą powyższą wypadnie:

$$a+b:a-b=\text{sty}\frac{A+B}{2}:\frac{\text{sty}\,A-B}{2}$$

Możnaby to samo okazać sposobem następuiącym. Niech będzie *fig.* 138, łuk $AM=A$, łuk $AN=B$: będzie $MP=\text{wst}\,A$, $NQ=\text{wst}\,B$, Poprowadziwszy NC równoódległą od średnicy AB, i przedłużywszy MP do m; będzie

$MR=MP-PR=MP-NQ=\text{wst}\,A-\text{wst}\,B$;

$mR=mP+PR=MP+NQ=\text{wst}\,A+\text{wst}\,B$.

Z punktu C iako ze środka promieniem CD równym promieniowi koła ACBm nakréśliwszy łuk EDG, i przez punkt D poprowadziwszy styczną FH, aż do przecięcia się z liniiami CM, Cm w punktach F i H; liniia DF będzie styczną łuku DE (VIII) liniia DH będzie styczna łuku DG, z których piérwszy iest miarą kąta MCN, drugi miarą kąta mCN; a że kąty te maią wierz-

chołki na okręgu, więc kąta MCN iest także miarą połowa łuku MN=AM — AN = A—B; kąta zaś *m*CN iest miarą połowa łuku *m*N=AM +AN=A+B. Będzie zatém DF = sty $\frac{A-B}{2}$. DH = sty $\frac{A+B}{2}$.

Że zaś liniie M*m*, FH są od siebie równoodległe, więc w tróykątach MCR i FCD, tudzież w tróykątach *m*CR i DCH podobnych iest:

RC: DC = MR: DF, RC: DC=*m*R: DH: a zatém *m*R: MR=DH: DF; czyii

wst A + wst B: wst A — wst B = sty $\frac{A+B}{2}$: sty $\frac{A-B}{2}$ reszta iak wyżéy.

XXX. Po wyłożeniu tych twierdzeń, można będzie z łatwością wyrachować części tróykątów prostokréślnych we wszystkich przypadkach, iakie tylko wydarzyć się mogą.

A naprzód, co do tróykątów prostokątnych, niech będzie A kąt prosty, B i C dwa inne kąty tróykąta prostokątnego ABC; niech *a* oznacza przeciwprostokątną, *b* bok przeciwny kątowi B, *c* bok przeciwny kątowi C. Ponieważ w tróykącie prostokątnym summa dwóch kątów ostrych B i C równa się iednemu prostemu, więc kąty te są dopełnieniem ieden drugiego; a zatém wst C= dos B, wst B=dos C; podobnież sty C=dot B, sty B=dot C.

Dla rozwiązania tróykąta, czyli dla wyrażenia części iego w liczbach, iakośmy iuż uważali, potrzeba mieć trzy części dane, między któremi

powinien być przynaymniéy ieden bok. W tróykącie prostokątnym ABC kąt A iest zawsze wiadomy iako prosty: dla rozwiązania więc tróykąta prostokątnego dosyć iest oprócz kąta prostego, mieć dwie części dane, między któremi powinien być przynaymniéy ieden bok.

Dwie te dane części mogą być 1*ód* przeciwprostokątna i ieden z boków przyległych kątowi prostemu; 2*re* dwa boki przyległe kątowi prostemu; 3*cie* przeciwprostokątna i ieden z kątów ostrych; 4*te* ieden z boków przyległych kątowi prostemu i ieden z kątów ostrych. Wszystkie więc przypadki rozwiązywania tróykątów prostokątnych sprowadzić można do cztérech następuiących zagadnień.

XXXI. Zagad. 1. *Maiąc daną przeciwprostokątną* a *i bok* b, *znaleźć dwa kąty ostre B i* C *i bok trzeci c.*

Rozw. a: *b*=R: wst B (XXIV); więc wst B = $\frac{R.\ b}{a}$; czyli odbywaiąc działanie za pomocą logarytmów, log wst B=log R+log *b* −log *a*. Znalazłszy kąt B, łatwo będzie znaleźć kąt C, który iest kąta B dopełnieniem. Można także kąt C znaleźć przez następuiącą proporcyą: *a*: *b*= R: dos C.

Co się tycze boku *c*, ten znaleźć można dwoma sposobami: 1*ód* znalazłszy kąt C. będzie R: sty C=*b*: *c* (XXV), a zatém $c = \frac{\text{Sty C}.\ b}{R}$; czyli log *c*=log sty C+log *b* −log R. 2*re*, $c^2 = a^2 - b^2$ (168); a zatém $c = \sqrt{a^2 - b^2}$; czyli $c = \sqrt{(a+b)(a-b)}$; czyli log $c = \frac{1}{2}\log(a+b) + \frac{1}{2}\log(a-b)$.

XXXII. Zagad. 2. *Maiąc dane dwa boki* b *i* c *przyległe kątowi prostemu, znaleźć przeciwprostokątną* a *i dwa kąty ostre B i C.*

Rozw. c: b=R: sty B (XXV): więc sty B =dot C=$\frac{R.\ b}{c}$ Znalazłszy kąt C, przeciwprostokątną *a* znaydziemy przez proporcyą: wst B: R =*b*: *a*. Możnaby także znaleźć przeciwprostokątną *a*, przez następuiące równanie: $a^2 = b^2 + c^2$ (161); więc $a = \sqrt{b^2 + c^2}$; lecz wyrażenie to nie iest wygodne do rachunku przez logarytmy.

XXXIII. Zagad. 3. *Maiąc daną przeciwprostokątną* a *i ieden kąt ostry B, znaleźć dwa boki* b *i* c.

Rozw. R: wst B=*a*: *b*; R: dos B=*a*: c więc $b = \frac{\text{wst B. } a}{R}$; $c = \frac{\text{dos B. } a}{R}$.

XXXIV. Zagad. *Maiąc dany bok* b *przyległy kątowi prostemu, i ieden z kątów ostrych, znaleźć bok drugi i przeciwprostokątną.*

Rozw. wst B: R = *b*: *a*; R: Bdot=*b*: *c*. Więc $a = \frac{R.\ b}{\text{wst B}}$; $c = \frac{\text{dot B. } b}{R}$

XXXV. Co się tycze tróykątów ostrokątnych i roztwartokątnych, wtych oznaczywszy trzy kąty przez A, B, C, a boki tym kątom przeciwne przez *a*, *b*, *c*. ażeby za pomocą trzech danych części wyrachować inne trzy części tróykąta, potrzeba mieć dane albo ieden bok *a* i dwa którekolwiek kąty; albo dwa boki *a* i *b*, i kąt A przeciwny bokowi danemu *a*; albo dwa boki *a* i *b* i kąt C między niemi zawarty; albo nakoniec trzy

boki *a*, *b* i c. Wszystkie więc przypadki rozwiązywania tych tróykątów można sprowadzić do cztérech następuiących zagadnień.

XXXVI. Zag. 1. *Maiąc dany bok* a *i dwa kąty tróykąta, znaleźć dwa inne boki* b i c.

Rozw. wst A: wst B=*a*: *b*; wst A: wst C =*a*: *c* (XXV); więc

$b = \frac{\text{wst B. } a}{\text{wst A}}$; $c = \frac{\text{wst C. } a}{\text{wst A}}$.

XXXVII. Zagad. 2. *Maiąc dane dwa boki* a *i* c *i kąt A przeciwny iednemu z boków danych, znaleźć bok trzeci* b *i dwa inne kąty B i C.*

Rozw. *a*: *c*= wst A: wst: C; więc wst C= $\frac{\text{wst A. } c}{a}$. Maiąc wiadomy kąt A i C, znaydziemy tém samém i kąt B. Dla znalezienia zaś boku *b*, ułożymy następuiącą proporcyą:

wst A: wst B= *a*: *b*.

Uwaga. Jeżeli kąt A iest ostry, a bok *a* <c; na ten czas znaleziona przez powyższą proporcyą wst C= $\frac{\text{wst A. } c}{a}$, będzie albo wstawą kąta *bca* fig. 49, albo też wstawą kąta *bća*; który iest spełnieniem kąta *bca*, iakośmy to uważali wyżéy (91). W tym więc przypadku podwóyne być może rozwiązanie.

XXXVIII. Zagad. 3. *Maiąc dane dwa boki* a *i* b *i kąt C między niemi zawarty, znaleźć dwa inne kąty A i B i bok trzeci* c.

Rozw. Ponieważ kąt C iest wiadomy, tém

samém wiadoma będzie summa dwóch innych kątów A + B, i połowa téy summy $\frac{A+B}{2}$. Jeżeli więc $a > b$, a tém samém A > B; znaydziemy połowę różnicy tychże kątów A i B, przez następuiącą proporcyą:

$$a+b : a-b = \text{sty}\frac{A+B}{2} : \text{sty}\frac{A-B}{2} \quad \text{(XXIX)}.$$

Znalazłszy połowę różnicy, znaydziemy kąt większy A i mnieyszy B. Jakoż niech s oznacza summę, r różnicę tych dwóch kątów: czyli niech będzie $A+B=s$, $A-B=r$. Strony tych dwóch równań raz do siebie dodawszy, drugi raz od siebie odiąwszy, wypadnie $2A=s+r$; $2B=s-r$; więc $A=\frac{1}{2}s+\frac{1}{2}r$, $B=\frac{1}{2}s-\frac{1}{2}r$. To iest, kąt większy A równa się połowie ich summy więcéy połową różnicy; kąt mnieyszy B równa się połowie summy mniéy połową różnicy.

Znalazłszy dwa kąty A i B, bok trzeci c znaydziemy przez proporcyą: wst A: wst C = a: c.

XXXIX. Zag. 4. *Maiąc dane trzy boki* a,b,c, *znaleźć trzy kąty A, B, C.*

Rozw. dos A: R = $b^2+c^2-a^2$: $2bc$ (XXVII).

więc dos $A = R \times \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$. Tymże sposobem znaydziemy dwa inne kąty.

Możnaby także zagadnienie to rozwiązać sposobem następuiącym: niech będzie tróykąt ACB fig. 137, w którym wszystkie trzy boki są wiadome, i w którym kąt C iest naywiększy i bok AC > BC, czyli $b > a$. Z wierzchołka kąta C spuściwszy CD prostopadłą do AB, czyli do c, i odcinek większy AD oznaczywszy przez x, odcinek mnieyszy DB przez y, będzie

c: $b+a = b-a$: $x-y$ (XXVIII). Znalazłszy różnicę odcinków $x-y$, wiedząc prócz tego ich summę $x+y=o$, znaydziemy odcinek większy AD, i mnieyszy BD, z których piérwszy równa się połowie ich summy więcéy połową różnicy, drugi równa się połowie ich summy mniéy połową różnicy. W tróykątach zatém prostokątnych ACD, BCD znaydziemy kąty A i B sposobem podanym wyżéy (XXXI), maiąc zaś wiadome te dwa kąty, w tróykącie ABC znaydziemy kąt C, który iest ich spełnieniem.

Jeżeli kąt A iest roztwarty fig. 72. *pod liczbą* 2. na ten czas z proporcyi c: $a+b = a-b$ $2x+c$ (XXVIII), znaydziemy summę dwóch odcinków BD + AD; a że różnica tychże odcinków BD − AD = AB, maiąc zatém wiadomą summę i różnicę odcinków, a tém samém połowę ich summy i połowę różnicy, znaydziemy odcinek większy BD i mnieyszy AD. W tróykątach zatém prostokątnych BDC, ADC, w których przeciwprostokątne BC, AC i boki BD, AD są wiadome, znaydziemy kąt B i CAD (XXXI), a tém samém i kąt CAB, który iest spełnieniem kąta CAD.

XL. Zagadnienia te z łatwością być mogą przystosowane do Jeometryi praktycznéy wymiar gruntów za przedmiot maiącéy, iako też do innych wszystkich umieiętności, matematyczno fizycznych: Przytoczymy tu kilka przykładów potocznych.

Przykład 1. Chcąc zmierzyć na gruncie z punktu A fig. 139. odległość niedostępnego

przedmiotu X, trzeba wymierzyć na gruncie podstawę AB, i za pomocą narzędzia zwanego *kątomiarem*, wymierzyć dwa kąty XAB, XBA zawarte między podstawą AB i promieniami ocznemi AX, BX z punktów A i B do przedmiotu X wykierowanemi; tym sposobem utworzy się tróykąt ABX, w którym bok ieden AB i wszystkie trzy kąty są wiadome. Szukaną więc odległość AX znaydziemy przez proporcyą; wst AXB: wst ABX =AB: AX (XXVI), więc log AX=log AB+log wst ABX—log wst AXB.

Daymy że AB=588 prętów; kąt BAX=103° 30′ podług dawnego podziału, kąt ABX=36° 15′; będzie więc kąt AXB=40° 15′.

Logarytm AB - - - - -	2,7693773
Log. wst ABX - - - - -	9,7718150
Summa - - - -	12,5411923
Log. wst AXB - - - -	9,8103159
Log. AX - - - - -	2,7308764.

Logarytm ten odpowiada liczbie 538, 1; będzie więc, AX=538, 1 prętów.

Chcąc z tegoż punktu A znaleźć odległość drugiego przedmiotu niedostępnego Y, trzeba wymierzyć kąty ABY, YAB: tym sposobem utworzy się tróykąt AYB, w którym bok ieden AB i wszystkie trzy kąty są wiadome. Szukaną więc odległość AY znaydziemy przez proporcyą, wst AYB: wst ABY=AB: AY. Daymy że kąt BAY=35°6′, kąt ABY=118° 48′; będzie więc kąt AYB =26° 6′. Odbywszy działanie za pomocą logarytmów, iak wyżey, znaydziemy AY=1171 prętów.

XLI. *Przykład* 2. Chcąc znaleźć odległość dwóch przedmiotów niedostępnych X, Y, trzeba

wynaleźć AX i AY, iak w przykładzie poprzedzaiącym; kąt XAY będzie wiadomy gdyż kąt ten iest różnicą dwóch kątów wiadomych BAX =103° 30′. i BAY=35° 6′: będzie więc kąt XAY=68° 24′. W tróykącie zatém AXY maiąc wiadome z przykładu 1go dwa boki AY, AX i kąt między niemi zawarty XAY, znaydziemy styczną połowy summy dwóch innych kątów przez proporcyą:

$$AY+AX:AY-AX=\text{sty}\frac{AXY+XYA}{2}:\text{sty}\frac{AXY-XYA}{2}$$

(XXIX). Odbywszy działanie za pomocą logarytmów, wypadnie $\frac{AXY-XYA}{2}=28°, 35'$ Że zaś $\frac{AXY+XYA}{2}=55°, 48'$; a kąt większy AXY równy połowie summy obudwu więcéy połową ich różnicy, kąt mniéyszy XYA równy połowie ich summy mniéy połową różnicy; będzie więc kąt AXY=84° 23′, kąt XYA=27° 13′: W tróykącie zatém XYA maiąc wiadome wszystkie kąty i bok AX, znaydziemy XY przez proporcyą, wst XYA: wst XAY=AX: XY. (XXVI). Odbywszy działanie za pomocą logarytmów, wypadnie XY=1093 prętów.

XLII. *Przykład* 3. Niech będzie DX fig. 140, szerokość rzeki którą zmierzyć potrzeba: wymierzywszy na gruncie podstawę AB równoodległe od koryta rzeki, która tém samém będzie prostopadłą do szerokości rzeki DX, i za pomocą kątomiaru wyznaczywszy kąt ABX zawarty między podstawą AB i promieniem ocznym BX wy-

kierowanym z punktu B do przedmiotu X będącego na drugim brzegu rzeki; będzie tróykąt BAX prostokątny przy A, w którym kąt B i bok AB iest wiadomy, bok zatém AX znaydziemy przez proporcyą, R: sty B=AB: AX (XXV). Znalazłszy tym sposobem AX, i odiąwszy AD odległość podstawy AB od brzegu rzeki, zostanie DX szerokość szukana (*).

Gdyby AX była wysokość wieży, którą potrzeba zmierzyć, na ten czas wymierzywszy podstawę AF, i z punktu F za pomocą kątomiaru wymierzywszy kąt DCX zawarty między liniią poziomą DC równoległą od podstawy AF, i promieniem ocznym CX wykierowanym z punktu C do wierzchołka wieży X; utworzy się tróykąt prostokątny CDX, w którym bok CD czyli AF, i kąt DCX są wiadome, bok zatém DX znaydziemy przez proporcyą, R: sty DCX=DC: DX. Znalazłszy tym sposobem DX, i dodawszy wysokość narzędzia CF czyli AD, będzie AX wysokość szukana.

Jeżeli punkt A iest niedostępny, natenczas dla zmierzenia wysokośel AX, można oznaczyć odległość CX sposobem takim iakiego użyliśmy wprzykładzie 1wszym: w tróykącie zatém prostokątnym CDX maiąc wiadomy bok CX i kąt DCX znaydziemy DX przez proporcyą, R: wst DCX=CX: DX.

(*) *W braniu podstaw na gruncie trzeba zachować tę ważną przestrogę, aby podstawy te nie były ani zbyt małe, ani zbyt wielkie względem odległości szukanéy. Tu* np. *podstawa AB może wynosić około połowy odległości AX.*

XLIII. *Przykład* 4. Maiąc dane na mappie trzy punkta A, B, C fig. 141, chcąc wyznaczyć położenie 4go punktu M leżącego na téyże co i pierwsze trzy punkta płaszczyznie, i z którego kąty AMB, AMC są wymierzone; trzeba na linii AB wykreślić odcinek koła AMDB, w którymby się zmieścił kąt dany BMA (135); potém wykreślić drugi odcinek koła MAC, w którymby się zmieścił drugi kąt dany AMC; dwa łuki przetną się w punktach A i M; punkt M będzie punktem szukanym: gdyż ze wszystkich punktów łuku AMDB można widzieć AB pod kątem równym kątowi danemu AMB, i ze wszystkich punktów łuku AMC można widzieć AC pod kątem równym kątowi danemu AMC; więc punkt M, w którym się te dwa łuki przecinaią, iest punktem takim, z którego widzieć można razem AB i AC pod kątami równemi kątom AMB, AMC.

W tróykącie ABC, którego trzy boki będące odległościami trzech danych punktów A, B i C, są wiadome, znaydziemy kąt BAC podług formuły podanéy wyżéy. Poprowadziwszy średnicę AD, i cięciwę DB, w tróykącie BDA prostokątnym przy B, iest bok AB i kąt przeciwny BDA=AMB wiadomy: znaydziemy więc AD.

Podobnież poprowadziwszy średnicę AE i cięciwę CE, w tróykącie ACE prostokątnym przy C, bok AC iest wiadomy z założenia, kąt CAE=AMC—90°: gdyż miara kąta CAE to iest połowa łuku CE równa się połowie łuku będącéy miarą kąta AMC zmnieyszonéy czwartą częścią okręgu; o czém łatwo przekonać się można. W tróykącie zatém ACE maiąc wiadomy

bok AC i kąt przyległy CAE, znaydziemy AE (XXXIV).

Poprowadziwszy liniie proste MD i ME, ponieważ kąty AMD i AME są proste iako zawarte w półkolu; więc dwie liniie ME i MD czynią iednę liniią prostą DE. Liniia zatém AM którey długość i położenie oznaczyć potrzeba, iest wysokością tróykąta DAE w którym boki AD i AE są wiadome, i kąt między niemi zawarty DAE równa się summie dwóch kątów wiadomych BAC i CAE mniey kątem DAB, który iest także wiadomy iako dopełnienie kąta wiadomego BDA w tróykącie prostokątnym ABD; znaydziemy więc kąt ADE (XXXVIII).

Nakoniec w tróykącie prostokątnym ADM znaydziemy AM. Odległość ta AM i kąt BAM =DAB+DAM oznaczaią położenie punktu M.

XLIV. W wielu przypadkach można także w Jeometryi użyć wygodnie formuł trygonometrycznych, iak się okaże z następuiących zagadnień.

Zagad. 1. *Maiąc wiadome dwa boki tróykąta i kąt między niemi zawarty, znaleźć iego powiérzchnią.*

Rozw. Powiérzchnia tróykąta ABC fig. 137. równa iest połowie iloczynu iego podstawy AB przez wysokość CD (149). Oznaczywszy zatém powiérzchnią tróyką:a przez P, będzie $P=\frac{AB\times CD}{2}$

W tróykącie prostokątnym ACD iest, R: wst A =AC: CD (XXIV): więc CD=AC$\times$ wst A. Ważność tę położywszy w równaniu powyższem; będzie $P=\frac{AB\times AC}{2}\times$ wst A; to iest, *powiérzchnia tróykąta równa się połowie iloczynu dwóch iego boków rozmnożonego przez wstawę kąta między temi bokami zawartego.*

XLV. Zagad. 2. *Maiąc wiadome trzy boki tróykąta, wyrachować promień koła na nim opisanego.*

Rozw. W tróykącie ABC fig. 142, oznaczywszy boki przeciwne kątom A,B,C, przez a, b, c, powiérzchnią tróykąta przez P, a BS szukany promień koła opisanego przez x; będzie podług zagadnienia poprzedzaiącego, $P=\frac{bc}{2}\times$wst A.

Poprowadziwszy średnicę BD i cięciwę CD, w tróykącie prostokątnym BCD iest, R: wst CDB =BD: BC. A że kąt CDB=A, BD=2BS=$2x$, BC=a, R=1; więc 1: wst A=$2x$: a; a zatém wst A=$\frac{a}{2x}$. Ważność tę położywszy w równaniu powyższém, będzie $P=\frac{abc}{4x}$; więc $x=\frac{abc}{4P}$. To iest, *promień koła na tróykącie opisanego, rowna się iloczynowi trzech boków tróykąta podzielonemu przez wziętą 4 razy iego powiérzchnią.*

Co się tycze SF promienia koła wpisanego w tróykąt ABC fig. 119, łatwo iest okazać, że promień ten równa się powiérzchni tróykąta podzielonéy przez połowę summy trzech iego boków.

XLVI. Zag. 3. *Wynaleźć stosunek przybliżony okręgu do średnicy.*

Rozw. Ponieważ łuk co do długości zawsze iest większy od swoiéy wstawy, a mnieyszy od stycznéy; różnica zaś między wstawą i styczną tém iest mnieysza, im iest mniéyszy łuk (XIX); znalazłszy więc sposobem podanym wyżéy (XX), ważność wstawy i stycznéy łuku równego *np.* iednéy sekundzie, i obie te ważności podwoiwszy znaydziemy dwie liczby bardzo mało między so, bą różniące się, z których piérwsza będąca ważnością cięciwy łuku równego dwom sekundom (XVII), iest cokolwiek od tego łuku mniéysza, druga zaś cokolwiek od tegoż łuku większa: liczba zatém środek między niemi trzymaiąca, będzie ważnością łuku równego dwom sekundom. Wziąwszy potém obie te podwoione ważności tyle razy, ile razy łuk równy dwom sekundom mieści się w połokręgu, otrzymamy dwie liczby bardzo mało między sobą różniące się, iednę mnieyszą od ważności półokręgu, drugą większą. Liczba zatém środek między temi dwiema liczbami trzymaiąca, może być wziętą za ważność półokręgu, którą podwoiwszy i porównawszy z ważnością średnicy, otrzymamy przybliżony stosunek okręgu do średnicy.

XLVII. Do wyrachowania części tróykątów prostokréślnych, potrzebne są tylko styczne i dotyczne łuków mniéyszych od czwartéy części okręgu, a wstawy i dostawy łuków mniéyszych od połowy okręgu; o czém łatwo przekonać się można przeyrzawszy z uwagą podane wyżéy zagadnienia. Lecz w różnych przystosowaniach Trygometryi potrzebne są częstokroć łuki nie tylko większe od połowy okręgu, ale też większe od całego okręgu, a nawet łuki równe kilku okręgom koła. Wypada więc poznać

ważność wstaw, dostaw i t. d. łuków tak wielkich iak tylko być mogą.

Wystawmy sobie, że promień SM. fig. 143. może się około punktu S obracać tak, że punkt M obiega cały okrąg w kierunku ACBDA. Rzeczą iest przez się widoczną, że im bardziéy punkt M oddali się od punktu A, tém będzie większy łuk AM. Gdy punkt M znayduie się na punkcie A, to iest, gdy łuk AM=o, iego wstawa iest także o, i styczna o. Jakoż wstawa MP iest odległością punktu M od promienia AS: kiedy więc punkt M znayduie się na punkcie A. odległość ta musi być o; toż mówić o stycznéy AT która także musi być o, gdy punkt M znayduie się na punkcie A; w ten czas bowiem sieczna ST przechodząca przez punkt M. musiałaby przechodzić przez punkt A.

Że zaś dostawa łuku równa się piérwiastkowi różnicy między kwadratem promienia i kwadratem wstawy (XI); kiedy więc łuku owstawa iest o, dostawa tegoż łuku musi być równa promieniowi. I w rzeczy samey dostawa łuku iest wstawa dopełnienia tegoż łuku; dopełnieniem zaś łuku o iest łuk równy 4téy części okręgu, którego wstawą iest promień. A że sieczna łuku równa się kwadratowi promienia podzielonemu przez dostawę tegoż łuku (XI): kiedy więc łuku o dostawą iest promień, sieczną łuku o będzie kwadrat promienia podzielony przez promień, czyli sieczna łuku o iest promień. Co się tycze dosiecznéy i dotycznéy łuku o, z tych piérwsza równa iest siecznéy, druga stycznéy dopełnienia łuku o, czyli 4téy części okręgu. Dla poznania więc ważności dosiecznéy i dotycznéy łuku o,

trzeba piérwéy poznać sieczną i styczną 4téy części okręgu.

Oznaczywszy zatém promień przez R, będzie wst 0=0, sty 0=0, dos 0=R, siec 0=R.

XLVIII. Im bardziéy punkt M przybliża się do C, czyli im bardziéy rośnie łuk AM, tém bardziéy powiększa się iego wstawa, styczna i sieczna, a tém bardziéy zmniéysza się iego dostawa, dotyczna i dosieczna; co iest przez się widoczna. Gdy punkt M znayduie się w połowie drogi od A do C, czyli gdy łuk AM równa się 8méy części okręgu, i iego dopełnienie czyli łuk MC równa się także 8méy części okręgu; na ten czas wstawa równa iest dostawie, styczna równa dotycznéy, sieczna równa dosiecznéy. Nadto w tróykącie AST prostokątnym przy A, kąt AST = ATS: gdyż miarą piérwszego iest łuk AM równy 8méy części okręgu, czyli 45°; a zatém i dopełnienie iego, to iest, kąt ATS=45°. Więc bok AT=AS; to iest, styczna 8méy części okręgu równa się promieniowi. I w rzeczy saméy ponieważ styczna łuku równa się iloczynowi promienia i wstawy podzielonemu przez dostawę tegoż łuku (XI); kiedy więc wstawa i dostawa 8méy części okręgu są sobie równe, styczna 8méy części okręgu równa będzie promieniowi. Toż mówić o dotycznéy tegoż łuku. Że zaś okrąg koła maiącego R za promień równa się $2\pi R$ (262) a tem samém kiedy R=1, okrąg koła $=2\pi$; biorąc więc około którego promień=1, będzie sty $\frac{1}{4}\pi = 1$, dot $\frac{1}{4}\pi = 1$. Ważność wstawy i dostawy tego łuku wyprowadziliśmy wyżéy (XX). A co się tycze ważności siecznéy i dosiecznéy tegoż łuku, te łatwo iest wyprowadzić z równań podanych wyżéy (XI).

XLIX. Gdy punkt M przyydzie do C, czyli gdy łuk AM równa się 4téy części okręgu, na ten czas wstawa łuku tego będzie promień, a dostawa = o, iakośmy iuż powiedzieli wyżéy (XVIII).

Ważność ta wstawy i dostawy 4téy części okręgu, może być także następuiącym sposobem wyprowadzona. Ponieważ dostawa łuku iest wstawa iego dopełnienia, a dopełnieniem łuku o iest łuk równy 4téy części okręgu; więc dostawa łuku o, to iest promień, będzie wstawą czwartéy części okręgu; a wstawa łuku o, to iest o, będzie dostawą 4téy części okręgu.

Ponieważ styczna AT iest równoodległa od promienia CS przechodzącego przez drugi koniec łuku AC równego 4téy części okręgu; więc dwie te liniie zeyść się z sobą nie mogą, choćby naydaléy były przedłużone.

Styczna zatém 4téy części okręgu iest ilością nieskończoną: ilość nieskończona wyraża się zwyczaynie znakiem takim ∞. Będzie więc sty $\frac{1}{2}\pi = \infty$.

Dopełnieniem 4téy części okręgu iest łuk o. Styczna zatém łuku o, to iest o, będzie dotyczną 4téy części okręgu; a styczna 4téy części okręgu czyli ∞, będzie dotyczną łuku o; czyli do $\frac{1}{2}\pi = o$; dot $o = \infty$ (*).

Co się tycze siecznéy i dosiecznéy łuku równego 4tey części okręgu, z tych piérwsza iest

(*) *Ponieważ* sty $a = \frac{R.\ wst\ a}{dos\ a}$ (XI); *a wst* $\frac{1}{2}\pi = R.\ dos\ \frac{1}{2}\pi = o$; *będzie więc sty* $\frac{1}{2}\pi = \frac{R^2}{o}$; *ułomek ten oznacza także ilość nieskończoną.*

ilością nieskończoną, druga zaś równa się promieniowi który iest sieczną łuku 0, będącego dopełnieniem 4téy części okręgu; co i stąd iest rzeczą widoczną, że ponieważ dosieczna łuku równa się kwadratowi promienia podzielonemu przez wstawę (XI); kiedy więc wstawa 4téy części okręgu iest promień, dosieczna 4téy części okręgu będzie kwadrat promienia podzielony przez promień, czyli dosiecz $\frac{1}{2}\pi = 1$.

L. Gdy punkt M oddala się od C ku B, wstawy zmnieyszaią się, a dostawy rosną. I tak wstawa łuku AN większego od 4téy części okręgu iest NQ, a dostawa NG czyli SQ, która iest odiemna iak się wyżéy okazało (XVI.)

Że zaś sty AN $= \frac{\text{R. wst AN}}{\text{dos AN}}$ (XI), kiedy więc dostawa łuku AN iest odiemna, styczna tegoż łuku powinna być odiemna: iloraz bowiem ilości dodanéy podzieloney przez ilość odiemną iest odiemny. I w rzeczy saméy styczna łuku AN iest część prostopadłéy AT zawarta między promieniem AS i sieczną NS przez drugi koniec tego łuku poprowadzoną (VIII); lecz sieczna ta dostatecznie przedłużona, zeydzie się z liniią AT w punkcie *t* poniżéy średnicy AB. Styczna zatém łuku AN iest liniia A*t* równa stycznéy AT, lecz maiąca kierunek odwrotny, a tém samém odiemna. Nadto ponieważ A*t* iest styczną łuku A*m*, który iest spełnieniem łuku AN, gdyż N*m* iest średnica; więc *styczna łuku większego od 4téy części okręgu, równa się stycznéy iego spełnienia wziętéy ze znakiem*,— Toż mówić o dotycznéy tegoż łuku, którą iest liniia CF równa CE dotycznéy łuku AM, lecz maiąca kierunek

odwrotny, a tém samém odiemna. A że sieczna łuku równa się kwadratowi promienia podzielonemu przez dostawę, a dosieczna równa się kwadratowi promienia podzielonemu przez wstawę; kiedy więc dostawa łuku większego od 4téy części okręgu iest odiemna, będzie sieczna tego łuku odiemna, a dosieczna dodayna. Jakoż sieczna łuku AN iest S*t*, dosieczna zaś iest SF.

LI. Gdy punkt M znayduie się na punkcie B, czyli gdy łuk AM równa się połowie okręgu, będzie wstawa $=0$, dostawa $=-1$, styczna $=0$; dotyczna $=-\infty$: sieczna $=-1$ dosieczna $=\infty$; co iest łatwo wyprowadzić z wiadomości poprzedzaiących.

LII. Gdy punkt M znaydnie się na punkcie *n*, czyli gdy łuk AM iest większy od połowy okręgu, iak iest łuk ACB*n*, wstawa iego *n*Q znayduiąca się poniżéy średnicy AB, ma kierunek odwrotny wstawom NQ, MP znayduiącym się powyżéy średnicy AB; wstawa zatém łuku większego od połowy okręgu iest odiemna: Wstawa ta *n*Q powiększa się, a dostawa SQ zmnieysza się coraz bardziéy, w miarę przybliżania się punktu M do punktu D, tak dalece, że w punkcie D, gdzie łuk ABD $=\frac{3}{4}$ okręgu, wstawą iest promień DS wzięty odiemnie, dostawa zaś równa się 0. Nakoniec gdy punkt M przybliża się do punktu A, czyli gdy łuki są większe od $\frac{3}{4}$ okręgu, iak iest *np*, łuk AB*m*, na ten czas wstawa *m*P zaczyna się zmniéyszać, lecz iest zawsze odiemna, dostawa zaś SP zaczyna się powiększać, i iest znowu dodayna, aż do punktu A, gdzie wstawa równa się 0, a dostawa promieniowi. Wstawą zatém łuku równego okręgowi iest *o*, dostawą zaś promień.

Co się tycze ważności styczney, dotyczney, sieczney i dosieczney tak łuku większego odpołowy okręgu, i od $\frac{3}{4}$ okręgu, iako też łuku równego $\frac{3}{4}$ okręgu i całemu okręgowi, te łatwo iest wyprowadzić za pomocą równań podanych wyżéy (XI).

LIII. Gdyby punkt M powróciwszy do punktu A, rozpoczął nowy obrot w tymże samym kierunku, w iakim odbył obrot piérwszy, mielibyśmy łuki większe od całego okręgu, a nawet większe od dwóch, trzech i t. d, okręgów, gdyby punkt M po ukończonym obrocie drugim, rozpoczął obrot trzeci, potém czwarty i t. d. Lecz wszystkie te łuki maią zawsze początek w punkcie A, a koniec w punkcie M; a zatém ich wstawy, dostawy i t. d. będą te same, iakie są łuków AM wykréślonych przez punkt M w czasie piérwszego obrotu. Oznaczywszy więc łuk iakikolwiek przez a, będzie wst a = wst $(2\pi + a)$ = wst $(4\pi + a)$ = wst $(6\pi + a)$ i t. d. Toż mówió o dostawach, stycznych i t. d.

Stąd się okazuie, że od punktu A fig. 143. aż do punktu B, gdzie łuk ACB równa się połowie okręgu, wstawy są dodayne; od punktu zaś B, aż do punktu A, gdzie łuk ACBDA równy okręgowi, wstawy są odiemne. 2re, że od punktu A do C, gdzie łuk AC rowna się 4téy części okręgu, dostawy są dodayne; od punktu C do D, gdzie łuk ACBD równa się $\frac{3}{4}$ okręgu, dostawy są odiemne; od punktu D do A, gdzie łuk ACBDA równa się okręgowi, dostawy są dodayne. Granicą zatém wstaw dodaynych i odiemnych iest średnica AB; granicą dostaw dodaynych i odiemnych iest średnica DC prostopadła do średnicy AB.

LIV. Ponieważ sty $a = \frac{\text{wst } a}{\text{dost } a}$, dot $a = \frac{\text{dos } a}{\text{wst } a}$; styczna więc i dotyczna łuku wtenczas będzie dodayna, kiedy iego wstawa i dostawa maią przed sobą iednakowe znaki; co ma mieysce od punktu A do C i od punktu B do D. Kiedy zaś wstawa i dostawa maią przed sobą znaki odmienne, iak iest od punktu C do B, i od punktu D do A, na ten czas styczna i dotyczna będzie odiemna. I tak łuk ACn, którego wstawa nQ i dostawa SQ iest odiemna; powinien mieć tak styczną iak dotyczną dodayną; i w rzeczy saméy styczną łuku tego iest liniia AT, dotyczną zaś liniia CE będąca styczną łuku CBn, który iest dopełnieniem łuku ACn: różnicą bowiem między temi dwoma łukami iest łuk AMC = czwartéy części okręgu. Łuk zaś ACm, którego wstawa mP iest odiemna, a dostawa SP dodayna, ma styczną At i dotyczną CF odiemną. Skąd się okazuie że granicą stycznych dodaynych i odiemnych iest średnica AB, granicą dotycznych dodaynych i odiemnych iest średnica CD.

LV. Ponieważ siec $a = \frac{R^2}{\text{dos } a}$, dosiec $a = \frac{R^2}{\text{wst } a}$, łatwo stąd wniesiemy, których łuków sieczne i dosieczne mogą być brane za dodayne lub odiemne. Lecz uważać tu potrzeba, że sieczne i dosieczne, iako liniie przechodzące przez środek koła i przez koniec M łuku AM, ustawicznie odmieniaią położenie swoie względem dwóch średnic AB i CD do siebie prostopadłych; gdy tym cza-

sem wstawy i styczne są zawsze równoodległe od średnicy CD, dostawy zaś i dotyczne są zawsze równoodległe od średnicy AB. Przeto też dla siecznych i dosiecznych dodaynych i odiemnych nie można naznaczyć stałéy granicy.

LVI. Częstokroć w rachunku wypadaią łuki odiemne. Abyśmy poznali iakie są tych łuków wstawy i dostawy uważmy, że dwa łuki równe AM, A*m* fig. 143, z których piérwszy iest dodayny, drugi odiemny, maią wprawdzie równe wstawy PM i P*m*, lecz wstawa pierwszego iest dodayna drugiego odiemna; dostawa zaś obudwu iest ta sama PS. Podobnież dwa równe łuki ACN, AD*n*, z których piérwszy iest dodayny, drugi odiemny, maią równe wstawy NQ i *n*Q, lecz piérwsza dodayna, druga odiemna; dostawa zaś obudwu iest SQ. Stąd wniesiemy, *że wstawy łuków odiemnych są odiemne; dostawy zaś te same co i łuków dodaynych równych odiemnym.* Wogólności, wst$-a$=$-$wst$a$; dos$+a$=$+$dos$a$.

LVII. Z twierdzenia fundamentalnego wyżéy (XII) dowiedzionego, można ieszcze wyprowadzić wiele wniosków w dalszéy Matematyce istotnie potrzebnych: przytoczmy tu niektóre.

1*ód.* Dodawszy do siebie dwa piérwsze równania

$$\text{wst}(a+b)=\frac{\text{wst}\,a\,\text{dos}\,b+\text{wst}\,b\,\text{dos}\,a}{R}$$

$$\text{wst}(a-b)=\frac{\text{wst}\,a\,\text{dos}\,b-\text{wst}\,b\,\text{dos}\,a}{R}\text{; będzie}$$

$$\text{wst}(a+b)+\text{wst}(a-b)=\frac{2\,\text{wst}\,a\,\text{dos}\,b}{R}\text{, więc}$$

$$\text{wst}\,a\,\text{dos}\,b=\frac{R}{2}\,\text{wst}(a+b)+\frac{R}{2}\,\text{wst}(a-b).\ (1)$$

Drugie z dwóch tychże równań odiąwszy od piérwszego, zostanie

$$\text{wst}(a+b)-\text{wst}(a-b)=\frac{2\,\text{wst}\,b\,\text{dos}\,a}{R}\text{; więc}$$

$$\text{wst}\,b\,\text{dos}\,a=\frac{R}{2}\,\text{wst}(a+b)-\frac{R}{2}\,\text{wst}(a-b).\ (2)$$

Kiedy łuk $a=b$, formuły (1) i (2) zamieniaią się w następuiącą:

$$\text{wst}\,a.\text{dos}\,a=\frac{R}{2}\,\text{wst}\,2a\ .\ .\ .\ .\ .\ (3)$$

2*re.* Dodawszy do siebie dwa drugie równania twierdzenia fundamentalnego, które są:

$$\text{dos}(a+b)=\frac{\text{dos}\,a.\text{dos}\,b-\text{wst}\,a.\text{wst}\,b}{R}$$

$$\text{dos}(a-b)=\frac{\text{dos}\,a.\text{dos}\,b+\text{wst}\,a.\text{wst}\,b}{R}\text{, będzie}$$

$$\text{dos}(a+b)+\text{dos}(a-b)=\frac{2\,\text{dos}\,a.\text{dos}\,b}{R}\text{; więc}$$

$$\text{dos}\,a.\text{dos}\,b=\frac{R}{2}\,\text{dos}(a+b)+\frac{R}{2}\,\text{dos}(a-b).\ (4)$$

Piérwsze z dwóch tychże równań odiąwszy od drugiego, zostanie

$$\text{dos}(a-b)-\text{dos}(a+b)=\frac{2\,\text{wst}\,a.\text{wst}\,b}{R}\text{; więc}$$

$$\text{wst}\,a.\text{wst}\,b=\frac{R}{2}\,\text{dos}(a-b)-\frac{R}{2}\,\text{dos}(a+b).\ (5)$$

Kiedy łuk $a=b$, ponieważ w tym przypadku

dos $(a-b)=$ dos $o=$ R (XLVII); formuły zatém (4) i (5) zamienią się w następuiące

$$\text{dos}^2 a = \frac{R}{2}\text{dos } 2a + \frac{R^2}{2}, \quad \ldots\ldots, \quad (6)$$

$$\text{wst}^2 a = \frac{R^2}{2} - \frac{R}{2}\text{dos } 2a \quad \ldots\ldots \quad (7)$$

3*cie*. Uczyniwszy $a+b=p$, $a-b=q$, znaydziemy przez dodanie do siebie dwóch tych równań, $2a=p+q$, a przez odięcie drugiego od piérwszego, $2b=p-q$; a tém samém $a=\frac{1}{2}(p+q)$, $b=\frac{1}{2}(p-q)$. Ważności te położywszy zamiast a i b w formułach (1),(2), (4) i (5), i każdego równania stąd wynikłego podzieliwszy obie strony przez $\frac{R}{2}$, wypadnie

$$\text{wst } p + \text{wst } q = \frac{2}{R}\text{wst }\tfrac{1}{2}(p+q)\,\text{dos }\tfrac{1}{2}(p-q). \quad (8)$$

$$\text{wst } p - \text{wst } q = \frac{2}{R}\,\text{dos }\tfrac{1}{2}(p+q)\,\text{wst }\tfrac{1}{2}(p-q) \quad (9)$$

$$\text{dos } p + \text{dos } q = \frac{2}{R}\text{dos }\tfrac{1}{2}(p+q)\,\text{dos }\tfrac{1}{2}(p-q) \quad (10)$$

$$\text{dos } p - \text{dos } q = \frac{2}{R}\text{wst }\tfrac{1}{2}(p+q)\,\text{wst }\tfrac{1}{2}(p-q) \quad (11)$$

4*te*. Piérwsze równanie twierdzenia fundamentalnego podzieliwszy przez trzecie, wypadnie

$$\frac{\text{wst}(a+b)}{\text{dos}(a+b)} = \frac{\text{wst } a.\text{dos } b + \text{wst } b.\text{dos } a}{\text{dos } a.\text{dos } b - \text{wst } a.\text{wst } b}$$

A że $\frac{R.\text{wst } A}{\text{dos } A} = \text{sty } A$ (XI); czyli, $\frac{\text{wst } A}{\text{dos } A} = \frac{\text{sty } A}{R}$,

a tém samém

$$\frac{\text{wst}(a+b)}{\text{dos}(a+b)} = \frac{\text{sty}(a+b)}{R};$$

powyższe więc równanie zamieni się w następuiące:

$$\frac{\text{sty}(a+b)}{R} = \frac{\text{wst } a.\text{dos } b + \text{wst } b.\text{dos } a}{\text{dos } a.\text{dos } b - \text{wst } a.\text{wst } b} \quad \ldots \quad (a)$$

W równaniu tem z drugiéy strony podzieliwszy tak licznik iak mianownik przez dos a. dos b, wypadnie

$$\text{licznik} = \frac{\text{wst } a}{\text{dos } a} + \frac{\text{wst } b}{\text{dos } b} = \frac{\text{sty } a + \text{sty } b}{R},$$

$$\text{mianownik} = 1 - \frac{\text{wst } a.}{\text{dos } a} \times \frac{\text{wst } b}{\text{dos } b} = 1 - \frac{\text{sty } a.\,\text{sty } b}{R^2} = \frac{R^2 - \text{sty } a\,\text{sty } b}{R^2}$$

Położywszy ważności te zamiast licznika i mianownika drugiéy strony równania (*a*), i rozmnożywszy obie strony przez R, wypadnie

$$\text{sty } (a+b) = \frac{R^2(\text{sty } a + \text{sty } b)}{R^2 - \text{sty } a - \text{sty } b} \quad \ldots \quad (b)$$

Odbywszy podobne do poprzedzaiącego działanie z równaniem drugiém i czwartém twierdzenia fundamentalnego, znaydziemy

$$\text{sty } (a-b) = \frac{R^2(\text{sty } a - \text{sty } b)}{R^2 + \text{sty } a.\,\text{sty } b}$$

Równanie to złączywszy z równaniem(*b*)za pomocą podwóynego znaku $\pm$ będzie

$$\text{sty } (a \pm b) = \frac{R^2(\text{sty } a \pm \text{sty } b)}{R^2 \pm \text{sty } a.\,\text{sty } b} \quad \ldots \quad (12).$$

Kiedy łuk $a=b$, R$=1$, równanie (*b*) zamienia się w następuiące:

$$\text{sty } 2a = \frac{2\text{sty } \frac{1}{2}a}{1-\text{sty}^2 a} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13).$$

5*te*. Dwa tróykąty ARN, BRn, fig. 130 prostokątne przy A i B, w których kąt ARN=B*n*R, iako wewnętrzne naprzemianległe względem sieczney RN i dwóch równoodległych AR, B*n*, są podobne: będzie więc AN:AR=BR:R*n*; czyli oznaczaiąc liniie iak w ar: XI, sty*a*:R=R:dot*a*; więc sty$a = \frac{R^2}{\text{dot } a}$, dot$a = \frac{R^2}{\text{sty} a}$; a tém samém dot$(a+b) = \frac{R^2}{\text{sty}(a+b)}$

Z drugiéy strony równania tego zamiast sty$(a+b)$ położywszy ważność znalezioną w formule (12) będzie

$$\text{dot}(a+b) = \frac{R^2 - \text{sty } a.\text{sty } b}{\text{sty } a + \text{sty } b}$$

Że zaś sty $a = \frac{R^2}{\text{dot } a}$; z drugiéy więc strony równania ostatniego położywszy tak w liczniku iak w mianowniku $\frac{R^2}{\text{dot } a}, \frac{R^2}{\text{dot } b}$ zamiast sty a, sty b, wypadnie

$$\text{dot}(a+b) = \frac{\text{dot } a.\text{dot } b - R^2}{\text{dot } a + \text{dot } b} \quad . \quad : \quad . \quad (c)$$

Odbywszy to samo działanie z formułą (12) biorąc w niéy znak tylko dolny, znaydziemy

$$\text{dot}(a-b) = \frac{\text{dot}a.\text{dot } b + R^2}{\text{dot } b - \text{dot } a}.$$

Równanie to złączywszy z równaniem (c) za pomocą podwóynego znaku $\pm$, będzie

$$\text{dot}(a \pm b) = \frac{\text{dot } a.\text{dot } b \pm R^2}{\text{dot } b \pm \text{dot } a} \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

6*te*. Ponieważ $\text{sty}^2 a = \frac{R^2 \text{wst}^2 a}{\text{dos}^2 a}$, $\text{sty}^2 b = \frac{R^2 \text{wst}^2 b}{\text{dos}^2 b}$ (XI), więc

$$\text{sty}^2 a - \text{sty}^2 b = \frac{R^2 \text{wst}^2 a}{\text{dos}^2 a} - \frac{R^2 \text{wst}^2 b}{\text{dos}^2 b}$$

Drugą stronę sprowadziwszy do iednakowego mianownika, będzie

$$\text{sty}^2 a - \text{sty}^2 b = \frac{R^2(\text{wst}^2 a.\text{dos}^2 b - \text{wst}^2 b.\text{dos}^2 a)}{\text{dos}^2 a.\text{dos}^2 b} \quad (d)$$

Aże $\text{wst}^2 a.\text{dos}^2 b - \text{wst}^2 b.\text{dos}^2 a =$
$(\text{wst}a.\text{dos}b + \text{wst}b.\text{dos}a)(\text{wst}a.\text{dos}b - \text{wst}b.\text{dos}a) =$
$R\text{wst}(a+b)R\text{wst}(a-b) = R^2 \text{wst}(a+b)\text{wst}(a-b)$ (XII) równanie więc (d) zamieni się w następuiące:

$$\text{sty}^2 a - \text{sty}^2 b = \frac{R^2 \text{wst}(a+b)\text{wst}(a-b)}{\text{dos}^2 a.\text{dos}^2 b} \quad (15)$$

Ponieważ $\text{dot}^2 a = \frac{R^2.\text{dos}^2 a}{\text{wst}^2 a}$, $\text{dot}^2 b = \frac{R^2.\text{dos}^2 b}{\text{wst}^2 b}$ (XI), więc

$$\text{dot}^2 a - \text{dot}^2 b = \frac{R^2(\text{wst}^2 b\,\text{dos}^2 a - \text{wst}^2 a.\text{dos}^2 b)}{\text{wst}^2 a.\text{wst}^2 b}$$
$$= \frac{R^2(\text{wst}^2 a\text{dos}^2 b - \text{wst}^2 b\text{dos}^2 a)}{\text{wst}^2 a.\text{wst}^2 b}$$

Odbywszy z licznikiem drugiéy strony działanie podobne do poprzedzaiącego, znaydziemy

$$\text{dot}^2 a - \text{dot}^2 b = \frac{R^2 \text{wst}(a+b)\text{wst}(a-b)}{\text{wst}^2 a \text{wst}^2 b} \quad (16)$$

7*me*. Podzieliwszy formułę (8) przez (9), wypadnie.

$$\frac{wstp+wstq}{wstp-wstq}=\frac{wst\frac{1}{2}(p+q)}{dos\frac{1}{2}(p+q)}\times\frac{dos\frac{1}{2}(p-q)}{wst\frac{1}{2}(p-q)}\text{ ; więc}$$

$$\frac{wstp+wstq}{wstp-wstq}\times\frac{wst\frac{1}{2}(p-q)}{dos\frac{1}{2}(p-q)}=\frac{wst\frac{1}{2}(p+q)}{dos\frac{1}{2}(p+q)}\text{ ; czyli}$$

$$\frac{wstp+wstq}{wstp-wstq}\times\frac{sty\frac{1}{2}(p-q)}{R}=\frac{sty\frac{1}{2}(p+q)}{R}\text{ ; więc}$$

$$\frac{wstp+wstq}{wstp-wstq}=\frac{sty\frac{1}{2}(p+q)}{sty\frac{1}{2}(p-q)}\quad\ldots\ldots\quad(17)$$

Odbywszy podobne działanie *1ód* z formułą (8) i (10), *2re*, z formułą (8) i (11), *3cie* z formułą (9) i (10), *4te*, z formułą (9) i (11), nakoniec z formułą (10) i (11); znaydziemy,

$$\frac{wst\,p+wst\,q}{dos\,p+dos\,q}=\frac{sty\frac{1}{2}(p+q)}{R}\quad\ldots\quad(18)$$

$$\frac{wst\,p+wst\,q}{dos\,p-dos\,q}=\frac{dot\frac{1}{2}(p+q)}{R}\quad\ldots\quad(19)$$

$$\frac{wstp-wstq}{dosp+dosq}=\frac{st\frac{1}{2}(p-q)}{R}\quad\ldots\ldots\quad(20)$$

$$\frac{wstp-wstq}{dosp-dosq}=\frac{dot\frac{1}{2}(p+q)}{R}\quad\ldots\ldots\quad(21)$$

$$\frac{dosp+dosq}{dosp-dosq}=\frac{dot\frac{1}{2}(p-q}{sty\frac{1}{2}(p-q)}\quad\ldots\ldots\quad(e)$$

Że zaś $\frac{R^2}{dosp}=siecp$, $\frac{R^2}{dos\,q}=siecq$ (XI); atémsamém

$$dos\,p=\frac{R^2}{siecp}, dosq=\frac{R^2}{siec\,q}\text{ ; będzie więc}$$

$$\frac{dosp+dosq}{dosp-dosq}=\frac{R^2}{siecp+siecq}\times\frac{siecp-siecq}{R^2}=$$

$$\frac{siecp-siecq}{siecp+sieq}\text{ ;}$$

można więc zamiast równania (*e*) napisać następuiące

$$\frac{dosp+dosq}{dosp-dosq}=\frac{dot\frac{1}{2}(p-q)}{sty\frac{1}{2}(p-q)}=\frac{siecp-siecq}{siecp+siecq}\quad(22)$$

8*me*. Ponieważ $wst\,o=o$, $dos\,o=R$ (XVIII), $sty\,o=o$, $dot\,o=R$ (XLVII); kiedy więc łuk $q=o$, formuły (18) i (19) zamieniaią się w następuiące:

$$\frac{wst\,p}{R+dos\,p}=\frac{sty\frac{1}{2}p}{R}\quad(23)$$

$$\frac{wst\,p}{dos\,p-R}=\frac{dot\frac{1}{2}p}{R}\text{ ; czyli}$$

$$\frac{wst\,p}{R-dos\,p}=\frac{dot\frac{1}{2}p}{R}\quad\ldots\ldots\quad(24)$$

9*te*. $sty\,a=\frac{R\,wst\,a}{dos\,a}=\frac{R.wst\,a}{\sqrt{R^2-wst^2a}}$; więc

$sty^2\,a=\frac{R^2wst^2\,a}{R^2.-wst^2a}$. Równanie to łatwo zamienić można w następuiące:

$$wst\,a=\frac{R.\,sty\,a}{\sqrt{R^2+sty^2\,a}}\quad\ldots\ldots\quad(25)$$

Odbywszy to działanie z równaniem

$$Sty\,a=\frac{R\,wst\,a}{dos\,a}=\frac{R\sqrt{R^2-dos^2\,a}}{dos\,a}\text{ ; znaydziemy}$$

$$dos\,a=\frac{R^2}{\sqrt{R^2+sty^2\,a}}\quad\ldots\ldots\quad(26)$$

10*te*. Przypuściwszy że łuk $AS=60^\circ$ podług dawnego podziału, fig. 130, cięciwa iego byłaby bokiem sześciokąta foremnego w koło wpisanego

a tém samém równałaby się promieniowi tegoż koła (229). Cięciwa taż promieniem RA i RS utworzyłaby tróykąt równoboczny, a ze styczną AN łuku AS i z częścią NS iego sieczney RN utworzyłaby tróykąt rownoramienny, z którego łatwo byłoby okazać, że cięciwa ta równa się części NS sieczney RN; skądbyśmy wnieśli, że część NS sieczney RN równa iest promieniowi RS, a tém samém że RS czyli $R=\frac{1}{2}RN=\frac{1}{2}$ siec60°

Z uwagi téy i z tego cośmy powiedzieli w artykule XLVII. i innych, wypada, że

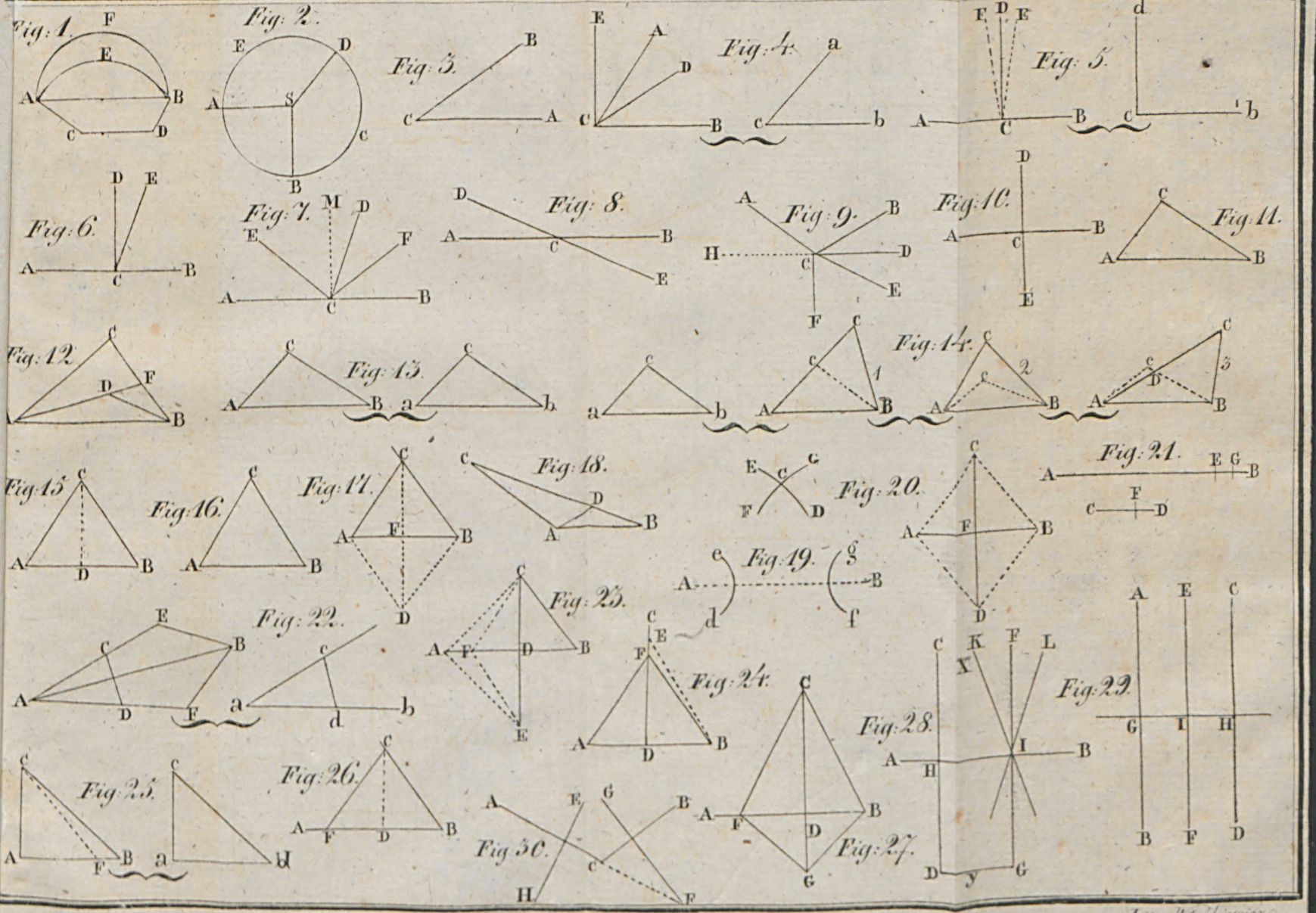
R=wst 90°=dos o°=sty 45°=dot 45°=siec o°=45°=dosiec 90°=$\frac{1}{2}$sie 60°. . . . (27)

Koniec Trygonometryi prostokréślney i części pierwszéy Jeometryi.

REJESTR ROZDZIAŁÓW.

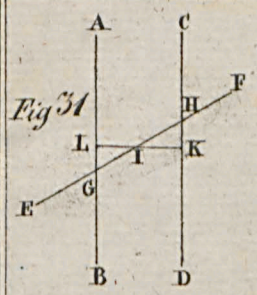
karta.

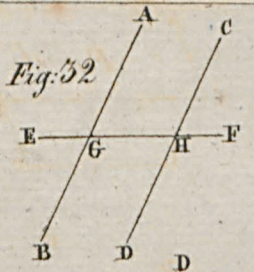
ROZDZIAŁ I. *Wiadomości poprzednicze.* 1
ROZDZIAŁ II. *O liniiach prostych przecinaiących się, o kątach i tróykątach.* - - - - - 5
ROZDZIAŁ III. *O liniiach prostopadłych, pochyłych i równoodległych.* 26
HOZDZIAŁ IV. *O wielokątach w powszechności a w szczególności o ich kątach* - - - 41
ROZDZIAŁ V. *O liniiach prostych i o kole* 52
ROZDZIAŁ VI. *O powierzchni wielokątów* 77
ROZDZIAŁ VII. *O podobieństwie wielokątów a naprzód tróykątów, i o proporcyonalności ich boków* 102
ROZDZIAŁ VIII. *O wielokątach w koło wpisanych i opisanych na kole* - 136
ROZDZIAŁ IX. *O powierzchni koła i o stosunku okręgu do średnicy* 157
Trygonometrya prostokreślna - - 180

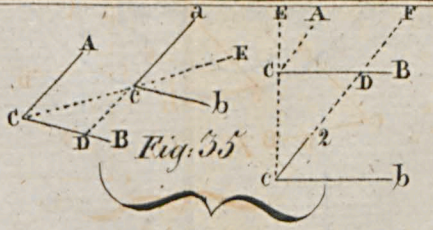


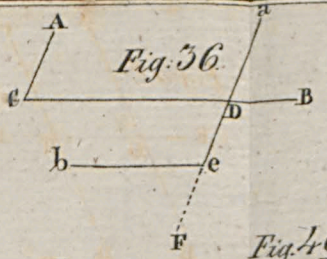
w Warszawie w Litografii B. Kamińskiego.

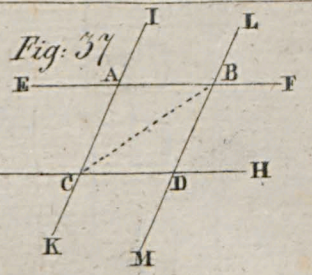
Lit: Wojkiewicz.

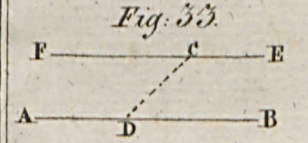


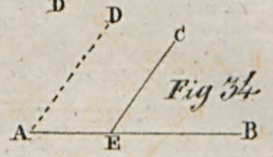


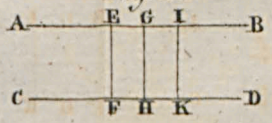


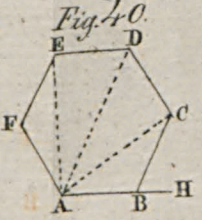


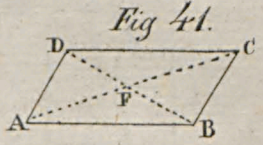


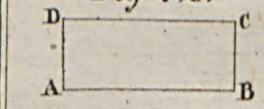


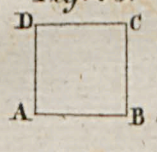


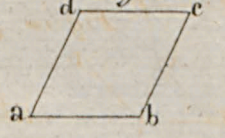


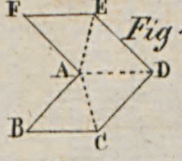


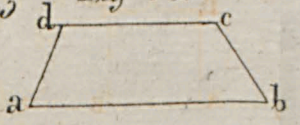


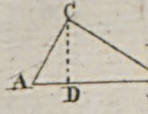


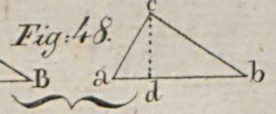


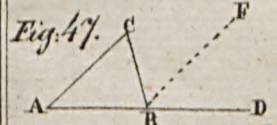


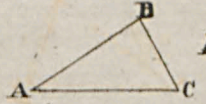


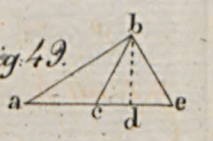


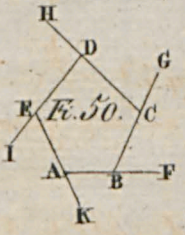


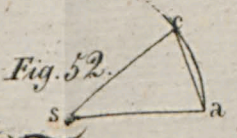


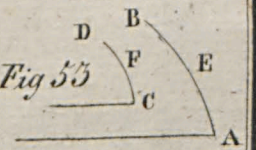


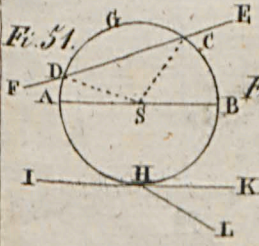


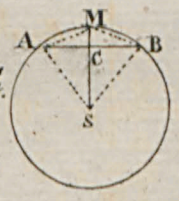


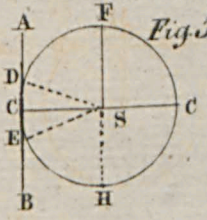


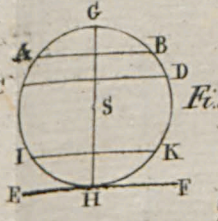


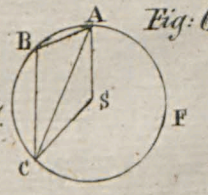


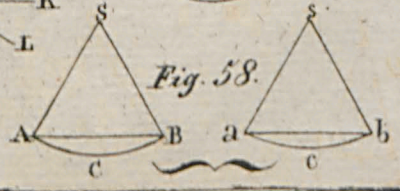


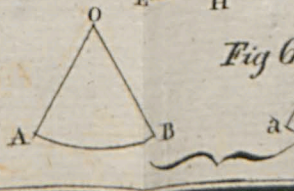


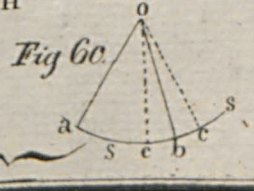












w Warszawie w Litografii J. Kośmińskiego.

Lit: Włóckiewicz

Fig: 62.

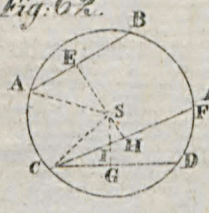


Fig: 63.

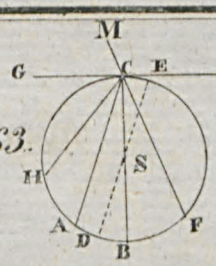


Fig: 64.

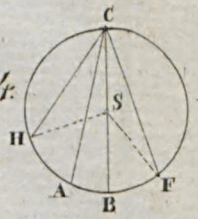


Fig: 65.

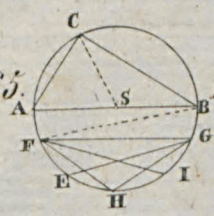


Fig: 66.

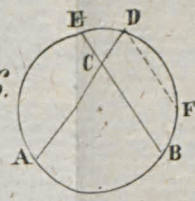


Fig: 67.

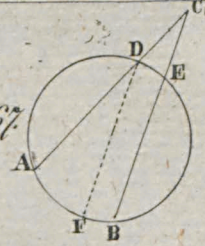


Fig: 68.

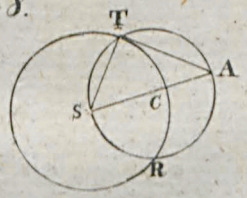


Fig: 69.

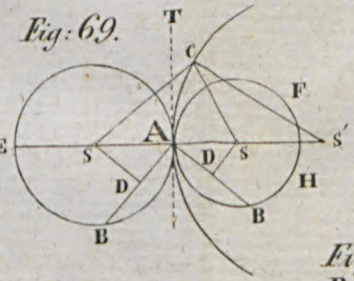


Fig: 70.

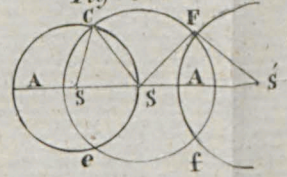


Fig: 71.

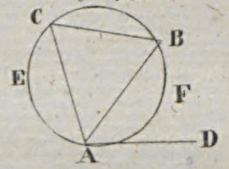


Fig: 72.

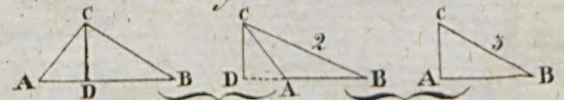


Fig: 73.

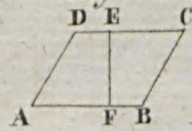


Fig: 74.

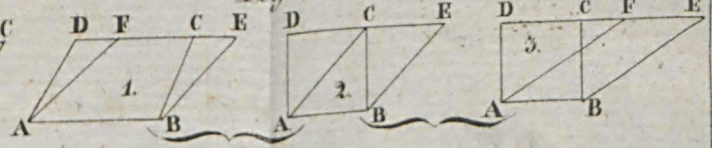


Fig: 75.

Fig: 76.

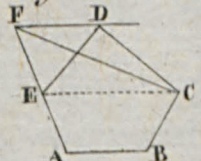


Fig: 77.

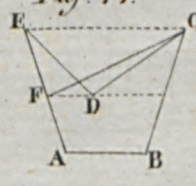


Fig: 78.

Fig: 79.

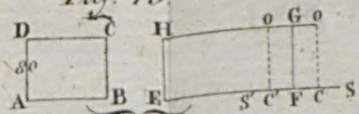


Fig: 80.

Fig: 81.

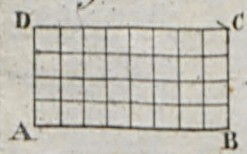


Fig: 82.

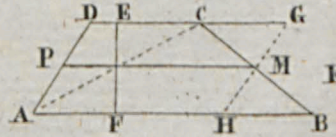


Fig: 83.

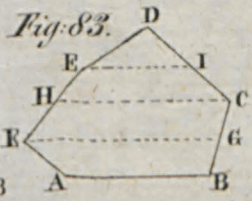


Fig: 84.

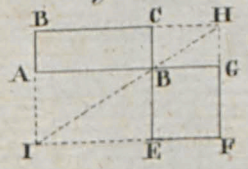


Fig: 85.

Fig: 86.

w Warszawie w Litog: S. Kośmińskiego

Lit: Woskiewicz

Fig: 87.

Fig: 88.

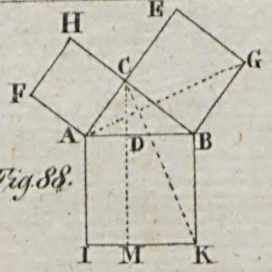


Fig: 89.

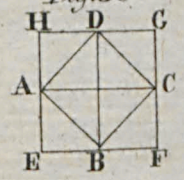


Fig: 90.

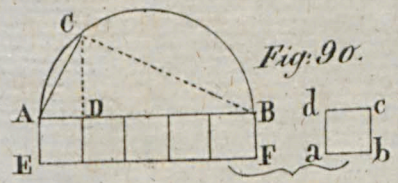


Fig: 91.

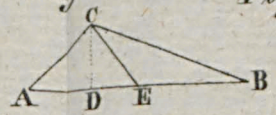


Fig: 92.

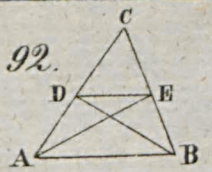


Fig: 93.

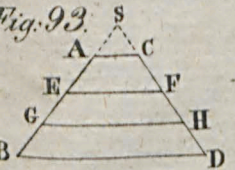


Fig: 94.

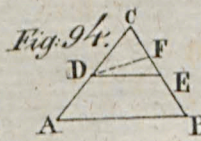


Fig: 95.

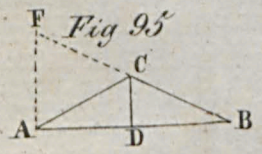


Fig: 96.

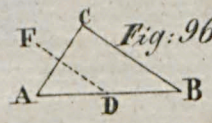


Fig: 97.

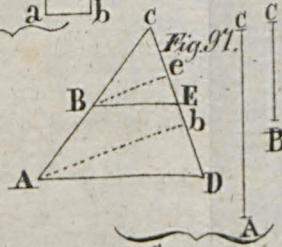


Fig: 98.

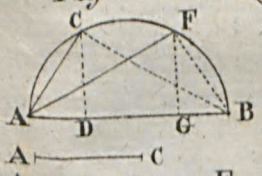


Fig: 100.

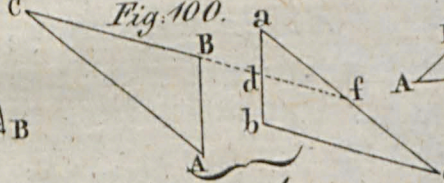


Fig: 102.

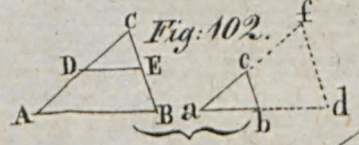


Fig: 99.

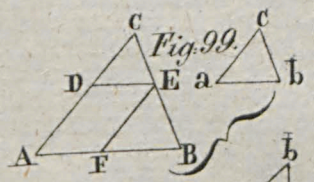


Fig: 101.

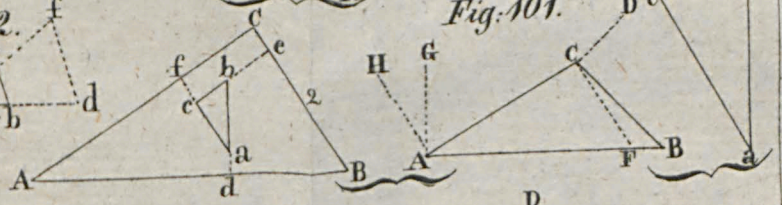


Fig: 103.

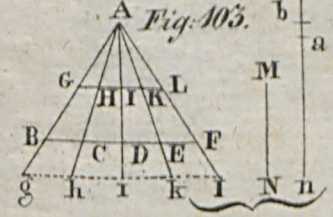
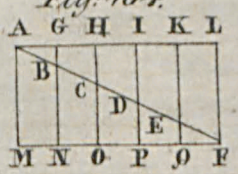


Fig: 104.



m
b a
M
N n

Fig: 105.

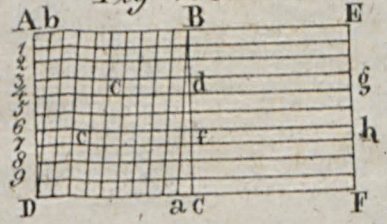


Fig: 106.

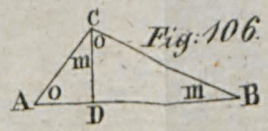


Fig: 107.

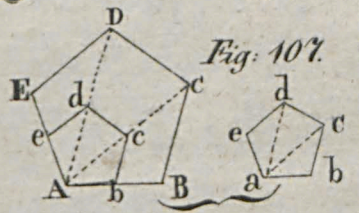


Fig: 108.

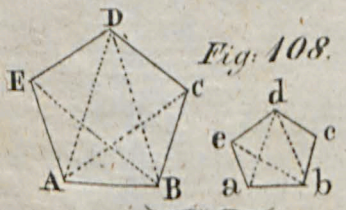


Fig: 110.

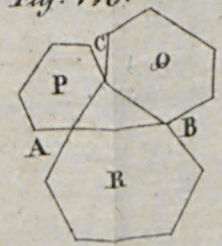


Fig: 112.

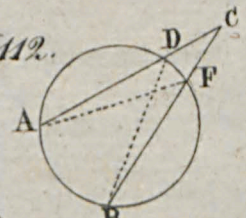


Fig: 112.

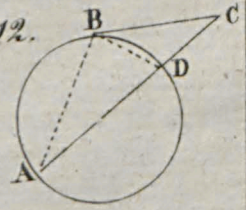
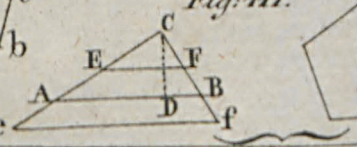


Fig: 111.



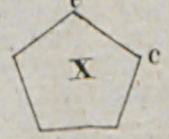
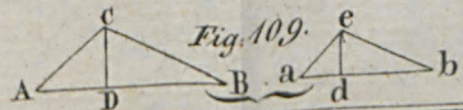


Fig: 109.



w Warszawie w Lito: I: Kośmińskiego

Lit: Wiśkiewicz

Fig. 114

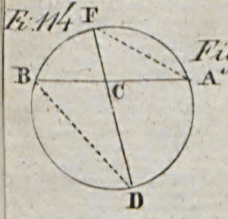


Fig. 115.

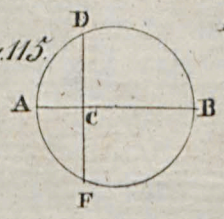


Fig. 116.

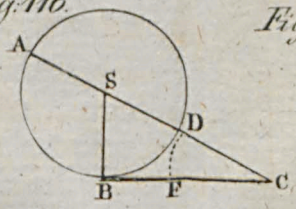


Fig. 117.

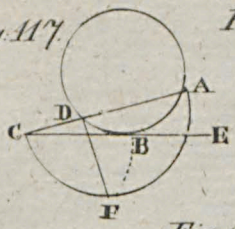


Fig. 118

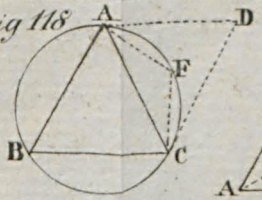


Fig. 119

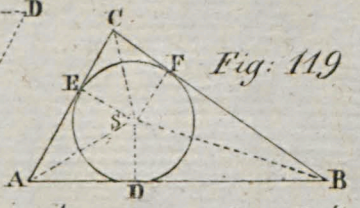


Fig. 120.

Fig. 121.

Fig. 122.

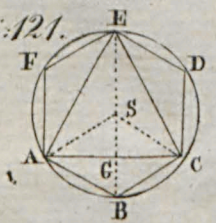


Fig. 123.

Fig. 124.

Fig. 125.

Fig. 126

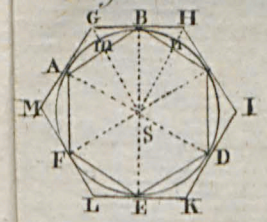


Fig. 127.

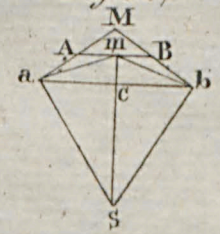


Fig. 129.

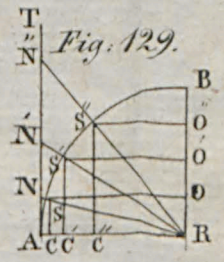


Fig. 130.

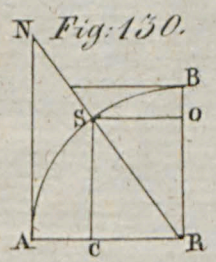


Fig. 131

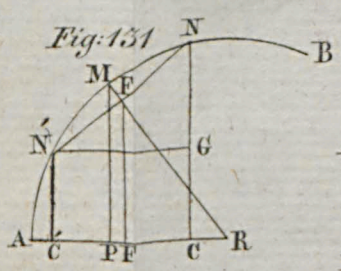


Fig. 132.

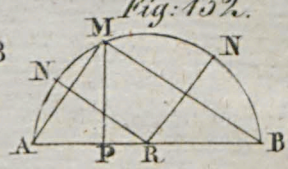


Fig. 134.

Fig. 135.

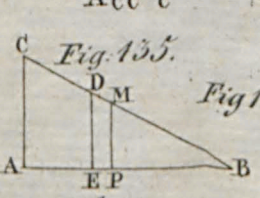


Fig. 141

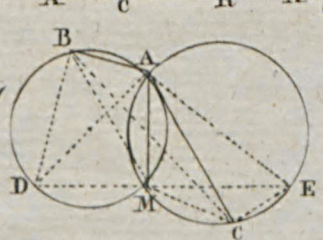


Fig. 137.

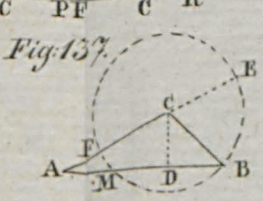


Fig. 138.

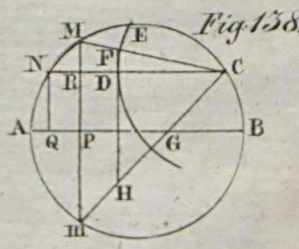


Fig. 128.

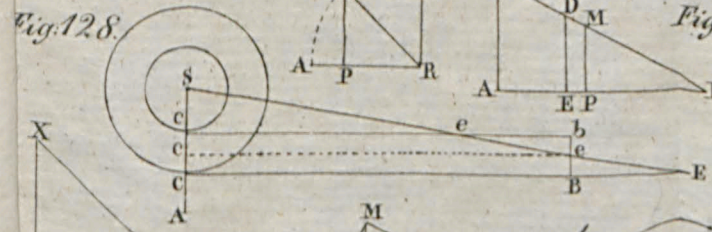


Fig. 140.

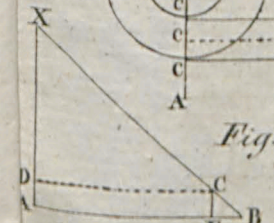


Fig. 133.

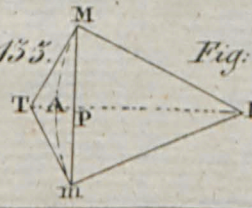


Fig. 142

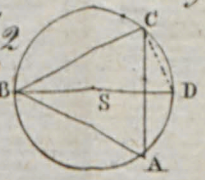


Fig. 136.

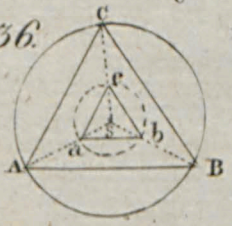


Fig. 143.

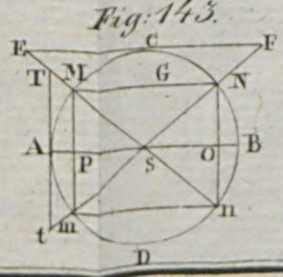


Fig. 139.

Warszawie w Litog. S. Kosmińskiego

Lit. Wroskiewicz