POCZĄTKI TRYGONOMETRYI PŁASKIÉY

PRZEZ

MICHAŁA PEŁKĘ POLIŃSKIEGO

Filozofii Doktora, Nauczyciela Matematyki w Gimnazyum Wileńskiém

W WILNIE
w Drukarni Dyecezalney
u XX. Missyonarzów.
1816.

Dozwala się drukować pod tym warunkiem, aby po wydrukowaniu nie pierwiey wydawać zaczęto, aż będą złożone w Komitecie Cenzury Exemplarze Xięgi tey: jeden dla tegoż Komitetu, dwa dla Departamentu Ministeryum Oświecenia, dwa Exemplarze dla IMPERATORSKIEY publiczney Biblioteki, i jeden dla IMPERATORSKIEY Akademii nauk. Dan w Wilnie 1816. Sierpnia 2. dnia.

X. J. K. Chodani Prof: Komit: Cen: Członek mp:

POCZĄTKI TRYGONOMETRYI PŁASKIÉY.

1. Wszystkie figury prostokréślné mogą być na troykąty prostokréślne albo zamienioné, albo rozebrane, przez linije proste do wszystkich kątów ciągnioné z punktu wziętego w wierzchołku kąta, na boku lub wewnątrz figury, więc do mierzenia jakichkolwiek prostokréślnych figur, dość jest wiedzieć sposób mierzenia troykątów.

2. W każdym troykącie mamy do uważania sześć rzeczy, które wchodzą do jego składu, to jest trzy boki i trzy kąty. Wszystkie te rzeczy, tak z sobą się wiążą, że wartość jednych wpływa do wartości drugich; od długości *np.* jednego boku i różnéy jego do dwoch innych pochyłości, zależy długość tych dwoch boków i pochyłość ich względem siebie, a zatém i wielkość powierzchni troykąta, przeto niéktóre z nich mogą mieć wartość jakąkolwiek sobie nadaną, inne zaś pozostałe zależąc od piérwszych, powinny mieć wartość do nich stosowną, którą trzeba oznaczyć.

3. Zeby ilość niewiadomą znaleść, trzeba ją porównać z inną ilością wiadomą tegoż samégo gatunku, z tego porównania wypada stosunek, który złączony z drugim stosunkiem wiadomym złożonym z liczb ogólnych daje proporcyą służącą do ocenienia ilości nieznanéy; więc w troykącie szukając boku, trzeba go stosować do boku, szukając kąta trzeba go stosować do kąta i

ten stosunek złączyć ze stosunkiem ułożonym z liczb ogólnych, ostatniego stosunku nie można wyprowadzić z ilości tego gatunku, jakiego jest ilość szukana, bo do ułożenia dwoch stosunków, trzeba cztérech wielkości, a w troykącie mamy tylko trzy ilości jednego gatunku, albo trzy boki, albo trzy kąty, lecz musimy go wyprowadzać z ilości gatunku odmiennégo, i tak szukając boku trzeba go stosować do boku wiadomégo, a ten stosunek złączyć ze stosunkiem utworzonym ze znajomych kątów; i wzajemnie dochodząc wartości kąta, należy go stosować do kąta wiadomego, a stosunek ztąd wynikający zrównać ze stosunkiem ułożonym ze znajomych boków; ztąd wypada, że do znalezienia w troykącie boku, trzeba mieć wiadomy bok jeden i stosunek między dwoma kątami, do znalezienia kąta, trzeba mieć kąt wiadomy i stosunek między bokami, to jest trzeba mieć jednę rzecz gatunku jednego z rzeczą szukaną i stosunek między dwiema rzeczami gatunku drugiégo. Dla tego w troykącie, w ktorym znajomé są tylko trzy boki, nie możemy od razu znaleść wartości kątów, lecz dla ich otrzymania dzielimy takowy troykąt na dwa troykąty, z którychby każdy prócz boków, miał jescze kąt jeden wiadomy, to jest dzielimy na dwa troykąty prostokątné. W troykącie zaś, w którym wiadomé są tylko trzy kąty, boków nie znaydziemy, bo nie mamy do czego ich stosować, i równość odpowiednych kątów w troykątach stanowi tylko ich podobieństwo, lecz nie oznacza ich pewnéy wielkości. Z tego wszystkiego wynika, że w troykącié dla znalezienia któréykolwiek z sześciu rzeczy, trzy koniecznie znać powinniśmy, między któremi przynaymniéy bok jeden znaydować się powinien.

4. Nauka podająca sposoby znalezienia w troykącié prostokréślnym trzech rzeczy niewiadomych z trzech wiadomych, między którémi przynaymniéy się bok jeden znayduje, nazywa się *Trygonometryą prostokréślną* (*trigonometria rectilinea*), lub z przyczyny znaydowania się troykąta prostokréślnégo na jednéy płasczyznie, *Trygonometryą płaską* (*trigonometria plana*). (a)

5. Ponieważ w troykącie dla znalezienia kąta, trzeba mieć wiadomy kąt i stosunek między dwoma bokami; a dla znalezienia boku, trzeba mieć wiadomy bok i stosunek między dwoma kątami, aże stosunek między kątami troykąta nie jest równy stosunkowi między jego bokami, jak o tém możemy się naywidoczniéy przekonać na troykącie prostokątnym równoramiennym, w którym każdy kąt ostry jest połową prostego, ramiona zaś kąta prostégo są większe od połowy przeciwprostokątnéy, dla tego starano się wprowadzić inné wielkości, któreby miéysce kątów mogły zastąpić i między sobą miały stosunek równy stosunkowi między bokami. Nie można było użyć łuków mierzących kąty, bo stosunki między łukami będąc równé stosunkóm między kątami nie są tém samém równe stosunkóm między bokami troykąta. Lecz uważając że z cięciw łuków jakiegokolwiek koła można ułożyć troykąt podobny do troykąta, który mamy roz-

(a) Do wyrazu T r y g o n o m e t r y a dodajemy wyraz p r o s t o k r é ś l n a, lub p ł a s k a. dla różnicy od innéy trygonometryi nazywanéy T r y g o n o m e t r y ą k u l i s t ą (T r i g o n o m e t r i a s p h œ r i c a), która uczy znaydowania trzech rzeczy niewiadomych w troykącie kulistym utworzonym na powierzchni kuli z przecinających się łuków kół wielkich; a która stanowi naukę osobną od trygonometryi płaskiéy.

wiązywać, wniesiono, iż jeżliby w jakimkolwiek kole były wyrachowané podług jednéy miary wartości cięciw wszystkich łuków zaczynając od łuku naymnieyszego, aż do półokręgu koła, którego cięciwa jest naywiększa; i ułożoné w tablice obok wartości łuków przez nie podpartych wyrażonych w stopniach, z trzech takowych cięciw możnaby ułożyć troykąt, każdy w nim kąt ważyłby połowę łuku mu przeciwnego, przeto znając w tym troykącie stosunek między kątami, znaleźlibyśmy z tablic stosunek między cięciwami łuków ważących dwa razy więcéy od kątów; i wzajemnie wiadomy stosunek między cięciwami, odkryłby stosunek między łukami, a tém samém między ich połowami, to jest między kątami troykąta; jeżliby troykąt ułożony z cięciw był podobny do troykąta danégo, stosunki między odpowiednémi ich bokami byłyby równé, przeto mając wiadomy stosunek między bokami troykąta danego, byłby wiadomy stosunek między bokami odpowiednémi troykąta złożonégo z cięciw, tablice zaś pokazałyby stosunek między łukami przez nie podpartémi, a tém samém między ich połowami, to jest między kątami troykąta, z których wiedząc jeden, znaleźlibyśmy inne; i wzajemnie znając stosunek między kątami troykąta danégo, a tém samém między łukami dwa razy więcéy ważącémi, z tablic znaleźlibyśmy stosunek między ich cięciwami, któryby byłby także stosunkiem między bokami troykąta danégo; wiedząc przeto wartość boku jednégo, otrzymalibyśmy wartość bokow innych. Z tego powodu na miéyscu stosunku między kątami zaczęto z początku używać stosunku między cięciwami łuków dwa razy większych, później dla uniknienia brania połowy kątów, lub

ich podwajania wzięto stosunek między połowami cięciw; w dalszym czasie odkryto związek między cięciwami lub ich połowami a innémi linijami prostémi dotykającémi się koła, lub je przecinającémi, i stosunków między temi linijami zachodzących użyto, równie jak stosunku między połowami cięciw, na mieyscu stosunku między kątami. — Wszystkie linije proste, między którémi stosunek używa się na miéyscu stosunku między kątami, zowią się *linijami trygonometrycznémi* (*lineae trigonometricae*).

6. Stosunek między kątami równa się stosunkowi między łukami tym samym promieniem z ich wierzchołków zakréślonémi, i zawartémi między ich ramionami, dla tego linije trygonometryczné kątów, mogą się nazywać linijami trygonometrycznémi łuków, i w dalszym ciągu bez żadnéy różnicy będziemy używali jednego nazwiska za drugie, i co się powie o linijach trygonometrycznych jakiégokolwiek łuku, to samo powinno się rozumieć o linijach trygonometrycznych kąta przez ten łuk mierzonégo i wzajemnie. (b)

7. Ponieważ wszelki rachunek w troykątach między bokami a kątami ma się odbywać za pomocą liniy trygonometrycznych, przeto wypada *naprzód:* poznać wszystkie te linije, odkryć stosunki między niémi zachodzącé, wyrachować ich wielkość względem jednéy jakiéykolwiek miary na wszystkie kąty czyli łuki koła; *powtóre:* oznaczyć stosunki tych liniy do boków troykąta, a ztąd wy-

(b) Właściwie mówiąc kąt należy do trygonometryi płaskiéy, a łuk do trygonometryi kulistéy; przeto jedné i też samé linije służą zarówno obu trygonometryom tak płaskiéy, jak kulistéy.

prowadzimy sposoby znalezienia w troykącie trzech rzeczy niewiadomych z trzech wiadomych, to jest, jak się zwyczaynie mówi, sposoby rozwiązywania troykątów.

8. Dla poznania liniy trygonometrycznych zakréślam koło AFaf, promieniem wziętym od upodobania, prowadzę w niém dwie średnice Aa, Ff, prostopadłe jedne do drugiéy, dzielą one okrąg koła na cztéry równé części AF, Fa, af, fA, które nazywam cwiartkami koła; prowadzę znowu dwie średnice Be, bN, dzielące każdą cwiartkę na dwie jakiekolwiek części. — Uważam łuk AB, mnieyszy od cwiartki okręgu koła. — Do promienia SA, prowadzę jednę prostopadłą BD, z końca B, łuku AB, drugą wywyższam z końca A, aż do spotkania się z promieniem SB przedłużonym. Linija BD nazywa się *wstawą* (*sinus*), linija AD *wstawą odwrotną* (*sinus versus*), linija AT *styczną trygonometryczną* (*tangens trigonometrica*), albo jednym wyrazem *styczną* (*tangens*), linija ST *sieczną trygonometryczną* (*secans trigonometrica*), albo jednym wyrazem *sieczną* (*secans*), kąta ASB, albo łuku AB.

Podobnie w kącie BSF prowadząc do promienia SF, z końca B łuku BF, prostopadłą BC a z końca F prostopadłą FP, aż do spotkania się z promieniem SB przedłużonym, mamy kąta BSF, albo łuku BF wstawę BC, wstawę odwrotną CF, styczną FP, sieczną SP. Aże łuk BF jest dopełnieniem łuku AB do cwiartki okręgu koła (c), przeto wstawa, wstawa odwrotna,

(c) Uważając kąt jakikolwiek ostry lub rozwarty; drugi kąt będący różnicą między kątem uważanym a kątem prostym,

styczna, sieczna łuku BF, mogą się inaczéy nazywać wstawą, wstawą odwrotną, styczną, sieczną, dopełnienia łuku AB (*sinus*, *sinus versus*, *tangens*, *secans complementi arcus AB*) albo przez skrócenie dostawą (*cosinus*), dostawą odwrotną (*cosinus versus*), dostyczną (*cotangens*), dosieczną (*cosecans*) łuku AB; i wzajemnie łuku AB, wstawa BD, wstawa odwrotna DA, styczna AT, sieczna ST, nazywają się dostawą, dostawą odwrotną, dostyczną, dosieczną, łuku BF. Fig: 1.

Wymienione te wszystkie linije nazywają się linijami trygonometrycznémi, i służą do zastąpienia w rachunku miéysca kątów lub łuków.

Opisanie każdey linii trygonometrycznéy z natury ich wynikające możemy dać następne:

Wstawa łuku jest prostopadła spuszczona z jednego któregokolwiek końca łuku na promień przechodzący przez drugi jego koniec.

Wstawa odwrotna jest część promienia zawarta między końcem wstawy prostey a łukiem.

Styczna jest prostopadła do promienia przechodzącego przez jeden koniec łuku, z końca jego wyprowadzona aż do przecięcia się z promieniem przechodzącym przez drugi koniec łuku.

Sieczna jest promień wzięty z swojém przedłużeniem kończącém się na styczney.

nazywa się jego dopełnieniem do kąta prostego, lub jednym wyrazem dopełnieniem (complementum). Ten zaś kąt, który jest różnicą między kątem uważanym a dwoma kątami prostémi nazywa się jego spełnieniem (supplementum); I tak kąta ASB, dopełnieniem nazywa się kąt BSF, spełnieniem kąt BSa; kąta ASb dopełnieniem przez nadmiar jest kąt bSF, spełnieniem bSa, to samo się mówi i o łukach mierzących te kąty; łuku AB dopełnieniem jest łuk BF, spełnieniem Fa; łuku Ab, dopełnieniem przez nadmiar jest bF, spełnieniem łuk ba.

Fig: 1. Dostawą zaś, dostawą odwrotną, dostyczną dosieczną kąta ostrego, lub łuku mniéyszégo od ćwiartki okręgu koła, nazywa się wstawa, wstawa odwrotna, styczna sieczna, kątą lub łuku drugiego który jest piérwszego dopełnieniem (d)

9. Widzimy że łuku AB dostawa BC, równa się linii SD wstawa BD równa się linii SC, jako boki przeciwne prostokątu CD, wstawa odwrotna AD jest różnicą między linijami AS i SD; dostawa odwrotna CF, jest różnicą między linijami CF i SC; z tego poymujemy, iż można powiedzieć: że dostawa jakiegokolwiek łuku czy kąta, równa się części promienia zawartéy między środkiem koła czyli wiérzchołkiem kąta a końcem wstawy tegoż łuku; wstawa odwrotna łuku jest różnicą między promieniem kréślącym ten łuk a jego dostawą; dostawa zaś odwrotna łuku jest różnicą między promieniem a wstawą.

10. Z opisania wstawy i stycznéy poznajemy, że każdego łuku może być podwóyna wstawa i styczna, a tém samém podwóyne wszystkie inné linije trygonometryczné. Np. łuku AB, mamy wstawę BD, dostawę SD, styczną AT, sieczną ST; lecz jeźli do promienia SB spuścimy z końca A, łuku AB, prostopadłą AZ, a z punktu B wywyższymy prostopadłą BX, aż do spotkania

(d) Dla skrócenia w dalszym ciągu będę pisał wst. wst. odw. sty. sie. dosta. dosta. odw. dosty. dosie. A lub ASB; na mieyscu wstawa, wstawa odwrotna, styczna, sieczna, dostawa, dostawa odwrotna, dostyczna, dosieczna łuku A, lub kąta ASB; także P. albo Pro; l. albo log. na mieyscu promień, logarytm. I tak l. dosta. AB; znaczyć będzie: logarytm dostawy łuku AB; P.X dosty. ASB oznaczy, promień rozmnożony przez dostyczną kąta ASB.

się z promieniem SA, przedłużonym, będzie także linija AZ wstawą, SZ dostawą, BX styczną, SX sieczną łuku AB. Aże dla przystawania troykątów SBD i SAZ, linija BD = AZ; linija SD = SZ; także dla przystawania troykątów SAT i SBX, linija AT = BX, linija ST = SX; więc postrzegamy, że tego samego łuku, dwie wstawy są równe między sobą, dwie dostawy są równé jedna drugiey, i tak podobnie każda linija trygonometryczna tegoż samégo łuku, jest podwóyna, lecz obie są równe między sobą; ztąd wnosimy, że w robocie można którąkolwiek z nich uważać. Fig: 1

11. Opisanie wstawy daje także nam poznać, że wstawa jakiegokolwiek bądź łuku, jest połową cięciwy podpierającéy łuk dwa razy większy. Jakoż jeźli wstawę BD przedłużymy aż do przecięcia się z łukiem w punkcie E, i do tego punktu poprowadzimy promień, troykąty SDB i SDE, mając bok SD spólny, boki SB, SE równe, i kąty przy D prosté, mogą przystać, ztąd BD = DE, kąt BSD = DSE; zatém linija BE jest dwa razy większa od BD, i kąt BSE dwa razy większy od kąta BSD, czyli łuk BE, dwa razy większy od łuku BA; więc widocznie się okazuje, że wstawa BD łuku BA, jest połową cięciwy BE podpierającéy łuk BAE dwa razy większy od łuku BA.

12. Ztąd wypada, że jeźli łuk BAE jest szóstą częścią okręgu koła, zatém cięciwa BE, jest bokiem sześciokąta foremnego w koło wpisanego, a przeto równa promieniowi tegoż koła; wstawa BD łuku BA, będąc połową cięciwy BE, jest równa połowie promienia, lecz w tym razie łuk AB jako połowa łuku BAE, jest dwónastą częścią okręgu koła; więc widzimy, że wstawa dwó-

Fig. 1. nastéy części okręgu koła, czyli trzeciéy części kąta prostego równa się połowie promienia.

13. Jeźli łuk BA wezmiemy równy ósmey części okręgu koła, to jest kąt ASB równy połowie kąta prostego, troykąt BDS będzie równoramienny, bo i kąt DBS; jako dopełnienie piérwszego, zamyka także połowę kąta prostego, więc boki BD, DS, są równe między sobą, to jest wstawa i dostawa ósméy części okręgu koła czyli połowy kąta prostego, są równe jedna drugiéy. Widzimy także że w troykącie AST, kąty AST, ATS, są równe, a ztąd i bok AT = AS, to jest styczna połowy kąta prostego czyli ósmey części okręgu koła, równa się promieniowi tegoż koła.

14. Widzimy że w troykącie prostokątnym AST, ramie kąta prostego AS jest promieniem, drugie ramię AT jest styczną kąta mu przeciwnego ASB, a przeciw prostokątna ST, sieczną tegoż kąta; w troykącie prostokątnym SFP, ramie SF jest promieniem, drugie ramie FP dostyczną kąta ASB, czyli mu równego SPF dostycznéy przyległego, a SP dosieczną tegoż kąta; w troykącie BDS przeciwprostokątna BS jest promieniem, ramie BD wstawą kąta przeciwnégo BSD, a ramie SD dostawą tegoż kąta; więc ztąd wnosimy, że w każdym troykącie prostokątnym, uważając jedno ramie za promień, drugie ramie będzie styczną kąta jemu przeciwnego, a przeciwprostokątna sieczną tegoż kąta, albo drugie ramie będzie dostyczną kąta mu przyległego, a przeciw prostokątna dosieczną tegoż kąta; uważając zaś przeciwprostokątną za promień, będzie jedno ramie kąta prostego wstawą kąta jemu przeciwnego, a drugie ramie dostawą tegoż kąta. Ztąd zaś wypada, że w troykącie prostokątnym, jeźli kąt jeden jest trzecią częścią kąta prostego, bok

jemu przeciwny jako jego wstawa, będąc połową promienia (12), jest równy połowie przeciwprostokątnéy. Fig. 1

15. Znając linije trygonometrycné jednego łuku AB, i wiedząc ich opisanie, łatwo pojąć możemy, co się dziać będzie z niémi, i jakie będą wypadały, gdy się łuk będzie powiększał, lub zmniéyszał. Przypuszczając że łuk AB zmniéysza się, jego wstawa BD, styczna AT, sieczna ST także się zmniéyszają, dostawa zaś BC czyli SD, dostyczna FP, dosieczna SP, powiększają się; więc biorąc łuk bardzo mały, to jest bliski granicy ilości zmniéyszających się, którą granicą jest zero, wstawa jego i styczna są także bardzo małe i bliskie granicy o, sieczna mało co większa od promienia, dostawa zbliża się do równości z promieniem; dostyczna zaś i dosieczna są bardzo wielkie, i przystępują do równoległości z sobą: przeto biorąc łuk w granicy jego ubywania, wszystkie także linije trygonometryczne biorą się w granicach, do których się zbliżały, i dla tego mówi się, że kiedy łuk równy zeru, to jest uważając go w samym początku, wstawy i styczney nié ma żadnéy, czyli są równe zeru, dostawa i sieczna, każda z nich jest równa promieniowi, dostyczna i dosieczna będąc prostopadłe do promienia SF, a przez to do siebie równoległe, nigdzie się nie przecinają, zatém są nieskończoné (∞), to jest większe od wszelkiéy ilości naznaczyć się mogącéy.

16. Gdy łuk w piérwszéy cwiartce okręgu koła powiększa się, wstawa, styczna, sieczna powiększają się, a dostawa, dostyczna, dosieczna zmniéyszają się: gdy łuk przystępuje do czwartéy części okręgu koła, wstawa i dosieczna zbliżają się do promienia, styczna i sieczna zbliża-

Fig: 1. ją się do granicy wzrostu, to jest do ∞, dostawa i dostyczna do granicy ubywania, to jest do zera; więc kiedy łuk staje się równy cwiartce okręgu koła, linije trygonometryczné biorą się w granicach, do których dążyły; to jest, wstawa i dosieczna równé są każda promieniowi SF, i wtedy wstawa nazywa się wstawą całą, (*sinus totus*) z przyczyny, iż jest naywiększą; styczna i sieczna są nieskończoné, bo styczna przypada w kierunku linii AT, sieczna w kierunku promienia SF, przeto są do promienia SA prostopadłé, a do siebie równoległe, zatém nigdzie się nie schodzą; dostawa i dostyczna są równé zeru. Ztąd wypada że wyrazy *wstawa cała*, *wstawa naywiększa*, *promień*, jednę i tęż samę rzecz znaczą.

17. Gdy wezmiemy łuk kończący się w drugiéy cwiartce okręgu koła *np.* tak AFb, wstawą jego jest linija bd, styczną At, sieczną St, wstawą odwrotną Ad, dostawą zaś, dostyczną i dosieczną są: wstawa, styczna i sieczna łuku Fb, który jest dopełnieniem łuku AFb przez nadmiar; jest przeto dostawą bg czyli dS, dostyczną Fp, dosieczną Sp. Postrzegamy więc, że gdy łuk od cwiartki koła daléy powiększa się, nie dochodząc jednak do półokręgu, wstawa, styczna i sieczna zmniéyszają się, a dostawa, dostyczna, dosieczna powiększają się, i im bliżéy łuk przystępuje do półokręgu, tém bardziéy wstawa i styczna zbliżają się do granicy ubywania, to jest do zera, sieczna i dostawa do promienia, dostyczna i dosieczna do granicy wzrostu, to jest do ∞; więc gdy łuk stanie się równy półokręgowi, linije trygonometryczné biorą się w granicach; przeto, wstawa i styczna są równé zeru, dostawa i sieczna są równé każda z nich promieniowi, dostyczna i dosieczna są ∞, to jest wszystkié linije

trygonometryczné wypadają takie samé, jakié były w początku łuku. Fig: 1.

18. Gdy się łuk stanie większy od półokręgu koła, i skończy się w trzeciéy cwiartce *np.* łuk AFbe; wstawą jego jest linija eh, styczną AT, sieczną ST; dostawą zaś dostyczną i dosieczną są: wstawa, styczna, sieczna łuku ef dopełniającégo łuk dany do trzech cwiartek okręgu koła, jest przeto dostawą linija eH, czyli Sh, dostyczna fn, dosieczna Sn; ze wszystkiémi témi linijami to samo się dzieje, co się działo w piérwszéy cwiartce okręgu koła, i gdy łuk stanie się równy trzem cwiartkóm okręgu, to jest AFaf, linije trygonometryczné będe takié samé, jakié są łuku AF równégo jednéy cwiartce okręgu.

19. Biorąc łuk AFafN, kończący się w cwartéy cwiartce okręgu koła, wstawa jego jest No, styczna At, sieczna St; dostawą zaś, dostyczną, dosieczną są: wstawa, styczna, sieczna łuku fN, będącégo różnicą między łukiem uważanym AFafN, a trzema cwiartkami okręgu AFaf, przeto jest dostawą GN, czyli So, dostyczną fM, dosieczną SM; i z témi wszystkiémi linijami to samo się dzieje, co się działo w drugiéy cwiartce okręgu. Gdy zaś łuk stanie się równy całému okręgowi koła, to jest gdy koniec łuku zeydzie się z początkiem, linije trygonometryczné te samé będą, jakié były w początku.

20. Jeźli nakoniec wezmiemy łuk większy od całégo okręgu koła, *np.* łuk AFafAB, jego linije trygonometryczné będą te samé, jakié ma łuk AB, będący różnicą między łukiem danym, a całym okręgiem koła raz, lub tyle razy wziętym, ile razy tylko można go od łuku danégo odjąć; więc, co służy linijóm łuku jednego, to samo się mówi o linijach łuku drugiégo.

Fig: 1. 21. Ponieważ wszystkié linije trygonometryczné przechodząc z jednéy cwiartki koła do cwiartki następnéy, przechodzą przez granicę swégo wzrostu luk ubywania, a po tém przeyściu zmniéyszają się, jeźli się piérwiéy powiększały, lub przeciwnie, powiększają się, jeźli się piérwiéy zmniéyszały, więc we wszystkich cztérech cwiartkach koła muszą być jednakowe, nie możnaby zatém było poznać, do jakiégo łuku należą, gdyby się niczém od siebie nie różniły. Na ten koniec do ich rozróżnienia użyto znaków (+) i (—); w któréy zaś cwiartce i którym linijóm takowé znaki służą, możemy wyprowadzić z następnéy uwagi: każda ilość doszedłszy granicy swego wzrostu lub ubywania, kończy swóy stan, w którym dotąd zostawała, po przeyściu zaś za granicę przechodzi do stanu piérwszému przeciwnego; dla oznaczenia dwoch stanów przeciwnych używają się znaki dodawania (+), i odciągania (—); przeto i linije trygonometryczné nazywając w jednym stanie dodatnémi, po przeyściu ich przez granice im odpowiedné wzrostu, lub ubywania, trzeba nazywać odjemnémi. I tak wstawy, ponieważ w punktach A i a, przechodzą przez granicę ubywania, to jest przez zero, nad średnicą Aa, muszą być innégo stanu, aniżeli pod tą średnicą, przeto nazywając je nad średnicą Aa dodatnémi, pod nią nazywać trzeba odjemnémi. Dostawy przechodzą przez granicę ubywania w punktach F i f, więc z prawéy strony średnicy Ff, będą innego stanu, aniżeli ze strony lewéy, ztąd dostawy leżące z prawéy strony średnicy Ff nazywając dodatnémi, trzeba z lewéy strony téy średnicy położoné nazwać odjemnémi.— Styczné, ponieważ w punktach A i a, przechodzą przez granicę ubywania, to jest przez

o, a w punktach F i f, przez granicę wzrostu, to jest przez ∞, w każdéy cwiartce muszą być stanu innégo, aniżeli w cwiartce poprzedzaiącéy; lecz nié można, ani ich, ani dalszych liniy trygonometrycznych zacząć nazywać od upodobania w któréykolwiek cwiartce dodatnémi, lub odjemnémi, ponieważ, jak obaczymy niżéy, wartość ich zależy od wartości wstaw i dostaw, przeto i stan ich zależy od stanu tychże liniy; więc stosownie do stanu wstaw i dostaw wypada, że styczna i dostyczna są dodatné kiedy wstawa i dostawa są jednégo stanu, albo obie dodatné, albo obie odjemné; są zaś odjemné, kiedy wstawa jest w stanie przeciwnym względem dostawy. Sieczna jest jednégo stanu z dostawą, a dosieczna jednego stanu ze wstawą— Przeto, podług wyższégo nazwania wstaw i dostaw, będą: styczné i dostyczné w 1éy i 3éy cwiartce koła dodatné, w 2éy i 4éy odjemné; sieczne w 1éy i 4éy cwiartce dodatné, w 2éy i 3éy odjemné; dosieczne w 1ey i 2ey dodatné, w 3éy i 4éy odjemné. Fig: 1.

22. Tablica następna pokazuje różność znaków liniy trygonometrycznych we wszystkich cztérech cwiartkach koła; przed linijami równémi zeru, albo nieskończoności żadnégo niekładłem znaku.

	wst.	*dosta.*	*sty.*	*dosty.*	*sie.*	*dosie.*
w początku łuku	o	+1	o	∞	+1	∞
w 1éy cwiartce	+	+	+	+	+	+
w końcu tey cwiartki	+1	o	∞	o	∞	+1
w 2éy cwiartce	+	—	—	—	—	+
w koncu 2ey cwiartki	o	—1	o	∞	—1	∞
w 3éy cwiartce	—	—	+	+	—	—
w końcu 3éy cwiartki	—1	+	∞	o	∞	—1
w 4éy cwiartce . .	—	+	—	—	+	—

w końcu 4ey cwiartki tak samo jak w początku łuku.

Fig: 1. 23. Widzimy że łuku AFb kończącego się w 2éy cwiartce okręgu koła wstawa jest bd, dostawa Sd, styczna At, sieczna St, dostyczna Fp, dosieczna Sp; lecz uważamy że i łuku ab mniéyszégo od cwiartki okręgu koła a spełniającégo piérwszy do półokręgu, wstawa jest także bd, dostawa Sd, dostyczna Fp, dosieczna Sp, styczna aK, sieczna SK, które dla przystawania troykątów SaK, i SAt, są równé odpowiednie styczney At, sieczné St łuku AFb; albo też łuku AN, spełniającégo z drugiéy strony łuk AFb, wstawa jest No, dostawa So, które dla przystawania troykątów SoN i Sdb, są równé wstawie bd, dostawie Sd łuku AFb; styczna łuku AN jest At, sieczna St, dostyczna jest fM, dosieczna SM, które dla przystawania troykątów SfM i SFp, równé są dostycznéy Fp, dosieczney Sp, łuku AFb. Więc ztąd wnosimy że łuków spełniających się wzajemnie do półokręgu linije trygonometryczne odpowiedné są równe między sobą co do wielkości bez żadnégo względu na ich położenie.

24. Biorąc łuk AFae kończący się w 3éy cwiartce okręgu koła, wstawa jego jest eh, dostawa Sh, styczna AT, sieczna ST, dostyczna fn, dosieczna Sn; lecz postrzegamy że także łuku ae, będącégo różnicą między łukiem uważanym AFae, a półokręgiem koła AFa, wstawą jest linija eh, dostawa Sh, dostyczna fn, dosieczna Sn, styczna am, sieczna Sm, które dla przystawania troykątow Sam i SAT, równe są odpowiednie stycznéy AT, sieczney ST, łuku AFae; albo też łuku AB równego łukowi ae, będącégo także różnicą między łukiem uważanym AFae, a półokręgiem Bae, wstawa jest BD, dostawa SD, które dla przystawania troykątów SDB i She, równé są odpowiednie wstawie eh, dostawie Sh łuku AFae; styczna łuku AB jest AT, sieczna ST, dostyczna FS, dosieczna SP, które dla przystawania troykątów SFP, Sfn, równé są odpowiednie dostycznéy fn, dosiecznéy Sn łuku AFae: Fig: 1 więc wnosimy że linije trygonométryczné łuku większego od półokręgu koła, są równe odpowiednie linijom trygonometrycznym łuku mniéyszego od cwiartki okręgu koła, będącégo różnicą między łukiem uważanym a półokręgiem koła.

25. Uważaiąc łuk AFafN, większy od trzech cwiartek okręgu koła, a mniéyszy od całégo okręgu koła, widzimy, że jego wstawa jest No, dostawa So, styczna At, sieczna St, dostyczna fM, dosieczna SM; lecz i łuku AN mniéyszégo od cwiartki okręgu koła, a spełniającego łuk AFafN do całégo okręgu, linije trygnometryczné są też samé; więc wnosimy, że dwoch łuków spełniających siebie do całego okręgu koła, linije trygonometryczné odpowiedné są równé między sobą co do wielkości.

26. Biorąc nakoniec łuk AFafAB, większy od całégo okręgu koła, widzimy że jego linije trygonometryczné są też same, jakie są łuku AB; więc ztąd wnosimy, że łuk większy od okręgu koła, ma té samé linije trygonometryczné, jakie ma łuk będący różnicą między łukiem uważanym a okręgiem koła, raz lub tyle razy wziętym, ile razy tylko można go od łuku uważanégo odjąć.

27. Ponieważ linije trygonometryczné jakiégokolwiek łuku większego od 4téy części okręgu koła, są też samé co do wielkości, jakie są łuku mniéyszégo od 4éy części okręgu, ze znakami tylko im stosownémi, przeto, aby mieć linije trygonometrzyczné jakichkolwiek bądź łuków, dość

Fig: 1. jest mieć linije trygonometryczné łuków wszystkich zawartych w cwiartce okręgu koła; lecz że wstawa, styczna, sieczna, łuku mniéyszégo od cwiartki okręgu koła, jest razem dostawą, dostyczną, dosieczną łuku drugiégo dopełniającégo łuk piérwszy do cwiartki okręgu koła, więc dla otrzymania liniy trygonometrycznych wszystkich łukow zawartych w cwiartce okręgu, trzeba znaleść, albo wszystkie linije trzygonometryczné łuków wszystkich zawartych w połowie cwiartki okręgu koła, albo tylko wstawy. styczné i sieczne łuków wszystkich miesczących się w caléy cwiartce okręgu.

28. Ponieważ każda linija trygonometryczna w tém samém kole, odpowiada kilku łukóm różnéy wielkości, przeto w rachunku, do którégo wchodzą łuki rozmaité, należy dawać wielką baczność na znaki służącé tym linijom, dla uniknienia omyłki w braniu łuku odpowiednégo, iżby większégo nie wziąć na miéyscu mniéyszégy, lub przeciwnie; jak *np.* w Astronomii, gdzie długość i wznoszenie się prosté ciał niebieskich rachuje się od zera przez cały okrąg koła, uwaga na znaki od uwagi na wielkość liniy trygonometrycznych powinna być nieoddzielna; lecz w trygonometryi płaskiéy, mając tylko do czynienia z kątami mniéyszémi od dwoch kątów prostych, i prędko mogąc poznać, jakiému linija trygonometryczna odpowiada kątowi, ostrému lub rozwartému, nie dajemy żadnéy baczności na znaki.

29. Wszystkie linije trygonometryczné, aby mogły być porównywané jedné z drugiémi, powinny mieć spólną miarę, dla tégo trzeba je wyrazić w częściach jakiey jedności staléy. Za takową jedność, to jest za miarę porównywa-

nia, bierze się promień, jako ilość nieodmieniająca się w tém samém kole — Wartość jému nadawać można od upodobania, lecz pospolicie teraz naznacza się albo 1, albo liczba złożona z jedności maiącéy po sobie zer ilekolwiek *np.* 10, 100, 1000; i t. d. (e) Fig: 1.

30. Z liniy trygonometrycznych i z promienia, jak widzimy na figurze, składają się troy-

---

(e) Dawnieysi Geometrowie, jak można o tém się przekonać z dzieła pod tytułem Almagestum wydanego przez Ptolemeusza który się urodził 138 po N. C. i był Astronomem w Egipcie w mieście Kanopie, blisko Alexandryi, dzielili promień koła na części 60, każdą część na 60 części mnieyszych zwanych minutami, i tak daley, podobnie jak łuk od 60°, którego cięciwa równa się promieniowi, i w takich częściach i ułamkach 60tkowych wyrażali cięciwy łuków zamykających się w półokręgu. Tablica takowych cięciw znayduje się w rzeczoném dziele Ptolemeusza — Arabowie zaczęli uważać że rachunek stałby się prościeyszym przez użycie połowy cięciw zamiast całych, i pierwszy z nich Albategnius około 880 roku naszéy ery wprowadził wstawy, zachowując jednak podział promienia dawniéyszy, jak można o tém wnosić z dzieła Rudimenta Astronomica Alfragani; item Albategnius astronomus peritissimus de motu stellarum.... Norimbergæ 1537. Późniey 15 wieku Joannes de Regio monte, który się urodził 1436, uznawszy niedogodność podziału dawnieyszego, naznaczył promieniowi 600000 równych części, i w takowych częściach wyrachował wstawy, lecz wkrótce zamienił ten podział na dziesiątkowy, zakładaiąc promień 10000000, i podług niego znowu wyrachował wstawy; Potém podług podziału dziesiątkowego wyrachował tablicę stycznych którą nazwał tabula foecunda — W 16m wieku podług takiegoż podziału Joachimus Rheticus wyrachował tablicę siecznych, którą jego Uczeń Valentius Otho po jego śmierci wydał w dziele pod tytułem: Opus palatinum de triangulis a Geor. Joach. Rhetico coeptum Valentinuus Otho consummavit 1596. (w Neustadt w Phalz) — Odtąd podział dziesiątkowy promienia ciągle się utrzymuje;

Fig: 1. kąty podobné, których boki są proporcyonalne; muszą więc między linijami trygonometrycznémi zachodzić pewne stosunki stałe, należy je odkryć i wyprowadzić. I tak z troykątów podobnych SDB, SAT mamy proporcyą:

SD : BD = SA : AT ; czyli dosta.AB : wst.AB = P : sty.AB, z téy proporcyi możemy znaleść wartość któregokolwiek wyrazu *np.* styczney; będzie więc, nazywając dla skrócenia łuk AB, jedną literą A ;

$$\text{Sty.A} = \frac{\text{wst.A} \times \text{P}}{\text{dosta.A}}$$

Z tychże samych troykątów mamy :
SD : SB = SA : ST ; czyli dosta.A : P = P : sie.A

$$\text{Ztąd sie.A} = \frac{\text{P}^2}{\text{dosta.A.}}$$

mamy jescze i tę proporcyą:
BD : SB = AT : ST ; czyli wst.A : P = sty.A : sie.A
z troykątów podobnych SCB, SFP, mamy :
SC : CB = SF : FP; czyli wst.A : dosta.A = P : dosty. A.

$$\text{ztąd dosty.A} = \frac{\text{dosta.A} \times \text{P}}{\text{wst.A}}$$

z tychże samych troykątów mamy SC:SB=SF:SP; czyli wst.A : P = P : dosie.A

$$\text{ztąd dosie.A} = \frac{\text{P}^2}{\text{wst.A}}$$

Z troykątów podobnych SAT, SFP, mamy:
AT : AS = SF : FP , czyli sty.A : P = P : dosty.A

$$\text{ztąd dosty.A} = \frac{\text{P}^2}{\text{sty.A}}; \quad \text{sty.A} = \frac{\text{P}^2}{\text{dosty.A}}$$

W troykącie prostokątnym SAT mamy
$\text{ST}^2 = \text{SA}^2 + \text{AT}^2$; czyli $\text{Sie.}^2\text{A} = \text{P}^2 + \text{sty.}^2\text{A}$.

Także w troykącie prostokątnym SFP mamy Fig: 1.
$\text{SP}^2 = \text{SF}^2 + \text{FP}^2$; czyli $\text{dosie}^2\text{A} = \text{P}^2 + \text{dosty.}^2\text{A}$.

W troykącie prostokątnym SBD jest $\text{SB}^2 = \text{BD}^2 + \text{SD}^2$; czyli $\text{P}^2 = \text{wst}^2\text{A} + \text{dosta}^2\text{A}$ ztąd $\text{dosta}^2\text{A} = \text{P}^2 - \text{wst}^2\text{A}$. ztąd $\text{dosta.A} = \sqrt{\text{P}^2 - \text{wst}^2\text{A}}$; to jest, że dostawa jakiégokolwiek łuku równa się pierwiastkowi kwadratowému wyciągniętému z różnicy między kwadratém z promienia a kwadratem ze wstawy tegoż łuku.

Podobnym sposobem postępując możnaby wyprowadzić inne stosunki, między linijami trygonometrycznémi zachodzącé, lecz na początki trygonometryi, liczba stosunków znalezionych jest dostateczną.

31. Takowe stosunki między linijami trygonometrycznémi zachodzące pokazują, że skoro wyrachujemy niektóré linije trygonometrycznó na wszystkie łuki, za pomocą tych stosunków znaydziemy wszystkie inné linije, podług tégoż samégo promienia. Zastanawiając się zaś nad składem tych stosunków postrzegamy, że znajomość wartości wstaw i dostaw, bardzo łatwo da poznać wartość innych liniy trygonometrycznych, przeto całe nasze staranie powinniśmy obrócić na wyrachowanie wstaw i dostaw wszystkich łuków.

Wiémy że wstawa cwiartki okręgu koła równa się promieniowi, wstawa trzeciéy części cwiartki równa się połowie promienia, z tych dwoch wstaw wiadomych należy wyrachować wstawy i dostawy wszystkich innych łuków; do czego potzebna jest znajomość dwoch podań następnych:

1od. Z wiadoméy wstawy i dostawy łuku danégo, znaleść wstawę i dostawę łuku dwa razy większégo, lub dwa razy mniéyszégo.

31. Z wiadomych wstaw i dostaw dwoch jakichkolwiek łuków danych, znaleść wstawę i dostawę łuku równégo ich summie lub różnicy.

Fig: 2. 32. *Znaleść wstawę i dostawę łuku dwa razy większégo od łuku danego.*

Niech będzie łuk AB, którego wstawa AD, dostawa SD są wiadomé; i drugi łuk dwa razy większy ABC, trzeba znaleść jego wstawę CF.

Ponieważ łuk ABC jest dwa razy większy od łuku AB, przeto łuk BC jest równy łukowi AB, zatém ich dostawa SD jest spolna, wstawy AD, CD są równé, przypadają w jeden punkt D, i składają liniją prostą AC; więc troykąty ASD, ACF, mając kąt A spólny, kąty D i F prosté, a zatém i trzecie równé, są podobné, i dają proporcyą następującą:

AS : SD = AC : CF; czyli AS : SD = 2AD : CF to jest P : dosta.AB = 2 X wst.AB . wst.2AB

$$\text{ztąd wst.}2AB = \frac{2 \times \text{wst.}AB \times \text{dosta.}AB}{P}$$

co nam pokazuje, że wstawa łuku podwóynego równa się podwóynému iloczynowi ze wstawy przez dostawę łuku pojedyńczégo podzielonemu przez promień.

Dla znalezienia zaś dostawy tego łuku, podług wiadomego sposobu (30), robię kwadrat ze wstawy znalezionéy, odeymuję od kwadratu promienia, z reszty wyciągam pierwiastek kwadratowy, a ten będzie dostawą szukaną.

33. *Znaleść wstawę łuku dwa razy mniéyszégo od łuku danégo.*

Niech będzie łuk ABC, którégo wstawa CF, a tém samém i dostawa SF są wiadomé, i łuk AB, dwa razy mniéyszy od ABC, trzeba znaleść jego wstawę AD.

Na ten koniec dostawę SF, odciągam od

promienia SA i otrzymuję wstawę odwrotną FA. Fig: 2.
W troykącie prostokątnym CFA, gdy kwadrat wstawy CF, i kwadrat wstawy odwrotnéy FA, dodam w jednę summę, otrzymam kwadrat z linii AC, pierwiastek wyciągnięty oznaczy samę liniją AD, połowa zas jego będzie szukaną wstawą AD.

Albo tak. Troykąty ASD, ACF podobné dają: AS : AC = AD : AF; dziełąc oba wyrazy piérwszégo stosunku przez 2, otrzymujemy

$$\frac{AS}{2} : AD = AD : AF$$

ztąd widzimy, że wstawa łuku dwa razy mniéyszégo, jest średnią wielorazowo proporcyonalną między połową promienia a wstawą odwrotną łuku danégo; więc pierwiastek kwadratowy wyciągnięty z mnogości zrobionéy z połowy promienia przez wstawę odwrotną łuku danégo, pokaże wielkość wstawy szukanéy łuku dwa razy mniéyszégo.

34. *Znaleść dostawę łuku dwa razy mniéyszégo od łuku danégo, to jest liniją SD.*

Mając wstawę AD, możemy znaleść dostawę podług prawidła podanégo w liczbie 30; lecz można ją także otrzymać sposobem następującym. Prowadzę liniją CG; troykąty ASD, FGC, podobné, bo maią kąty D i F, prosté, kąty S, i G, równé jako jednostronné dają

AS : CG = SD : GF

a że z podobieństwa troykątów ASD, AGC, widzimy, że jako bok AS jest połową boku AG, tak i bok SD połową jest boku GC, przeto dziełąc oba wyrazy piérwszégo stosunku przez dwa wypada

$$\frac{AS}{2} : SD = SD : GF,$$

Fig: 2. to jest: dostawa łuku dwa razy mniéyszégo jest średnią wielorazowo proporcyonalną między połową promienia, a wstawą odwrotną GF łuku GC, spełniającégo łuk dany CA do półokręgu. Więc mając łuk dany, dla otrzymania dostawy łuku dwa razy mniéyszégo, trzeba wstawę odwrotną łuku spełniającego łuk dany do półokręgu rozmnożyć przez połowę promienia, i z téy mnogości wyciągnąć pierwiastek kwadratowy.

35. *Znaleść wstawę łuku równego summie lub różnicy dwoch łuków danych.*

Fig: 3. Niech będzie łuk większy AB, który naznaczam literą A, a którégo wstawa BE, i dostawa SE, są wiadomé, i drugi mniéyszy BC, któ- ry nazywam B, a którégo wstawa CF, i dostawa SF są także wiadomé.

Na łuku większym odcinam łuk BD równy łukowi BC, mamy więc łuk AC, równy summie dwoch łuków A, i B, i łuk AD równy różnicy między łukami A i B; prowadzę łuku AC wstawę CG, i łuku AD wstawę DH, takowé wstawy trzeba wynaleść.

Na ten koniec robię łuku BD, wstawę FD, przypada ona w punkt F, z punktu F prowadzę do promienia SA, prostopadłą FJ, i do tegoż promienia, przez punkta F. i D, prowadzę równolegle FK, DL. Linije CF, FD, jako wstawy równych łuków są równé między sobą, i składają liniją prostą. Troykąty FLD, CKF, dla równości boków CF i FD, i dla równości kątów odpowiednych mogą przystać, a ztąd wypada FL = CK; a że FJ = KG, DH = LJ, jako boki przeciwné prostokątów, więc

$$CG = KG + CK = FJ + CK.$$
$$DH = FJ - FL = FJ - CK.$$

przeto cała rzecz sprowadza się do znalezienia liniy FJ, i CK.

Liniją FJ, znaydziemy z troykątów SBE, SFJ podobnych; mamy z nich bowiem SB : BE = SF : FJ, czyli P : wst A = dosta. B : FJ. Fig: 3.

$$\text{ztąd } FJ = \frac{\text{wst. } A \times \text{dosta. } B.}{P}$$

Liniją zaś CK otrzymamy z troykątów SBE, CKF, są oné podobné, ponieważ mają kąty K, i L, równé jako prosté, kąt CFK równy kątowi SFL, bo każdy z nich z kątem KFS, składa kąt prosty, a zatém równy też kątowi SBE, jako jednostronnému z kątem SFJ. Z ich boków ułożymy proporcyą.

SB : SE = CF : CK, czyli P : dosta. A = wst. B : CK

$$\text{ztąd } CK = \frac{\text{dosta. } A \times \text{wst. } B.}{P.}$$

$$\text{przeto } CG = FJ + CK = \frac{\text{wst. } A \times \text{dosta. } B + \text{dosta. } A \times \text{wst. } B}{P}$$

$$DH = FJ - CK = \frac{\text{wst. } A \times \text{dosta. } B - \text{dosta. } A \times \text{wst. } B}{P}$$

a że linija CG jest wstawą łuku AC, który jest = AB + BC = A + B; linija zaś DH jest wstawą łuku AD, który jest = AB — BD = A — B; więc na mieyscu CG, DH, kładąc wyrażenia, wst. (A + B), wst. (A — B), i razem to łącząc mamy:

$$\text{wst. } (A \pm B) = \frac{\text{wst. } A \times \text{dosta. } B \pm \text{dosta. } A \times \text{wst. } B.}{P}$$

to wyrażenie pokazuje, że mając wstawy i dostawy dwoch łuków, dla znalezienia wstawy łuku równégo summie łuków danych, trzeba zrobić dwie mnogości, jednę ze wstawy łuku większego przez dostawę łuku mniéyszego, drugą z dostawy łuku większégo przez wstawę łuku mniéyszégo, i summę tych mnogości podzielić

D

Fig: 3. przez promień; różnica zaś między témiż mnogościami podzielona także przez promień oznaczy wielkość wstawy łuku równégo różnicy między dwoma łukami danémi.

36. *Znaleść dostawę łuku równégo summie lub różnicy dwoch łuków danych.*

Mając znalezioné wstawy CG i DH, łuków AC, AD, łatwo możemy znaleść ich dostawy SG, SH, odciągając kwadrat z każdey wstawy osobno od kwadratu z promienia, a z reszty wyciągając pierwiastek kwadratowy; lecz chcąc wynaleść dostawy nie znaydując wstaw, trzeba na ich rachowanie wyprowadzić podobné wzory, jakiéśmy otrzymali na rachowanié wstaw.

Na ten koniec uważamy, że dla przystawania troykątów CFK i FDL, linije KF, LD, są równé; także $KF = GJ$, $LD = JH$, jako boki przeciwné prostokątów, przeto

$$SG = SJ - GJ = SJ - KF.$$

$$SH = SJ + JH = SJ + KF.$$

powinniśmy więc wynaleść dwie linije SJ, KF.

Na znalezienié linii SJ, mamy z troykątów SBE, SFJ, proporcyą:

$SB : SE = SF : SJ$, czyli $P : \text{dosta. } A = \text{dosta. } B : SJ$,

$$\text{ztąd } SJ = \frac{\text{dosta. } A \times \text{dosta. } B}{P}$$

na znalezienié linii KF, mamy z troykątów SBE, CKF, proporcyą:

$SB : BE = CF : KF$, czyli $P : \text{wst } A = \text{wst. } B : KF$

$$\text{ztąd } KF = \frac{\text{wst. } A \times \text{wst. } B}{P}$$

$$\text{przeto } SG = SJ - KF = \frac{\text{dosta. } A \times \text{dosta. } B + \text{wst. } A \times \text{wst. } B}{P}$$

$$SH = SJ + KF = \frac{\text{dosta. } A \times \text{dosta. } B + \text{wst. } A \times \text{wst. } B}{P}$$

na miéyscu SG, i SH, kładąc wyrażenia dosta. (A+B), i dosta. (A — B), i razem łącząc mamy: Fig: 3.

$$\text{dosta. } (A \mp B) = \frac{\text{dosta. } A \times \text{dosta. } B \pm \text{wst. } A \times \text{wst. } B}{P}$$

ztąd poznajemy, że dla znalezienia dostawy łuku równégo summie dwoch danych łuków trzeba zrobić dwie mnogości, jednę z ich dostaw, a drugą z ich wstaw, odjąć drugą od piérwszey a resztę podzielić przez promień; dla otrzymania zaś dostawy łuku równégo różnicy między dwoma łukami, trzeba rzeczoné mnogości zebrać w jednę summę i podzielić ją przez promień.

37. Mając już znalezioné wzory na wyrachowanie wstawy łuku dwa razy większégo, lub dwa razy mniéyszégo, jako też wstawy łuku będącégo summą lub różnicą dwoch łuków danych, możemy przystąpić do wyłożenia sposobu rachowania wstaw wszystkich łuków.

Cały rachunek zaczyna się od znalezienia wstawy łuku jednéy minuty, którą otrzymamy z jakiéykolwiek wstawy wiadoméy, szukając wstaw łuków coraz dwa razy mniéyszych, aż póki nie przyydziemy do wstawy łuku dość małégo, któryby ledwo kilka minut zamykał; ztąd, uważając że wstawy łuków małych nie wiele się różnią od samych łuków, i dla tego przypuszczając że się zmniéyszają w takim stosunku, w jakim zmniéyszają się same łuki, ułożymy proporcyą; jak się ma łuk mały, którégo mamy wstawę wiadomą, do łuku jednéy minuty; tak się ma wstawa znaleziona, do wstawy łuku jednéy minuty, którą z téy proporcyi otrzymawszy, wyrachujemy za pomocą podań wyżey dowiedzionych pod liczbami 32, 33, i 35, wstawy wszystkich innych łuków.

38. Mamy podział okręgu koła podwóyny, jeden na stopni 360 dawniéyszy, drugi na stopni 400, który teraz zaczyna się upowszechniać. Obaczmy jak w każdym z nich moglibyśmy wyrachować wstawy nieużywając pomocy Algebry lub wyższey Matematyki.

Biorąc podział okręgu koła na 360°, mamy wiadomé dwie wstawy, jednę cwiartki okręgu koła, to jest stopni 90°, równą promieniowi, drugą dwónastéy części okręgu koła, to jest stopni 30°, równą połowie promienia; Bierzemy *np.* tę ostatnią, i z niéy wyprowadzamy wstawy łuków coraz dwa razy mniéyszych. Wst. 15° otrzymam sposobem następnym: znayduję dosta. 30°, odciągając kwadrat ze wst. 30°, to jest kwadrat z $0,5$, który jest $0,25$, od kwadratu z promienia $= 1$, a z reszty $0,75$ wyciągając pierwiastek kwadratowy, będzie więc dosta. $30^\circ = 0,8660254$, odjąwszy ją od promienia, mam wsta. odw. $30^\circ = 0,1339746$; ztąd dla znalezienia wst. 15°, ponieważ wstawa łuku dwa razy mniéyszégo równa się pierwiastkowi kwadratowému z mnogości zrobionéy ze wstawy odwrotnéy łuku danégo przez połowę promienia (33), mnożę wst. odw. 30°, przez $0,5$, z tey mnogości wyciągam pierwiastek kwadratowy, i otrzymuję wst. $15^\circ = 0,2588190$, dla znalezienia dosta. 15°, używam sposobu podanégo pod liczbą 34, który każe wst. odw. 150°, jako łuku spełniającégo 30° do półokręgu, rozmnożyć przez połowę promienia, i z téy mnogości wyciągnąć pierwiastek kwadratowy; wst. odw. 150°, ponieważ jest summą (jak się można o tém łatwo z figury przekonać) z dosta 30° i z promienia, będzie $= 1,8660254$; mnożąc ją pzzez $0,5$, i wyciągając pierwiastek kwadratowy otrzymamy dosta. $15^\circ = 0,9659258$. Podobnym

sposobem postępując będziemy wyprowadzali wstawy i dostawy ł łuków co raz dwa razy mniéyszych, i tak będziemy mieli,

wst. $7^\circ 30' = 0,1305262$: dosta. $7^\circ 37^\circ = 0,9914449$
wst. $3^\circ 45' = 0,0654031$, dosta. $3^\circ 45' = 0,9978589$
wst. $1^\circ 52',5 = 0,0327191$. dosta. $1^\circ 52'5 = 0,9994646$
wst. $56',25 = 0,0163617$. dosta. $56'25 = 0,9998661$
wst. $28',125 = 0,0081811$. dosta. $28'125 = 0,9999665$
wst. $14'0625 = 0,0040905$. dosta. $14',0625 = 0,9999917$
wst. $7',03125 = 0,0020453$, dosta. $7'03125 = 0,9999979$
ws $3',515625 = 0,0010222$ do. $3',015625 = 0,9999995$
w $1',7578125 = 0,0005110$ d. $1',7578125 = 0,9999998$

Z téy ostatniéy wstawy znaydziemy wstawę łuku jednéy minuty, układając, podług rozumowania wyższego (37), następną proporcyą:

$1',7578125 : 1' = 0,0005110 :$ wst. $1'$
ztąd wst. $1' = 0,00029089 = 0,0002909$

Chcąc przestać na mniéyszéy liczbie znaków dziesiętnych, moglibyśmy szukać wst. $1'$ biorąc łuk większy *np.* $56',25$, albo $1^\circ 52',5$, i podobną jak teraz układając proporcyą; lecz im z większą liczbą zaaków dziesiętnych chcemy otzymywać wstawy, tém mniéyszy łuk i jego wstawę w proporcyą powinniśmy wprowadzać.

Tę samę wartość wst. $1'$ znalezlibyśmy zaczynając rachunek od wst. $90^\circ = 1$, to jest szukając wst. 45°, wst. 22°, $30'$, i t. d. lecz robota byłaby dłuższa.

39. Mając wst. $1'$, znaydziemy wstawy łuków do kilku minut *np.* do $4'$ mnożąc wst. $1'$, przez liczbę minut zamykających się w łuku; którego wstawy szukamy: i tak będzie.

wst. $2' = 2 \times 0,0002909 = 0,0005818$.
wst. $3' = 3 \times 0,0002909 = 0,0008727$.
wst. $4' = 4 \times 0,0002909 = 0,0011636$.

Fig: 3. wstawy zaś dalszych łuków otrzymamy sposobami podanémi na znalezienie wstawy łuku dwa razy większégo lub będącego summą, albo różnicą dwoch łuków danych. I tak *np.* chcąc znaleść wst. 5′, użyjemy sposobu podanégo na znalezienie wstawy łuku będącego summą dwoch łuków, bo widzimy że $5' = 3' + 2'$, będzie więc (35)

$$\text{wst.}5' = \frac{\text{wst.}3' \times \text{dosta.}2 + \text{dost.}3 \times \text{wst.}2'}{P.}$$

do czego trzeba mieć jescze dosta. 2′ dosta. 3′ które ze wst. 2′, i wst. 3′, otrzymując sposobem wiadomym (30) będą: $\text{dosta.}2 = 0{,}9999998$; $\text{dosta.}\ 3' = 0{,}9999996$,

$$\text{przeto wst.}\ 5' = 0{,}0008327 \times 0{,}9999998 + 0{,}9999996 \times 0{,}0005818$$

po wykonaniu działań, będzie

$$\text{wst.}\ 5' = 0{,}0014544:$$

Dla znalezienia zaś wst. 6′, możemy użyć sposobu podanego (32), na szukanié wstawy łuku dwa razy większégo, bo $6 = 2 \times 3$, więc będzie

$$\text{wst.}\ 6' = 2 \times \text{wst.}3' \times \text{dosta.}3', \text{ to jest:}$$

$$\text{wst.}6' = 2 \times 0{,}0008727 \times 0{,}9999996 = 0{,}0017453:$$

Jeslibyśmy wprzód wynaleźli wst. 6′, aniżeli wst. 5′; wtedy wst. 5′, moglibyśmy znaleść uważając łuk 5′, jako różnicę między 6′ i 1′.

Podobnie postępując jak teraz postępowaliśmy w szukaniu wst. 5′, i wst. 6′, otrzymywalibyśmy wstawy łuków coraz większych. Wstawy łuków będących podwóynémi względem łuków mniéyszych nayłatwiéy byłoby otrzymywać sposobem podanym na znalezienie wstawy łuku dwa razy większégo: na łuki zaś inne, które nie są podwóynémi, a są mniéyszé od 15°, można używać sposobu danégo na szukanie wstawy łuku równégo summie lub różnicy dwoch łuków

danych; na łuki zaś zawarte między 15°, a 30°, Fig: 3. naydogodniéy byłoby używać sposobu danégo na szukanié wstawy łuku będącégo różnicą między dwoma danémi, uważając łuk dany za różnicę między 30°, a stosownym łukiem mniéyszym, bo wst. $30° = 0{,}5$ nie wiele mając znaków skróci robotę.

Wyrażoné sposoby szukania wstaw nie są dość prędkie, więc użycie ich na wszystkie łuki zawarte w całéy cwiartce koła nie prędkoby nas prowadziło do otrzymania żądanych wypadkow, dla tego używać ich tylko potrzeba do 30°.

40. Na łuki zaś większé od 30°, wyprowadzimy sposob znacznie skracający robotę.

Niech będzie łuk $AB = 30°$, odcinamy równé Fig: 4. łuki BC, BD, więc łuk AD, o tyle stopni jest większy od 30°, o ile AC jest mniéyszy od 30°, wstawy ich są DE; CF; prowadzę liniją CH równoległą do promienia SA, i cięciwę DC, do któréy promień SB jest prostopadłym, a przeto ją dzieli na dwie części równé DJ, JC, z których każda jest wstawą jednégo z równych łuków BC, BD. Troykąty prostokątné SGE, DGJ, mając kąty przy G równé; mają tém samém i kąty GSE, GDJ równé, bo każdy z nich z kątem G składa kąt prosty, a że $GSE = 30°$, więc i $GDJ = 30°$. przeto w troykącie KDC, skoro kąt $KDC = 30°$, to jest równy trzeciey części kąta prostego, bok KC, jest połową przeciw prostokątnéy DC (14), zatém równy jey połowie JC, więc $KC^2 = JC^2$; w tymże troykącie KDC mamy $KD^2 = DC - KC^2$; a że $DC = 2.JC$, przeto $KD^2 = 4.JC^2 - JC^2 = 3.JC^2$, po wyciągnięciu pierwiastku kwadratowégo, mamy

$KD = JC \times \sqrt{3} = \text{wst.}\ BC \times \sqrt{3}$; a że $DE = KE$

$KD = CF + KD$,

przeto $\text{wst.}\ AD = \text{wst.}AC + \text{wst.}BC \times \sqrt{3}$; czyli

Fig: 4. wst. $(AB+BD) =$ wst. $(AB-BC) +$ wst. $BC\sqrt{3}$.
nazywając łuk BC, lub BD jedną literą A, a na mieyscu łuku AB. kładąc 30°. wypada:

wst. $(30^\circ+A)=$ wst. $(30^\circ-A) +$ wst. $A\times\sqrt{3}$:

to pokazuje: że wstawa łuku o ilekolwiek stopni większégo od 30°, równa się wstawie łuku o tyle stopni mnieyszégo od 30°, nad to jescze wstawie łuku będącégo różnicą między łukiem mnieyszym, lub większym a 30°, mnożonéy przez pierwiastek kwadratowy z liczby 3, to jest przez 1,7320508. I tak *np.*

wst. 35 = wst. 25°+ wst, $5^\circ\times\sqrt{3}$.
$=0,4226183+0,0871557\times1,7320508$
$=0,5735764$:

tégo sposobu używając znaydziemy wstawy wszystkich łuków od 30°, do 60°.

41. Na wynalezienie zaś wstaw łuków zawartych między 60° a 90°, mamy jescze sposob prędszy od poprzedzających.

Naznaczyliśmy łuk $AB=30^\circ$, więc łuk $BL=60^\circ$; łuki BC, BD są równé, więc łuk LC o tyle stopni jest większy od 60°, o ile stopni łuk LD, jest mnieyszy od 60°; łuku LC wstawa jest CH, łuku LD wstawa DM. Linija $CH=KH+KC=DM+KC$, a że (14) $KC=JC=$ wst. BC, więc wst. LC = wst. LD + wst. BC:

to jest wst. $(LB+BC)=$ wst. $(LB-BD)+$ wst. BC
nazywając łuk BC, lub BD, jedną literą A, a na mieyscu LB, kładąc 60°, wypada wst. $(60^\circ+A)=$ wst. $(60^\circ-A)+$ wst. A

ztąd postrzegamy, że wstawa łuku o ilekolwiek stopni większégo od 60°, równa się wstawie łuku o tyleż stopni mnieyszégo od 60°, i wstawie łuku będącégo różnicą między łukiem danym a 60°; i tak wst. 65° = wst. 55° + wst. 5°.

to jest ws. $65^\circ=0,8191521+0,0871557=0,9063078$

42. Biorąc zaś podział koła na stopni 400, a każdy stopień dzieląc na minut 100 i t. d. dla znalezienia wstawy jednéy minuty setnéy, to jest wst. 0°,01, moglibyśmy zacząć rachunek, albo od wstawy czwartéy części okręgu koła, równéy promieniowi, albo od wstawy dwónastéy części okręgu, równéy połowie promienia, to jest, zakładając promień $=1$, albo od wst. $100^\circ=1$, albo od wst. $\frac{100^\circ}{3}=0,5$; lecz dla prędszego przyyścia do wstawy jednéy minuty, dogodniéy jest tak, jak i w poprzedzającym rachunku, zaczynać od wstawy równéy połowie promienia. Dla tego zaś, że dwónastey części okręgu koła, to jest $\frac{100^\circ}{3}$, nie można zupełnie wyrazić w ułamkach dziesiętnych, dalszé łuki coraz dwa razy mnieyszé oznaczam ułamkami zwyczaynémi, mając wst. $\frac{100^\circ}{3}=0,5$; i dosta. $\frac{100^\circ}{3}=0,8660254$, szukając wstaw i dostaw łuków coraz dwa razy mnieyszych, otrzymamy te samé wypadki, co piérwiéy, i tak będzie

wst. $\frac{100^\circ}{6}=0,2588190$. dosta. $\frac{100^\circ}{6}=0,9659258$.
wst. $\frac{100^\circ}{12}=0,1305262$ dosta. $\frac{100^\circ}{12}=0,9914449$.
wss. $\frac{100^\circ}{24}=0,0654031$. dosta. $\frac{100^\circ}{24}=0,9978589$.
wst. $\frac{100^\circ}{48}=0,0327191$. dosta. $\frac{100^\circ}{48}=0,9994646$.
wst. $\frac{100^\circ}{96}=0,0163617$. dosta. $\frac{100^\circ}{96}=0,9998661$.

wst. $\frac{100^{\circ}}{192}=0,0081811$. dosta. $\frac{100^{\circ}}{192}=0,9999665$.
ztąd dla znalezienia wst. 0°,01, ułożymy proporcyą:

$$\frac{100^{\circ}}{192} : 0^{\circ}01 = 0,0081811 : \text{wst. } 0^{\circ},01.$$

co daje wst. 0°,01=0,000157077=0,0001571.

Mając wst. 0°,01, znaydziemy wstawy wszystkich łuków aż do 100°, używając sposobów podanych na szukanie wstawy łuku dwa razy większego, lub będącego summą, albo różnicą dwoch łuków danych.

Fig:5. 43. Mając wyrachowané wstawy wszystkich łuków mieszczących się w całéy cwiartce okręgu koła, zamykających stopnie i minuty; możemy łatwo znaleść wstawy łuków zamykających stopnie minuty i sekundy. Uważamy bowiem, że, jeśli wéźmiemy kilka łuków AB, AG, AC, nie wiele się między sobą różniących, i poprowadzimy ich wstawy BE, GH, CD, a przez koniec B, łuku naymnieyszégo, pociągniemy liniją BK, równoległą do promienia AS; linije CK, GI, są różnice między wstawami CD, GH, a wstawą BE; aże łuk BC, dla swojéy małości, może być uważany za liniją prostą, troykąty BKC, BIG, mogą być wzięté za prostokréślné, zatém dadzą proporcyą następną: CK : GI = CB : GB. to jest: różnice między wstawami łuków, nie wiele się jeden od drugiego różniących, mają się jak różnice między samémi łukami. Ta uwaga daje nam prędki sposób znalezienia wstawy łuku zamykającégo stopnie minuty i sekundy, bo jeźli założymy, że łuki AB, AG, AC, są wiadomé, łuki AB, AC zamykają stopnie i minuty, a łuk AG, pośredni zamyka stopnie minuty i sekundy; wstawy CD, BE, są także wiadomé, a szukamy wstawy GH; widzimy, że dość jest znaleść liniją GI, któ-

rą dodawszy do wstawy BE, otrzymamy wstawę GH, tę zaś liniją GI, znaydziémy z wyższéy proporcyi, którą, przemieniając stosunki, możemy tak wysłowić: jak się ma różnica między łukiem większym a mniéyszym od danégo, do różnicy między łukiem danym a mniéyszym, tak się ma różnica między wstawą łuku większégo, a wstawą łuku mniéyszégo, do różnicy, między wstawą szukaną, a wstawą łuku mniéyszégo; w téy proporcyi trzy wyrazy początkowé są wiadomé, więc znaydziemy wyraz czwarty, który dodawszy do wstawy mniéyszégo łuku, otrzymamy wstawę łuku założonego. Ponieważ łuk BC bierze się za liniją prostą, więc powinien być, ile można naymniéyszy, dla tego pospolicie biorą się łuki AC, AB, o jednę tylko minutę różniącé się między sobą; zakładamy *np.* podług dawnégo podziału znaleść wst. 10°,20′,15″, na ten koniec bierzémy wst. 10°. 20′=0,1793746, i wst. 10°.21′=0,1796607, odeymując piérwszą od drugiéy, mamy różnicę 2861, i podług wyższego rozumowania układamy proporcyą; 1′ czyli 60″ : 15″= 2861 : x ; ztąd x=715 dodawszy tę liczbę do wst. 10°.20′=0,1793746, otrzymujemy wst. 10°.20′,15″=0,1794461. Fig: 5.

44. Skoro mamy wstawy wszystkich łuków mieszczących się w całéy cwiartce okręgu koła, mamy już razem i ich dostawy, bo wstawy łuków mniéyszych od połowy cwiartki, są dostawami łuków większych od jéy połowy, a dopełniających piérwszé do całéy cwiartki, i wzajemnie; tak *np.* w podziale dawnym wst. 40°= dosta. 50°. a wst. 50°= dosta. 40°; w podziale zaś nowym wst. 40°= dosta. 60°, a wst. 60°= dosta. 40°.

45. Zamiast rachowania wstaw wszystkich łuków mieszczących się w całéy cwiartce okrę-

gu koła; można byłoby rachować wstawy łuków zawartych w połowie tylko cwiartki, lecz należałoby tychże łuków rachować dostawy, które mając, mielibyśmy tém samém wstawy i dostawy wszystkich łuków zamykających się w całéy cwiartce okręgu; lecz rachunek dostaw wymagając w niektórych łukach mnożenia i wyciągania piérwiastków, jest dłuższy od rachunku wstaw, gdzie trzeba tylko mnożyć i dodawać; zatém dogodniéy jest szukać wstaw wszystkich łuków całéy cwiartki.

46. Z wiadomych wstaw i dostaw możémy wynaleść wszystkié inné linije trygonometryczné za pomocą stosunków między temi linijami zachodzących (30); wyprowadziliśmy z nich bowiem że:

$$\text{sty. } A = \frac{\text{wst. } A \times P}{\text{dosta. } A}; \quad \text{dosty. } A = \frac{\text{dosta. } A \times P}{\text{wst. } A}$$

$$\text{sie. } A = \frac{P^2}{\text{dosta. } A}; \quad \text{dosie. } A = \frac{P^2}{\text{wst. } A}$$

te wyrażenia pokazują, co należy robić dla otrzymania każdéy linii; chcąc *np*, znaleść styczną jakiegokolwiek łuku, trzeba wstawę tego łuku rozmnożyć przez promień, a tę mnogość podzielić przez dostawę tegoż samego łuku. I tak: dla otrzymania sty. 40° w dawnym podziale koła; mnożę wst. 40°, która jest 0,6427876, przez promień $=1$, i dzielę przez dosta. 40°, to jest przez 0,7660444, będzie więc sty. 40° $= \frac{0{,}6427876}{0{,}7660444}$ $= 0{,}8390996$; podobnie należy postępować względem innych liniy trygonometrycznych.

47. Wynalezioné wszystkié linije trygonometryczné piszą się porządkiem przy łukach, do których należą, szeregi łuków i liniy trygonometrycznych im odpowiadających, nazywają się

tablicami trygonometrycznémi. Układ takowych tablic jest dowolny, dla tego przy każdych tablicach pospolicie znayduje jego opisanie.

48. Wyprowadziliśmy stosunki zachodzącé między linijami trygonometrycznémi w jedném kole, i pokazaliśmy, jak za ich pomocą z wiadoméy wstawy jednégo łuku, znaydują się wszystkie linije trygonometryczne innych łuków, zakładając promień $=1$; lecz promieniowi może być dana wartość rozmaita, przeto należy pokazać sposób otrzymania z wartości liniy trygonometrycznych wyrachowanych podług jednégo promienia, wartości tych samych liniy podług promienia innégo, na ten koniec, trzeba odkryć stosunek zachodzący między linijami trygonometrycznémi jednégo gatunku łuków podobnych w kołach odmiennych.

Niech będą łuki podobne AB, EG, piérwszy Fig. 6.
nazywam a, drugi A; promień SB, kładę p, promień SG kładę P, prowadzę obu tych łuków wszystkie linije trygonometryczné.

Z troykątów podobnych SBD i SGH mamy, BD : GH $=$ SB : SG; to jest; wst. a : wst. A $=$ p : P;
z tychże troykątów mamy także,
SD : SH $=$ SB : CG; to jest; dosta. a : dosta. A $=$ p : P;
z troykątów podobnych SAT, SEJ, mamy,
AT : EJ $=$ SA : SE; to jest; sty. a : sty. A $=$ p : P;
z tychże samych mamy też,
ST : SJ $=$ SA : SE; to jest; sie. a : sie. A $=$ p : P;
nakoniec z troykątów podobnych SFQ, SLM,
FQ : LM $=$ SF : SL; to jest; dosty. a : dosty. A $=$ p : P;
z tychże troykątów
SQ : SM $=$ SF : SL; to jest; dosie. a : dosie. A $=$ p : P;

Te wszystkie proporcye widocznie nam pokazują, że linije trygonometryczné gatunku je-

Fig. 6. Inego łuków podobnych mają się do siebie jak promienie kół, do których łuki należą.

49. Ztąd wypada, że mając wyrachowané linije trygonometryczne podług jednégo promienia, otrzymamy ich wartość podług promienia innégo, przez następną proporcyą: jak się ma promień podług którego tablica liniy jest wyrachowana, do promienia założonego; tak się ma którakolwiek linija trygonometryczna z tablic, do wartości linii trygonometryczné tegoż gatunku, podług promienia założonego. Zakładam *np.* łuk AB$=10°$, wstawa jego, kładąc promień SB$=1$, jest$=0,1736482$: chcąc znaleść łuku podobnégo GE, wstawę GH, kładąc promień SG$=1000$, układam proporcyą:

$$1 : 1000 = 0,1736482 : GH$$

ztąd, GH$=$ wst. GE$=173,6482$. i t. p.

50. Z tego, że linije trygonometryczné łuków podobnych w kołach odmiennych mają się jak promienie tych kół, wypada; że stosunek któréykolwiek linii trygonometryczney jakiegokolwiek łuku w jedném kole do jego promienia, równa się stosunkowi linii trygonometryczné tegoż gatunku łuku podobnégo w drugiém kole do promienia tegoż koła, ztąd widzimy, że tablice liniy trygonometrycznych pokazują tylko wielkości względné, to jest stosunki tych liniy do promienia, podług któregośmy rachowali; więc, jakkolwiek będziemy odmieniali promień, stosunki liniy trygonometrycznych do promienia zostaną też samé, a przeto wypadek otrzymany z rachunku odbytégo za pomocą liniy trygonometrycznych, podług jakiegokolwiek promienia rachowanych, będzie zawsze ten sam bez żadnéy odmiany.

51. Widzimy, że troykąty ASD, AGC podobné dają proporcyą, Fig: 5.

$$AD : AS = AC : AG,$$

to jest, wstawa łuku AB, tak się ma do jego promienia, jak się ma cięciwa łuku AC, dwa razy większego od łuku AB, do średnicy; więc stosunek wstawy jakiegokolwiek łuku do jego promienia, równa się stosunkowi cięciwy łuku dwa razy większégo do średnicy, przeto zamiast rachowania stosunków łuków do promienia, możemy rachować stosunki cięciw łuków dwa razy większych do średnicy, czyli inaczéy mówiąc, zamiast rachowania wstaw odnosząc je do promienia, można rachować cięciwy odnosząc je do średnicy, i jako wstawy rachowaliśmy w ćwiartce okręgu koła, tak cięciwy należałoby rachować w całém półkolu.

52. Dla prędszégo otrzymania wypadków w działaniach arytmetycznych z liczbami wyrażającémi linije trygonometryczné, zamiast liczb używają się pospolicie ich logarytmy. Te są dwojakié, jedné w układzie Nepera, które maią za grunt liczbę 2,17828...; drugie w układzie Briggsa mające za grunt liczbę 10, te ostatnie dla powszéchnego ich użycia, nazywają się zwyczaynémi, i o nich tylko ciągle tu będzie mowa. Rachunek logarytmów liniy trygonometrycznych, gdybyśmy go sami chcieli teraz odbywać, moglibyśmy wykonać w sposób następny. Zaczyna się on od znalezienia logarytmów wstaw i dostaw. Mamy wyrachowané wstawy i dostawy wszystkich łuków zawartych w ćwiartce okręgu koła, kładąc promień$=1$, ażé oné są mnieyszé od promienia, więc liczby je oznaczające są ułamkami, a jako logarytmy ułamków są odjemné, tak i logarytmy wstaw byłyby odjemnemi, dla uniknie-

nia tego, zakłada się promień podzielony na 10000000000, a podług sposobu wyprowadzonégo pod liczbą 49, z liniy trygonometrycznych wyrachowanych podług promienia $=1$, otrzymamy linije trygonometryczné podług promienia założonégo: w tym razie naymniéyszych nawet łuków wstawy będą wyrażoné przez liczby całkowité, zatém ich logarytmy będą dodatné, i logarytm promienia będzie 10, a przeto łatwy do użycia we wszystkich działaniach. Po takowém przerobieniu, biorąc w tablicach logarytmów liczb zwyczaynych, logarytmy liczb wyrażających wstawy podług promienia $=10000000000$, otrzymamy logarytmy wstaw, i tak *np*, ponieważ wstawa 12éy części okręgu koła równa się połowie promienia, przeto podług dawnego podziału koła, będzie wst. $30^{\circ}=5000000000$; téy liczby logarytm zwyczayny 9,6989700, jest logarytmem wst. 30°. Tym sposobem postępując otrzymamy logarytmy wstaw, wszystkich łuków w całéy cwiartce okręgu koła zawartych.

53. Mając logarytmy wstaw wszystkich łuków będziemy mieli tém samém logarytmy dostaw tychże łuków, bo jako dwoch łuków dopełniających siebie nawzajem do cwiartki okręgu koła, wstawa jednégo jest dostawą drugiégo, tak i logarytm wstawy jednégo jest logarytmem dostawy drugiégo.

54. Podobnie, gdy są w liczbach wyrażoné podług założonégo promienia inné linije trygonometryczné, takowych liczb logarytmy wzięte w tablicach logarytmów liczb zwyczaynych, będą logarytmami liniy trygonometrycznych; lecz skoro mamy znalezioné logarytmy wstaw i dostaw, możemy znaleść logarytmy innych liniy trygonometrycznych za pomocą stosunków między niémi a wstawą lub dostawą zachodzących, bez poprzedniczégo rachowania samych liniy, mamy *np.*

$$\text{sty. } A = \frac{\text{wsta. } A \times P}{\text{dosta. } A}$$

ztąd, log. sty. $A=$ log. wst. $A+$ log. $P-$ log. dosta. A; to jest, logarytm stycznéy otrzymamy, gdy do logarytmu wstawy, dodamy logarytm promienia, a od téy summy odeymiemy logarytm dostawy tegoż samégo łuku,

Podobnie, $\text{dosty. } A = \dfrac{\text{dosta. } A \times P}{\text{wst. } A}$

ztąd, log. dosty. $A=$ log. dosta $A+$ log. $P-$ log. wst. A. Logarytm zaś sieczney i dosiecznéy znaydziemy z wyrażeń

$$\text{sie. } A = \frac{P^2}{\text{wsta. } A};\ \text{dosie. } A = \frac{P^2}{\text{wst. } A};$$

ztąd mamy, log. sie. $A = 2\times$ log. $P-$ log. dosta. A.
log. dosie. $A = 2\times$ log. $P-$ log. wst. A.
to wyrażenie uczy nas, że od podwojonégo logarytmu promienia odjowszy logarytm dostawy jakiégokolwiek łuku, otrzymamy logarytm siecznéy tegoż łuku, odjowszy zaś od podwojonego logarytmu promienia, logarytm wstawy, znaydziemy logarytm dosiecznéy.

55. Wyrachowané logarytmy wszystkich liniy trygonometrycznych układają się w tablice, albo razem z samémi linijami trygonometrycznémi, pisząc naprzód łuk, potém linije trygonometryczné tego łuku, daléy logarytmy tych liniy; albo też, jak bywa nayczęściéy, linije trygonometryczné opuszczają się, a pisze się tylko łuk, i obok niego logarytmy liniy trygonometrycznych tegoż łuku. Takowé tablice ałło są ułożoné na wstawy, styczné i sieczné wszystkich

łuków zamykających się w całéy cwiartce okręgu koła, albo na wstawy, dostawy, styczné, dostyczné, sieczne, dosieczne łuków miesczących się w połowie tylko cwiartki. Jednym czy drugim sposobem będą ułożoné, zawsze mamy logarytmy wszystkich liniy trygonometrycznych jakichkolwiek bądź łuków — Lecz rzadko w których tablicach znaydują się logarytmy wszystkich liniy trygonometrycznych, to jest wstaw, stycznych i siecznych, naypospoliciéy umiesczają się logarytmy tylko wstaw i stycznych, logarytmy zaś siecznych otrzymuja się sposobem w poprzedzającéy liczbie wyrażonym. (f)

(f) Po wynalezieniu logarytmów przez **Jana Nepera** Szkota i wydaniu przezeń 1614 roku logarytmów liczb naturalnych w gruncie 2,71828..., **Henryk Briggs** Prof. Geom. w Oxford przerobiwszy te logarytmy liczb na inne w gruncie 10, wydał 1624; zaczął był rachować w tymże gruncie logarytmy liniy trygonometrycznych, ale śmierć przerwała mu tę robotę, którą dokończywszy **Henryk Gellibrand** Prof. Astronomii w Londynie wydał w Gudzie 1633; lecz piérwiéy już Adryan Ulacq w gruncie Briggsa wydał 1628 w Gudzie logarytmy liczb naturalnych i liniy trygonometrycznych. Od téy epoki aż do naszych czasów logarytmy liczb i liniy trygonometrycznych tak w układzie Nepera, jak Briggsa rozmaicie odmieniane co do ułożenia, powiększané lub zmniéyszané co do rozciągłości i liczby znaków dziesiętnych, wydawané były przez różnych Autorów, nayczęściey pod ich nazwiskami. Ze znajomszych teraz tablic liniy trygonometrycznych i ich logarytmów są:

W dawnym koła podziale: Tablice Ulaka (Ulacq) rozmaitych wydań zamykające i linije trygonometryczné i ich logarytmy; Taylora — Gardinera 1741, 1742, w Londynie, 1770, w Awinionie, 1783 w Paryżu zamykające tylko logarytmy z 7 znakami dziesiętnémi — Lakalla (Lacaille) 1760; 1768, 1781, 1791, 1799 w Paryżu — Szulca (Schultz) 1778 w Berlinie zamykające linije i logarytmy z 7 znakami; — Wegi 1794, 1797, 1800 w Lipsku. — Kaleta (Callet) 1785 w Paryżu z 7 znakami — Plozola (Plauzolle) w Paryżu z 6 znakami — Lalanda 1805 w Paryżu z 5 znakami. — Logarytmy Calleta, Plosolla i Lalanda będąc wydania stéréotype, są naypoprawnieysze —

56. Uskuteczniłem piérwszą część mojego założenia, opisałem linije trygonometryczné, pokazałem stosunki między niémi zachodzącé, wyłożyłem sposób rachowania tak samych liniy, względem jakiégokolwiek promienia, na wszystkie łuki koła, jako też ich logarytmów; przystępuję teraz do części drugiéy, to jest do wyłożenia stosunków zachodzących między linijami trygonometrycznémi, a bokami troykąta prostokréślnego, do czego służą następné twierdzenia:

Twierdzenié I. W każdym troykącie prostokréślnym, boki tak się mają do siebie; jak wstawy kątów im przéciwnych brané podług jednego promienia.

Niech będzie troykąt ABC, mamy dowieść, F. 7 i 8
że; AC : BC = wst. B : wst. A.
AC : AB = wst. B : wst. C,
AB : BC = wst C : wst. A.

Dowod. Mniéyszy bok BC wchodzący w twierdzenie, przedłużam w tę stronę, gdzié się styka z bokiem większym tak, aby ze swojém przedłużeniem był równy bokowi większému AC; z punktów C i D prowadzę do boku trzeciégo AB prostopadłé CF, DE. Troykąty BDE, BCF, podobné dają, BD : BC = DE : CF; Z punktu A promieniem AC, zakréślam łuk CH, a z punktu B, promieniem BD łuk DG; linija

Roku 1815 zaczęto w Paryżu drukować logarytmy Pronego (Prony) z 8 znakami, liczb naturalnych do 100000; a wstaw i stycznych na każdą sekundę.

W nowym koła podziale. Tablice Kalleta 1795 już wymienioné, zamykają także logarytmy wstaw podług nowego podziału — Tablice Bordy (Borda) wydane w Paryżu przez Delambra — Tablice 1799 w Berlinie wydane spolnie przez Hoberta i Idelera zamykające wstawy, styczne, sieczne i logarytmy wstaw i stycznych.

F. 7 i 8 DE (*fig.* 7) jest wstawą łuku DG, czyli kąta B, a w troykącie rozwartokątnym (*fig.* 8.), jest wstawą kąta CBG, a tém samém i kąta mu przyległégo CBA, jako spełniającégo kąt CBG do dwoch kątów prostych; linija CF, jest wstawą łuku CH, czyli kąta A, bok zaś BD = AC; więc w proporcyi wyższéy na miéyscu BD, DE, CF, kładąc wyrażenia im równé AC, wst. B, wst. A, wypada,

AC : BC = wst. B : wst. A.

stosowné uczyniwszy wykréślenie dowiédlibyśmy także, iż

AC : AB = wst. B : wst. C.
AB : BC = wst. C : wst. A. (g)

Fig. 9. (g) Możnaby jescze tego samego twierdzenia dowieść sposobem następnym: Troykąt ABC opisuję kołem, i przez wierzchołek kąta C nie wchodzącego w twierdzenie, prowadzę średnicę CD, przez koniec jey D prowadzę cięciwy DA, DB, do wierzchołków dwoch kątów innych. Kąty BDC, BAC, są równe, bo mając wierzchołki na okręgu koła, ramionami obeymują jeden łuk BC, dla takiéyże przyczyny równe są między sobą kąty ABC, ADC; kąty DAC, DBC, jako leżące w półkolu są proste, więc jeżli liniją CD wezmiemy za promień, i z punktu D, zakreślimy koło, będzie bok BC wstawą kąta BDC, bok AC wstawą kąta ADC, przeto być może

AC : BC = wst. ADC : wst. BDC

a że kąt ADC = ABC, kąt BDC = BAC, przeto na mieyscu kątów ADC, BDC, kładąc im równé ABC, BAC, wypada

AC : BC = wst. ABC : wst. BAC.

Podobnym sposobem stosowne uczyniwszy wykréślenie, można dowieść dwoch innych założonych proporcyy.

Fig. 10 Albo jescze tak: Troykąt ABC opisuję kołem, i ze środka koła S, prowadzę na boki troykąta prostopadłe SD, SE, SF, dzielą one boki na dwie równe częśći; ponieważ połowy mają się jak całości, będzie

AC : BC = CD : CE.
AC : AB = CD : AF.
AB : BC = AF : CE.

Prowadzę promienie SA, SB, SC, linija CD jest wstawą kąta DSC, czylj mu równego ABC; linija CE, jest wstawą kąta CSE, czyli równego jemu CAB; linija AF, jest wstawą kąta ASF, czyli jemu równego ACB; więc w proporcyach wyż-

Jeźli boki AC, BC, są równé, kąty im przeciwné są równé, więc i wstawy ich będą równé; w tym razie rzecz widoczna, że boki mają się jak wstawy kątów im przeciwnych. Fig. 11

57. Chcąc zaś to samo twierdzenie okazać na troykącie prostokątnym ABC, poznajemy łatwo, iż biorąc kąty ostré A i C, sposobem wyższym okaże się, że:

AB : BC = wst. C : wst. A

biorąc zaś kąty A i B; uważamy przeciwprostokątną AC za promień, i z punktu A zakréślamy łuk CF; ramie BC jest w tym razie wstawą łuku CF, czyli kąta A, a przeciwprostokątna jako promień bierze się za wstawę kąta prostego B, więc wypada:

BC : AC = wst. A : P = wst. A : wst. B.

Biorąc znowu kąty C i B; postąpimy, tak jak piérwiéy, to jest przeciwprostokątną AC, uważamy za promień i z punktu C, zakréślamy nią łuk AK; w tym razie ramie AB jest wstawą łuku AK, czyli kąta C, a przeciwprostokątna jako promień bierze się za wstawę kąta prostégo B; więc będzie

AB : AC = wst. C : P = wst. C : wst. B.

Ostatnié dwie proporcye pokazują, że w troykącie prostokątnym jedno ramie kąta prostégo, tak się ma do przeciwprostokątnéy; jak wstawa kąta przeciwnégo ramieniowi uważanému do promienia.

58. Ponieważ w troykącie prostokątnym dwa

---

szych, na miéyscu liniy CD, CE, AF, kładąc wyrażenia wst. B; wst. A; wst. C, otrzymujemy

AC : BC = wst. B : wst. A.
AC : AB = wst. B : wst. C.
AB : BC = wst. C : wst. A.

Fig. 11 kąty ostre składają kąt prosty, więc wstawa jednego jest dostawą drugiego i wzajemnié, to jest wst. A = dosta. C; a dosta. A = wst. C; więc w proporcyach liczby poprzedzającéy na miéyscu wst. A, i wst. C, kładąc dosta. C, i dosta. A; piérwsza proporcya zamieni się

albo na AB : BC = dosta. A : wst. A
albo na AB : BC = wst. C : dosta. C.
albo na AB : BC = dosta. A : dosta. C.

druga i trzecia zamienią się na

BC : AC = dosta. C : P.
AB : AC = dosta. A : P.

Trzy początkowé z tych proporcyy pokazują, że jedno ramie kąta prostego, tak się ma do drugiego ramienia, jak dostawa kąta przyległego piérwszému ramieniowi do wstawy tegoż kąta, albo jak wstawa kąta przeciwnégo piérwszému ramieniowi do dostawy tegoż kąta, albo jak dostawy kątów im przyległych

Z dwoch zaś ostatnich postrzegamy, że ramie kąta prostégo tak się ma do przeciwprostokątnéy, jak dostawa kąta temu ramieniowi przyległego do promienia.

59. Wyprowadzając stosunki między linijami trygonometrycznémi w jednym kole zachodzące (30), pokazaliśmy, że

dosta. A : wst. A = P : sty. A,

więc w proporcyi z liczby poprzedzającey

AB : BC = dosta. A : wst. A

na miéyscu stosunku dosta. A : wst. A, kładąc równy jemu P : sty. A, otrzymujemy

AB : BC = P : sty. A

aże sty. A = dosty. C, będzie też (*A*)

AB : BC = P : dosty. C.

Pokazaliśmy takoż, że, dosta. A : P = P : sie. A więc w proporcyi z liczby 58, AB:AC = dosta.A:P;

na miéyscu stosunku dosta. A : P, kładąc jemu równy P : sie. A wypada Fig. 11

AB : AC = P : sie. A. (*B*)

aże sie. A = dosie. C, będzie:

AB : AC = P : dosie. C.

pokazaliśmy jescze, że wst. A : P = sty. A : sie. A więc w proporcyi z liczby 57, BC : AC = wst. A : P; na miéyscu stosunku wst. A : P, kładąc stosunek równy jemu sty. A : sie. A; otrzymujemy

BC : AC = sty. A : sie. A. (*C*)
czyli BC : AC = dosty. C : dosie. C.

Z tych wszystkich proporcyy teraz wyprowadzonych, postrzegamy; z prop: (*A*), że w troykącie prostokątnym jedno ramié kąta prostégo tak się ma do drugiégo, jak promień do styczney kąta przeciwnego drugiemu ramieniowi, lub do dostyczney kąta jemu przyległégo; z prop: (*B*), żé jedno ramie kąta prostégo tak się ma do przeciwprostokątnéy, jak promień do sieczney kąta przyległégo temu ramieniowi, lub do dosiecznéy kąta jemu przeciwnégo; z prop: (*C*), że jedno ramie tak się ma do przeciwprostokątnéy, jak styczna kąta przeciwnégo temu ramieniowi do siecznéy tegoż kąta, lub jak dostyczna kąta przyległégo temuż ramieniowi do dosiecznéy tegoż kąta.

60. Te samé proporcye wypadną z uwagi, którąśmy uczynili w liczbie 14, że w troykącie prostokątnym, biorąc jedno ramie za promień, drugie będzie styczną kąta mu przéciwnégo, a przeciwprostokątna sieczną tegoż kąta, i z téy własności liniy trygonometrycznych, iż te linije jednego gatunku łuków podobnych mają się jak promienie kol, do których łuki należą — Jakoż niech będzie troykąt prostokątny ABC, w którym Fig. 12 kąt B jest prosty, można w nim którékolwiek ramie kąta prostégo np. AB, uważać za promień,

Fig. 12 wtedy ramie BC, będzie styczną, a przeciwprostokątna sieczną kąta A. — Na ramieniu AB wziętém za promień, z wiérzchołka kąta ostrégo A, odcinam liniją AD, którą zakładam równą promieniowi, podług którego mamy wyrachowané tablice liniy trygonometrycznych, albo tablice ich logarytmów. — Z końca D, wywyższam prostopadłą DE, aż do spotkania się z bokiem AC, będzie ona styczną kąta A, a linija AE sieczną tegoż kąta A tablicową. — Linije BC, DE, będąc stycznémi tegoż samego kąta A, czyli łuków podobnych BF, DG, które promieniami AB, AD, zakréślam, mają się jak promienie AB, AD. Linije AC, AE, będąc siecznémi tegoż kąta A, mają się też jak promienie AB, AD, przeto z nich można ułożyć następné proporcye:

AB : BC = AD : DE

to jest, AB : BC = P. tab. : sty. tab. A = P : dosty. C

także, AB : AC = AD : AE

to jest, AB : AC = P : sie. A = P : dosie. C

znowu, BC : AC = DE : AE

to jest, BC : AC = sty. A : sie. A = dosty. C : dosie. C

61. Dla zrozumienia następnych twierdzeń, należy pierwiéy zrozumieć to podanie; *Z dwoch ilości nieréwnych, ilość większa równa się połowie ich summy i połowie ich różnicy, a ilość mniéysza równa jest połowie ich summy, mniéy połową ich różnicy,* — Dowód tego podania jasno się
Fig. 13 w Algebrze okazuje, można jednak przekonać się o jego prawdzie sposobem następnym: — Niech linija AB, wyraża ilość większą, a linija CD, ilość mniéyszą, trzeba pokazać, że linija większa AB, równa jest połowie summy liniy AB, i CD, i połowie różnicy między némi zachodzącéy; linija zaś CD, równa się połowie summy, mniéy połową różnicy tychże liniy.

Dowod. Obie linije AB i CD, dzielę po połowie, w punktach E i F; przenoszę liniją mniéyszą CD, na większą tak, aby środek F, przypadał na środek E, punkta C, D niech przypadają w G i H; jest GH = CD; różnicą między linijami AB i GH, a zatém i między linijami AB i CD, jest AG + HB; aże AE = EB; GE = GH; przeto AG = HB; więc połową różnicy między linijami AB i CD zachodzącéy jest AG, albo HB. Połową summy dwoch liniy AB i CD, jest połowa linii AB i połowa linii CD, to jest AE + CF, aże CF = FD = EH, więc połową summy dwoch liniy AB i CD, jest AH, przeto linija większa AB będąc = AH + HB, równa się połowie summy dwoch liniy AB i CD i połowie ich różnicy, linija zaś mniéysza CD, czyli jéy równa GH będąc = AH — AG, równa się połowie summy dwoch liniy AB i CD, mniéy połową ich różnicy. Fig. 13

62. *Twierdzenie II. W każdym troykącie prostokréślnym, summa dwoch którychkolwiek boków, tak się ma do ich różnicy, jak styczna połowy summy kątów przeciwnych wziętym bokóm, do stycznéy połowy różnicy tychże kątów.* Fig. 14

Niech będzie troykąt ABC, w którym zakładam, że bok AB, jest mniéyszy od boku AC, mam dowieść, że

$$AC+AB : AC-AB = \text{sty.}\,\frac{B+C}{2} : \text{sty.}\,\frac{B-C}{2}$$

Dowod. Na boku większym AC, odcinam liniją AD, równą bokowi mniéyszému AB, i prowadzę liniją BD. Troykąty ABD i ABC, mają kąt A spolny, przeto summa dwoch kątów ABD + ADB, troykąta ABD, równa jest summie dwoch kątów ABC + ACB troykąta ABC. W troykącie ABD dla równości boków AB, AD, kąt ABD,

Fig.14 równy jest kątowi ADB, przeto jeden z nich którykolwiek *np.* ABD jest połową ich summy, a zatém połową summy kątów ABC, i ACB. Z tych kątów ABC, ACB nierównych, kąt ABC, jako większy składa się (61), z połowy ich summy i z połowy różnicy, aże kąt ABD, jest połową ich summy, przeto kąt DBC, jest połową ich różnicy — Linija AD, równa jest bokowi AB, przeto DC jest różnicą między bokiem AC, i bokiem AB; dzielę liniją DC na dwie równe części DE, i EC; będzie EC połową linii DC, a zatém połową różnicy zachodzącey między bokami AC i AB; bok AC jako większy składa się z połowy ich summy, i z połowy ich różnicy, aże EC jest połową ich różnicy, będzie AE, połową ich summy. Cały więc dowod tego twierdzenia zależy na pokazaniu, że linije AE i EC, tak się mają do siebie, jak styczne kątów ABD, i DBC. Na ten koniec liniją BD, dzielę po połowie w punkcie F, prowadzę linije FE, i AG — Troykąty EDF, CDB, są równokątné, kąt D mają spólny, i boki około niego leżące proporcyonalné, gdyż bok DE, jest połową boku DC, i bok DF połową boku DB, więc kąt DEF równy jest kątowi DCB, przeto linija FE, równoległa jest do linii BC, zatém troykąty AFE, AGC, są równokątné i dają proporcyą

$$AE : EC = AF : FG.$$

aże AE jest połową summy boków AC i AB, linija zaś EC jest połową różnicy między témi bokami zachodzącéy, przeto wyższą proporcyą można tak wyrazić:

$$\frac{AC+AB}{2} : \frac{AC-AB}{2} = AF ; FG.$$

mnożąc pierwszego stosunku oba wyrazy przez

2; czyli uważając, że całości mają się jak ich Fig.14
połowy, będzie

$$AC+AB : AC - AB = AF : FG.$$

Troykąty AFB, AFD, mogą przystać, bo mają po trzy boki równe, przeto kąty AFB i AFD są równe, a zatém proste, więc wziąwszy liniją BF za promień, i z punktu B, zakreśliwszy koło, będzie linija AF styczną kąta ABF, linija FG styczna kąta FBG, aże kąt

$$ABF = \frac{ABC+ACB}{2}, \text{ a kąt } FBG = \frac{ABC-ACB}{2},$$

$$\text{przeto } AF = \text{sty}\,\frac{ABC+ACB}{2}; FG = \text{sty}\,\frac{ABC-ACB}{2},$$

Kładąc te wyrażenia na AF i FG, w poprzedzającą proporcyą wypada proporcya założona;

$$AC+AB : AC - AB = \text{sty.}\,\frac{B+C}{2} : \text{sty.}\,\frac{B-C}{2}.$$

63. Dwa wyłożoné twierdzenia, które można nazywać prawdziwie trygonometrycznémi, ponieważ pokazują związek zachodzący między bokami troykąta i linijami trygonometrycznémi, nie są dostateczne do rozwiązania troykąta we wszystkich przypadkach; za ich bowiem pomocą z trzech danych boków troykąta nie można znaleść trzech jego kątów, na ten przypadek służy inne twierdzenie, które nie jest trygonometryczné, ale przybrané z Geometryi, ponieważ nie pokazuje stosunku między bokami troykąta, a linijami trygonometrycznemi, lecz tylko stosunek zachodzący między samémi bokami; — a to jest następne

64. *Twierdzenie przybrané czyli z porządku III. W każdym troykącie prostokréślnym, jeżli z wierzchołka którégokolwiek kąta, będzie spuszczo-*

na prostopadłą na bok jemu przeciwny; tak się będzie miał ten bok do summy dwoch innych boków, jak różnica tychże boków, do różnicy lub summy ucinków zawartych między prostopadłą a końcami boku, na który jest prostopadła spuszczona; do różnicy, jeźli prostopadła przypada na sam bok, do summy, jeźli pada na przedłużenie boku.

Fig. 15 *Co do piérwszégo.* Niech będzie troykąt ABC, w którym z wiérzchołka kąta C spusczona jest prostopadła CD, na bok AB, mamy dowieść, iż będzie

AB : BC+AC= BC—AC : BD—AD.

Dowod. Z wiérzchołka kąta C, z którego spusczona jest prostopadła, zakréślam koło promieniem równym bokowi przyległému mniéyszému AC, przécina ono bok AB w punkcie G, a bok BC, w punkcie F. Przedłużam bok BC, do przecięcia się z okręgiem koła w punkcie E. Linije BA, BE, wychodząc z jednégo punktu B, leżącego za okręgiem koła, przecinają okrąg koła po obu stronach, więc te linije są do siebie w stosunku odwrotnym z ich częściami BG, BF, będącémi za kołem, to jest mamy,

AB : BE= BF : BG

Linija BE, składa się z dwoch części BC i CE, aże CE= AC jako promienie koła jednégo, przeto BE= BC+AC. Linija BF= BC—CF, aże CF= AC, jako promienie, więc BF= BC—AC; Linija BG= BD—DG, aże DG= AG, zatém BG= BD—AD, kładąc te wartości za BE, BF, BG, w wyższą proporcyą, wypada:

AB : BC+AC= BC—AC : BD—AD.

Fig. 16 *Co do drugiégo.* Niech będzie troykąt ABC, z wiérzchołka kąta C, spusczamy prostopadłą CD na przedłużenie boku AB, mamy dowieść, że będzie

AB : BC+AC= BC—AC : BD+AD. Fig. 6

Dowod. Z wiérzchołka kąta C, z którego spuściliśmy prostopadłą, zakréślam koło, biorąc za promień bok przyległy mniéyszy AC; przedłużam boki AB, BC, aż do przecięcia się z okręgiem koła w punktach G i E; linije BG, BE, wychodząc z jednégo punktu wziętégo za okręgiem koła, i przecinając okrąg koła po obu stronach, mają się do siebie w stosunku odwrotnym z ich częściami będącémi za kołem, to jest dają;

BG : BE= BF : BA

Linija BE składa się z dwoch części BC i CE, aże CE= AC, jako promienie koła jednégo, przeto BE= BC+AC. Linija BF= BC—CF, aże CF =AC jako promienie, więc BF= BC—AC. Linija BG, składa się z dwoch części BD + DG, aże DG= DA, zatém BG= BD+AD: kładąc te wartości wyprowadzone za BE, BF, BG, w wyższą proporcyą, otrzymujemy

BD+AD : BC+AC= BC—AC : AB

czyli, odmieniając mieyscé wyrazóm skraynym

AB : BC+AC= BC—AC : BD—AD.

65. Znamy już stosunki zachodzące między bokami troykąta a linijami trygonometrycznemi kątów tegoż troykąta, możemy więc przystąpić do rozwiązywania troykątów, to jest do szukania w troykącie rzeczy niewiadomych z trzech wiadomych— Pokazaliśmy pod liczbą 3; że w troykącie prostokréślnym na znalezienie którėykolwiek rzeczy niewiadomėy trzeba mieć trzy wiadome, między którémi bok jeden przynaymniéy znaydować się powinien — Z wiadomych samych kątów nie oznaczymy wielkości troykąta, znaydziemy tylko stosunek między jego bokami; bo mając wiadomé kąty, znaydziemy z tablic ich wstawy, a stosunek między temi wstawami jest

podług twierdzenia pierwszego (56), równy stosunkowi między bokami przeciwnémi.

Wiadome trzy rzeczy w troykącie być mogą; 1od, jeden bok i dwa kąty którekolwiek; 2re, dwa boki i kąt jéden którykolwiek, więc może być albo kąt niezawarty między bokami, albo zawarty; 3cie, trzy boki.

66. Do rozwiązania przypadku piérwszégo, i piérwszéy części przypadku drugiégo służy twierdzenie piérwsze; do rozwiązania drugiéy części przypadku drugiego używa się twierdzenie drugié, a przypadek trzeci rozwiązuje się za pomocą twierdzenia trzeciégo — Obaczmy ciąg po-
Fig. 17 stępowania w każdym razie.

67. *Mając w troykącie bok jeden i dwa kąty którekolwiek wiadome, trzeba znaleść kąt trzeci i dwa inné boki* — Niech będzie troykąt ABC, w którym zakładamy wiadomy bok AB i kąty A i B, trzeba znaleść kąt C i boki AC i CB.

Kąt C znaydziemy odciągając summę dwoch kątów wiadomych A i B, od dwoch kątów prostych — Boki zaś AC i CB, otrzymamy na fundamencie twierdzenia pierwszego, układając proporcye w ten sposób, aby jeden tylko bok niewiadomy wchodził do proporcyi; i tak na znalezienie boku AC, ułożymy proporcyą;

wst. C : wst. B = AB : AC.

na znalezienie boku BC, proporcya,

wst. C : wst. A = AB : BC.

rozwiązawszy te proporcye, znaydziemy szukané boki.

68. *Mając wiadome dwa boki i kąt niezawarty między niémi, znaleść dwa inné kąty i bok trzeci* — Niech będzie troykąt ABC, w którym zakładamy wiadomé boki AB, AC, i kąt B, trzeba znaleść kąty A i C, i bok BC.

Od znalezienia boku BC, zacząć nie można, ponieważ kąt jemu przeciwny A, nie jest wiadomy, przeto zaczynamy od szukania kąta C, układając podług twiordzenia piérwszego proporcyą AC : AB = wst. B : wst. C; rozwiązawszy ją znaydziemy kąt C, który jeśli razem z kątem B odeymiemy od dwoch kątów prostych, otrzymamy kąt A; mając kąty, wyprowadzimy wartość boku BC, jak w przypadku poprzedzającym z proporcyi

albo, wst. C : wst. A = AB : BC.

albo, wst. B . wst. A = AC : BC.

69. Lecz jeśli bok AC przeciwny kątowi B, Fig. 18
jest mniéyszy od boku AB przyległégo temuż kątowi B, w rozwiązywaniu takiego troykąta zachodzi wątpliwość, albowiem dwa są troykąty zupełnie różné od siebie, które mają też śamé rzeczy dané; bo wziąwszy za promień bok AC, i z punktu A jako ze środka koła, przeciąwszy bok BC przedłużony w punkcie E, tworzą się dwa różney wielkości troykąty ABC, ABE; w których jednak kąt B jest spólny, bok temu kątowi przyległy AB spólny, i bok AC przeciwległy kątowi B w troykącie ABC, równy jest bokowi AE przeciwległému temuż kątowi B w troykącie ABE. Dla równości boków AC, AE, kąt E, równy jest kątowi ACE, aże kąt ACE, z kątem ACB, czyni dwa kąty prosté; więc kąt E z kątem ACB, czyni także dwa kąty prosté; zatém ich wstawy są równé, więc z proporcyi AC : AB = wst. B : wst. C, którą układamy na znalezienie kąta przeciwnégo bokowi AB, otrzymujemy, albo kąt C, albo kąt E; zachodzi przeto wątpliwość, który z tych dwoch kątów brać należy, gdyż biorąc kąt ACB, wypada rozwiązywać troykąt ACB; biorąc zaś kąt E, trzeba rozwiązywać troykąt

Fig.18 AEB. Dla uniknienia tey wątpliwości, potrzeba koniecznie wiedzieć, jakiego gatunku jest kąt zawarty między bokiem przeciwnym danému kątowi, a bokiem który nie jest dany; jeźli jest rozwarty, trzeba brać troykąt ACB, jeśli zaś jest ostry, należy uważać troykąt AEB.

70. *Mając wiadome dwa boki i kąt zawarty między niémi, znaleść dwa kąty i bok trzeci.* Niech będą w troykącie dane boki AB, AC, i kąt A, trzeba znaleść kąty B i C, i bok BC.

W tym przypadku piérwszego twierdzenia użyć nie możemy, bo kątowi danému bok przeciwny nie jest wiadomy, lecz udajemy się do twierdzenia drugiégo, i układamy proporcyą

$$AB+AC : AB-AC = \text{sty.}\frac{C+B}{2} : \text{sty.}\frac{C-B}{2}$$

w téy proporcyi trzy początkowé wyrazy są wiadomé, bo mając boki AB, i AC, będziemy miéli ich summę i różnicę; kąt zaś $\frac{C+B}{2}$, to jest połowę summy kątów C i B, znaydziemy odciągając dany kąt A, od dwoch kątów prostych, a resztę dzieląc przez 2; otrzymamy więc z téy proporcyi kąt $\frac{C-B}{2}$, to jest połowę summy i połowę różnicy między kątami C i B, mając połowę summy i połowę różnicy kątów C i B, znaydziemy kąt większy C dodając do połowy summy połowę różnicy, a przeciwnie odeymując połowę różnicy od połowy summy otrzymamy kąt mniéyszy B. Mając wszystkie kąty, znaydziémy bok BC, podług twierdzenia 1go sposobem wyżey podanym (67), układając *np.* proporcyą:

$$\text{wst. } C : \text{wst. } A = AB : BC.$$

Jeźli boki AB i AC, wiadomé są równé; kąty C i B, są także równé, więc odjowszy kąt A od dwoch kątow prostych, otrzymamy summę kątów C i B, dzieląc ją przez dwa, znaydziemy kąt B, lub C.

71. *Mając w troykącie wiadomé wszystkie trzy boki, znaleść wszystkie trzy kąty.* Niech *np.* w troykącie ABC wiadome będą boki AB, AC, BC; trzeba znaleść kąty A, B, C. F.15 i 16

Z wierzchołka którégokolwiek kąta *np.* C, spusczam prostopadłą CD, na bok jemu przeciwny AB, może ona przypadać albo na sam bok, albo na jego przedłużenie.

Co do 1go. Jeźli prostopadła CD przypada na sam bok AB; przez 3cie twierdzenie znaydziemy różnicę ucinków, aże w tym razie bok AB, na który prostopadła spusczoną została, jest summą ucinków, więc połowę różnicy znalezionéy dodawszy do połowy boku AB, otrzymamy ucinek większy BD, odjowszy połowę różnicy znalezionéy od połowy boku AB, otrzymamy ucinek mniéyszy AD. Mając ucinki, w małych troykątach ADC, BDC, mając po dwa boki wiadome i po jednym kącie wiadomym D, podług liczby 68 znaydziemy kąty A i B, a ztąd otrzymamy kąt C; albo z któregokolwiek małego troykąta *np.* ADC, znalazłszy kąt A, w całym troykącie ABC, mając wszystkie trzy boki i kąt A podług liczby 68 znaydziemy kąty B i C. Fig.15

Co do 2go. Jeźli prostopadła CD przypada na przedłużenie boku AB, przez trzecie twierdzenie znaydziemy summę ucinków, aże w tym razie bok AB, na który spuściliśmy prostopadłą, jest różnicą ucinków, więc dodawszy połowę summy znalezionéy do połowy boku AB, otrzymamy ucinek większy DB, odjowszy zaś od poło- Fig.16

Fig. 16 wy summy znalezionéy połowę boku AB, znaydziemy ucinek mniéyszy DA. Teraz w troykącie DCB mając boki BC, BD i kąt prosty D; znaydziemy kąt B; w troykącie DCA, mając boki wiadomé DA, AC i kąt prosty D, znaydziemy kąt DAC, który odjowszy od dwoch kątow prostych, otrzymamy kąt CAB; albo z którégokolwiek prostokątnégo troykąta znalazłszy kąt A, lub B; w całym ABC mając wiadome boki i kąt A, lub B, podług liczby 68 znaydziemy dwa inne kąty (h)

(h) Mając wiadome trzy boki w troykącie, nie spuszczając prostopadłéy i nie szukając ucinków, możemy znaleść kąt którykolwiek przez proporcyą następną: jak się ma podwóyna mnogość z boków obeymujących kąt szukany, do summy kwadratów z tychże boków zmniéyszonéy kwadratem z boku przeciwnégo, tak się ma promień, do dostawy kąta szukanégo; i tak w troykącie ABC szukając kąta A, ułożymy proporcyą:

$$2 \times AB \times AC : AB^2 + AC^2 - BC^2 = P^2 : \text{dosta. } A.$$

rozwiązawszy ją znaydziemy kąt A; lecz w użyciu téy proporcyi, ta jest niedogodność, iż wartości wyrazu

$$AB^2 + AC^2 - BC^2;$$

musimy szukać przez proste działania arytmetyczne, nie mogąc dla skrócenia użyć logarytmów, z tego powodu dogodniéy jest używać innéy proporcyi wynikającéy z pierwszey, dla ułożenia któréy robimy summę ze wszystkich boków troykąta, od połowy téy summy odciągamy osobno każdy z boków obéymujących kąt szukany, z dwoch reszt otrzymanych, robimy mnogość i układamy proporcyą: jak się ma mnogość z dwoch boków obeymujących kąt szukany, do mnogości z dwoch reszt wyrażonych, tak się ma kwadrat z promienia do kwadratu ze wstawy połowy kąta szukanego; szukając np. kąta A, i summę boków wszystkich nazywając jedną literą S, będziemy mieli

$$AB \times AC : \left(\frac{S}{2} - AB\right)\left(\frac{S}{2} - AC\right) = P^2 : \text{wsta}^2 . \frac{A}{2}$$

albo też można używać jescze innéy: na ten koniec od połowy summy boków odeymujemy bok przeciwny kątowi szukanému, i robimy mnogość z tey reszty przez połowę summy boków, potém układamy proporcyą: jak się ma mnogość z boków obeymujących kąt szukany, do rzeczonéy wyżey mnogości, tak się ma kwadrat z promienia do kwadratu z dostawy kąta szukanego: np. szukając kąta A i summę wszystkich boków kładąc S, będzie

$$AB \times AC : \frac{S}{2}\left(\frac{S}{2} - BC\right) = P^2 : \text{dosta}^2 . \frac{A}{2}$$

którąkolwéek z dwoch ostatnich proporcyy rozwiązawszy, otrzymamy połowę kąta A, a ztąd i cały kąt A; lecz ponieważ wstawy kątów bliskich prostego, czyli dostawy kątów bardzo ostrych nie wiele się różnią od wstaw czyli dostaw im przyległych, wstawy zaś kątów bardzo ostrych, czyli dostawy kątów przystępujących do prostego znaczną mają różnicę od wstaw czyli dostaw im przyległych, przeto aby w braniu kątów odpowiednych nie popełnić omyłki, należy, gdy kąt szukany jest bliski prostego, brać proporcyą ostatnią, gdy zaś jest bardzo ostry, udać się do proporcyi wyższey, przez którą wstawa się wynayduje.

Te wszystkie proporcye przez Algebrę tylko mogą być wyprowadzone. Wywod ich można znaleść w dziełach Trigonometrie par Cagnoli traduite de l' Italien par Chompré 2 edit. 1808 art. 576, 578, 579 — Traité elem. de Trigonometrie par Lacroix 5 edit. 1810 a Paris art. 38.

72. W ostatnim przypadku, używając twierdzenia 3go, wypada na czwarty wyraz proporcyi różnica albo summa ucinków, dla poznania co wyraz 4ty będzie oznaczał, uważamy, że kiedy prostopadła przypada na sam bok, ten bok Fig. 15 jest summą ucinków, i w tym razie wyraz czwarty oznacza ich różnicę, która koniecznie jest mniéyszą od summy ucinków, a zatém od boku, na który prostopadła jest spuszczona; kiedy zaś prostopadła przypada na przedłużenie boku, ten Fig. 16 bok jest różnicą ucinków, a wyraz czwarty proporcyi znaczy ich summę, która będąc większą od ich różnicy, jest większą od boku, na który prostopadła jest spuszczona; aże ten bok w każ-

dym razie jest pierwszym wyrazem proporcyi, wypada więc, że jeźli czwarty wyraz proporcyi jest mniéyszy od piérwszégo, będzie on różnicą ucinków, to jest prostopadła przypadnie na bok; jeźli zaś czwarty wyraz większy jest od piérwszégo, będzie on summą ucinków, to jest prostopadła przypada na przedłużenie boku.

73. Jeźli zaś czwarty wyraz w proporcyi, wypada równy bokowi, na któryśmy prostopadłą spuścili, to pokazuje, że ucinków nié ma żadnych, a przeto jeden bok troykąta jest prostopadłym do tego boku, na który wypadało spuszczać prostopadłą; zatém kąt między niemi zawarty jest prosty, więc dwa inne wynaydą się podług twierdzenia pierwszego, jak pod liczbą 68.

74. Jeźli dwa boki obeymuiące kąt, z którego wierzchołka spuszczona jest prostopadła, są równé między sobą, prostopadła dzieli bok na dwie równe części, zatém ucinki są równe i wiadome, bo każdy z nich jest połową boku.

75. W pierwszym i drugim przypadku, między kątami danémi może być kąt prosty, wtedy niewiadomé rzeczy w troykącie możemy wynaleść nie używając twierdzenia 1go i 2go, ale przez proporcye wyprowadzoné pod liczbami 59 i 60, z dostrzeżonych stosunków między bokami troykąta prostokréślnégo a linijami trygonometrycznémi kątów tegoż troykąta. I tak w przypadku 1ym,

Jeźli mamy wiadome dwa kąty i bok jeden.

Fig: 12 Niech będą *np.* wiadome kąty A i B, a kąt A, jest prosty. Skoro mamy dwa kąty, tém samém mamy i trzeci C, można więc uważać, że wszystkié trzy są już z założenia wiadomé. Bok zaś

wiadomy może być którykolwiek, albo AB, albo BC, albo AC. Fig. 12

1ód, Jeźli wiadomy jest bok AB, na znalezienie boków BC i AC, użyiemy proporcyy (*A*) i (*B*) wyprowadzonych pod liczbą 59, przemieniając tylko w nich stosunki, dla położenia wyrazu szukanégo na miéyscu czwartym,

to jest: P : sty. A = AB : BC.
P : sie. A = AB : AC.

2re, Jeźli wiadomy jest bok BC, na znalezienie boków AB, i AC, użyjemy tychże samych proporcyy co wyżéy, uważając boki względem kąta C, jak pierwiéy uważaliśmy względem kąta A,

to jest: P : sty. C = BC : AB.
P : sie. C = BC : AC.

3cie, Jeźli wiadomy jest bok AC, na znalezienie dwoch ramion AB i AC, użyjemy proporcyi (59, *B*), odmieniając tylko miéysce wyrazóm tak, aby wyraz niewiadomy wypadł na miéyscu czwartém, i stosując raz do kąta A, drugi raz do kąta C,

to jest: sie. A : P = AC : AB.
sie. C : P = AC : BC.

moglibyśmy też użyć proporcyi (59, *C*) odmieniając mieysce wyrazóm dla umiesczenia niewiadomégo wyrazu na miéyscu czwartém, i stosując raz do kąta A, drugi raz do kąta C,

to jest: sie. C : sty. C = AC : AB.
sie. A : sty. A = AC : BC.

lecz jak widocznie się okazuje, więcéy byłoby roboty, bo na miéyscu promienia będącego drugim wyrazem w proporcyach wyższych, mamy w proporcyach ostatnich styczną, którey logarytmu szukaćby należało.

76. *Jeźli wiadome są dwa boki i kąt prosty niezawarty między niémi. np.* Dane są kąt pro-

Fig. 12 sty B, i boki AB, i AC; trzeba znaleść kąty A i C, i bok BC.

Na znalezienie kąta A, wezmiemy proporcyą (59, *B.*)

AB : AC = P : sie. A

znaleziony kąt A, odjowszy od kąta prostego, otrzymamy kąt C,

Na znalezienie zaś boku BC użyjemy proporcyi (59. *A.*) w którey przełożywszy wyrazy mamy:

P : sty. A = AB : BC.

77. *Gdy są wiadomé dwa boki i kąt prosty między niémi zawarty.* Niech będą *np.* wiadomé boki AB, BC, i kąt prosty B, trzeba znaleść kąty A i C, i bok AC.

Zaczynamy od szukania kąta, biorąc proporcyą (60. *A.*)

AB : BC = P : sty. A.

znaleziony z téy proporcyi kąt A, odjowszy od prostego, będziemy mieli kąt C; bok zaś AC otrzymamy z proporcyi (60. *B.*) po przełożeniu stosunków, to jest:

P : sie. A = AB : AC.

Ten sam bok AC, moglibyśmy znaleść bez pomocy trygonometryi, dodając w jednę summę kwadraty z obu ramion kąta prostego AB, BC, i z téy summy wyciągając pierwiastek kwadratowy, lecz takowy sposob dłuższy jest od trygonometrycznego.

78. Umiejąc rozwiązywać troykąty prostokątné, moglibyśmy troykąt mający wiadomé dwa boki i kąt między niémi zamknięty, ostry, lub rozwarty rozwiązać bez pomocy drugiégo twierdzenia, dzieląc go przez prostopadłą na bok wiadomy z wierzchołka kąta przeciwnégo spuszczoną na dwa troykąty prostokątné, a potem każdy

z nich osobno rozwiązując. Zakładamy *np.* w troykącie ABC, wiadomé dwa boki AB, AC, i kąt A; dla znalezienia kątów B i C, i boku BC, prowadzę na bok wiadomy AB, prostopadłą CD; mamy przez to dwa troykąty prostokątné ACD, DCB. W troykącié ACD, mając bok AC i kąty A i D, wiadome, podług przypadku 1go (67), lub podług liczby 75, znaydziemy boki AD, DC; odeymując AD od AB, otrzymamy bok DB; przeto w troykącie DBC, mając wiadomé boki DB i DC, i kąt prosty; sposobem wyłożonym w liczbie 77, znaydę naprzód kąt B, a potém bok BC. Mając w całym troykącie ABC, wiadomé kąty A i B, odciągając ich summę od dwoch kątów prostych, otrzymamy trzeci kąt C. Lecz postrzegamy, że ten sposob jest nierównie dłuższy od sposobu zwyczaynego (70), bo używając go, mamy do rozwiązania 4 proporcye; gdyż szukamy ucinku AD, i wysokości CD, których, idąc sposobem zwyczaynym znaydować nie mamy potrzeby: Figura

79. Znamy już sposoby rozwiązywania jakichkolwiek troykątów we wszystkich przypadkach, obaczmy teraz, jak w każdym z tych przypadków należy postąpić szukając powierzchni troykąta. Do jéy znalezienia trzeba mieć wiadomą podstawę troykąta i wysokość. Za podstawę naylepiéy jest uważać którykolwiek z boków danych, wtedy wysokością będzie prostopadła na ten bok z wierzchołka kąta jemu przeciwnégo spuszczona; należy więc znaleść tę prostopadłę, w czém tak możemy postąpić.

Jeżli wiadomy jest bok jeden i dwa kąty. Niech będzie dany bok AB, i dwa kąty A i B, które mając znamy i kąt trzeci C.

Bok wiadomy AB biorę za podstawę, prostopadła nań z kąta C spuszczona CD będzie wyso-

Fig. 17 kością troykąta, znaydziemy ją albo z troykąta ADC, albo DCB; *np.* z troykąta ACD, lecz w nim mamy tylko kąty, a żadnégo nie mamy boku, dla tego naprzód z troykąta ACB szukam boku AC przez proporcyą:

$$\text{wst. } C : \text{wst. } A = AB : AC$$

potém w troykącie ACD z wiadomégo boku AC i wszystkich kątów wiadomych znaydziemy prostopadłą CD, z proporcyi

$$P : \text{wst. } A = AC : CD$$

mając zaś w troykącie podstawę AB, i wysokość CD, otrzymamy jego powierzchnią sposobem wiadomym, to jest biorąc połowę mnogości z podstawy przez wysokość.

Lecz w tym razie nie znaydnjąc nawet wartości boku AC, i prostopadłey CD, możemy znaléść powierzchnią troykąta; na ten koniec wyprowadzoné wyżéy proporcye składamy, to jest mnożymy jednę przez drugą, zkąd wypada

$$\text{wsta. } C \times P : \text{wst. } A \times \text{wst. } B = AB \times AC : CD \times AC.$$

dzieląc oba wyrazy drugiégo stosunku przez AC, a potém mnożąc przez $\frac{AB}{2}$ otrzymujemy:

$$\text{wst. } C \times P : \text{wst. } A \times \text{wst. } B = \frac{AB^2}{2} : \frac{AB \times CD}{2}$$

aże $\frac{AB \times CD}{2}$, znaczy powierzchnią troykąta ABC, więc mamy

$$\text{wst. } C \times P : \text{wst. } A \times \text{wst. } B = \frac{AB^2}{2} : \text{Powierzch. } ABC.$$

$$\text{ztąd Pow. troy. } ABC = \frac{AB^2 \times \text{wst. } A \times \text{wst. } B}{2 \times P \times \text{wst. } C}$$

co pokazuje, że dla znalezienia powierzchni troy-

kąta, trzeba kwadrat z jego podstawy, rozmnożyć przez mnogość ze wstaw kątów przyległych podstawie, i całą tę mnogość rozdzielić przez podwóyną mnogość z promienia przez wstawę kąta przeciwnégo podstawie. Fig. 17

80. *Znaleść powierzchnią troykąta, mając wiadomé dwa boki i kąt jeden niezawarty między niémi.* Niech będą wiadomé boki AB, AC i kąt C — Biorę za podstawę bok którykolwiek wiadomy *np* AB, i spuszczam nań prostopadłą CD. Dla znalezienia jéy biorę troykąt prostokątny, w którym bok jest wiadomy, jakim jest troykąt ACD; lecz w nim mamy tylko bok AC, i kąt prosty D; szukam naprzód kąta A z troykąta ACB przez proporcyą:

$$AB : AC = \text{wst. } C : \text{wst. } B$$

mając wiadomy kąt dany C, i znaleziony B, mamy już wiadomy i kąt A; więc w troykącie ACD, dla znalezienia wysokości układam proporcyą

$$P : \text{wst. } A = AC : CD$$

znalazłszy wysokość CD, i mając daną podstawę AB, znaydziemy powierzchnią sposobem zwyczaynym.

W tym razie nie szukając wysokości CD, powierzchni znaleść nie możemy.

81. *Znaleść powierzchnią troykąta, mając wiadomé dwa boki, i kąt zawarty między niémi.* Niech będą wiadomé boki AB, AC, i kąt A. Obieram za podstawę, którykolwiek bok wiadomy, *np.* AB; prowadzę wysokość CD; znaydziemy ją z troykąta ACD, w którym mamy bok AC i wszystkie kąty wiadome, przez proporcyą

$$P : \text{wst. } A = AC : CD$$

mając wysokość CD i podstawę AB, wiadomą, znaydziemy powierzchnią tak jak zwyczaynie.

Lecz w tym razie można nie szukając wy-

Fig.17 sokości CD, otrzymać powierzchnią troykąta; ną ten koniec w poprzedzającéy proporcyi oba wyrazy drugiégo stosunku mnożę przez $\frac{AB}{2}$, z czego otrzymuję

$$P : \text{wst. } A = \frac{AB \times AC}{2} : \frac{AB \times CD}{2}.$$

aże mnogość $\frac{AB \times CD}{2}$, oznacza powierzchnią troykąta ABC, przeto wypada:

$$P : \text{wst. } A = \frac{AB \times AC}{2} : \text{Pow. troy. ABC.}$$

$$\text{ztąd Pow. ABC} = \frac{\text{wst. } A \times AB \times AC}{2 \times P},$$

to jest, dla znalezienia powierzchni troykąta, trzeba mnogość z dwoch jego boków rozmnożyć przez wstawę kąta między temi bokami zawartego, a całą mnogość ztąd wypadającą podzielić przez podwoyny promień.

82. *Znaleść powierzchnią troykąta mając wiadome wszystkie trzy boki.* W takowym razie, naprzód przez twierdzenie przybrane, podług sposobu wyżey podanego (71), szukam ucinków zrobionych przez prostopadłą, potém w którymkolwiek z prostokątnych troykątów znayduję wysokość, a ztąd przychodzę do powierzchni całego troykąta (i).

(i) Możemy znaleść wysokość troykąta z wiadomych jego trzech boków bez pomocy trygonometryi, używając sposobu wyłożonego w Geometryi (Geom. Lhuili. C. 1. liczb. 169) lecz można też w tym przypadku otrzymać powierzchnią troykąta nie szukając wysokości. na ten koniec biorę połowę summy trzech boków, odeymuję od niéy następnie każdy bok, z trzech

Przykłady rozwiązywania troykątów. Fig:17

83. *Przykład do liczby 67.* Niech w troykącie ABC będą wiadome: bok AB = 123,4 prętóm; kąt A = 65°, 43′, 20″; kąt B = 54°. 32′, 10″; trzeba znaleść kąt C, i boki AC i BC.

Szukamy kąta C. Kąt A = 65°. 43′: 20″.

B = 54°. 32′. 10″.

Summa kątów A i B = 120°. 15′. 30″.

tę summę odeymując od 180°.

zostaje kąt C = 59°. 44′. 30″.

Szukamy boku AC. Mamy proporcyą:

wst C : wst. B = AB : AC.

Kładąc wartości wiadomé będzie:

wst: (59°. 44′. 30″) : wst. (54°. 32′. 10″) = 123,4 : AC

Log. 123,4 = 2,0913152

Log. wst. (54°. 32′. 10″) = 9,9108811

dop. Log. wst. (59°. 44′. 30″) = 0,0636058

Log. AC = 2,0658021

Log, 116,359 = 2,0657664

357

więc bok AC = 116,36

Szukamy boku BC. Mamy proporcyą:

wst. C : wst. A = AB : BC

Kładąc wartości wiadomé, będzie:

wst. (59°, 44′. 30″): wst. (65°. 43′. 20″) = 123,4 : BC

---

reszt pozostałych robię mnogość, mnożę ją przez połowę summy boków, z tey ostatniey mnogości wyciągnięty pierwiastek kwadratowy okaże wielkość powierzchni troykąta. W troykącie np. ABC, summę wszystkich trzech boków nazywając S; będzie,

$$\text{pow. ABC} = \sqrt{\tfrac{1}{2}S(\tfrac{1}{2}S - AB)(\tfrac{1}{2}S - AC)(\tfrac{1}{2}S - BC)}$$

Traité élém. de Trigonometrie par Lacroix 5 edit. a Paris 1810 art. 64.

Fig:17

Log. 132,4= 2,0913152
Log. wst. (65°. 43'. 20")= 9,9597866
dop. Log. wst. (59°. 44'. 30")= 0,0636058

Log. BC= 2,1147076
Log. 130,229= 2,1146777

299

więc bok BC= 130,229 prętóm.

84. *Przykład do liczby* 68. Niech w troykącie ABC będą wiadomé, bok AC= 234,5 prętóm; AB= 345,6 prętóm, kąt C= 65°. 43'. 20"; trzeba znaleść kąty A i B, i bok BC.

Szukamy kąta B. Mamy proporcyą:

AB : AC= wst. C : wst. B; to jest
345,6 : 234,5= wst. (65°. 43'. 20") : wst. B.
Log. wst. (65°. 43'. 20")= 9,9597866
Log. 234,5= 2,3701428
dopeł. Log. 345,6= 7,4614263

Log. wst. B= 9,7913557
Log. wst. (38°. 12')= 9,7912754

803

267,7 : 803= 10" : 30"

więc kąt B= 38°. 12'. 30".

Szukamy kąta A. Kąt C= 65°. 43'. 20".
kąt B= 38°. 12'. 30".

summa kątów B i C= 103°. 55'. 50".
odeymuję od 180°

wypada kąt A= 76°. 4'. 10".

Szukamy boku BC. Mamy proporcyą:

wst. C : wst. A= AB : BC; to jest
wst. (65°. 43'. 20") : wst. (76°. 4'. 10".)=345,6 : BC
Log. wst. (76°. 4'. 10")= 9,9870350
Log. 345,6= 2,5385737
dop. Log. wst. (65°. 43'. 20")= 0,0402134

Log. BC= 1,5658221
Log. 367,97= 2.5658124

więc bok BC= 367,97 prętóm.

85. *Przykład do liczby* 70. Niech w troykącie ABC, będą wiadomé bok AB= 345,6; bok AC= 456,7; kąt A= 76°. 54'. 30". Fig:17

Szukamy kątow B i C. Mamy proporcyą

AC+AB : AC—AB= sty. ½(B+C) : sty. ½(B—C),
AC+AB= 456,7+345,6= 802,3
AC— AB= 456,7—345,6= 111,1
B+C= 180°— 76°. 54'. 30"= 103°. 5'. 30".
½(B+C)= 51°. 32'. 45".

Kładąc te wartości w wyższą proporcyą będzie

802,3 : 111,1= sty. (51°. 32'. 45") : sty. ½(B—C)
Log. sty. (51°. 32'. 45")= 10,1001080
Log. 111,1= 2,0457141
dop. Log. 802,3= 7,0956632

Log. sty. ½(B—C)= 9.2414853
Log. sty. (9°. 53')= 9.2411185

3668

7465,2 : 3668= 60". 28", 14.
więc ½(B—C)= 9°. 53'. 28", 14.
przeto B= 51°.32'.45"+9°.53'.28,14= 61°.26'.13",14
C=51°. 32'.45"— 9°.53'.28",14=41°.39'.16",68

Szukamy boku BC. Mamy proporcyą

wst. C : wst. A= AB : BC.

kładąc wartości wiadomé, będzie
wst. (41°. 39'. 16", 86) : wst. (76°. 54'. 30")=345,6 : BC
Log, 345,6= 2,5385737
Log. wst. (76°. 54'. 30")= 9,9885629
dop. Log. wst. (41°. 39'. 16", 86)= 0,1774147

Log. BC= 2,7045513
Log: 506,46= 2,7045431

62

więc bok BC= 506,467 prętóm.

Fig. 17 86. *Przykład do liczby* 71. Niech w troykącie ABC, będą wiadomé boki, AB = 123,4 prętóm AC = 67,8; BC = 89,1 prętom; trzeba znaleść kąty A, B i C.

Na bok AB wyobrażamy spusczoną prostopadłą CD.

Szukamy ucinków AD, DB. Mamy proporcyą

AB : BC+AC = BC—AC : BD—AD

BC+AC = 89,1+67,8 = 156,9

BC—AC = 89,1—67,8 = 21,3

kładąc te wartości w wyższą proporcyą mamy;

123,4 : 156,9 = 21,3 : BD—AD

Log. 21,3 =	1,3283796
Log. 156,9 =	2,1956229
dop. Log. 123,4 =	7,9086848
Log. (BD—AD) =	1,4326873
Log. 27,0824 =	1.4326807
	66

$BD = \frac{1}{2}AB + \frac{1}{2}(BD—AD)$

= 61,7+13,5412 = 75,2412

$AD = \frac{1}{2}AB — \frac{1}{2}(BD—AD)$

= 61,7—13,5412 = 48,1588

Szukamy kąta A. Mamy z troykąta ACD,

AC : AD = Pro : wst. ACD.

kładąc wartości wiadomé, będzie

67,8 : 48,1588 = Pro : wsta. ACD

Log. Pro. =	10,0000000
Log. 48,1588 =	1,6826757
dop. Log. 67,8 =	8,1687703
Log. wst. ACD. =	9,8514460
Log. wst. (45°. 15′) =	9,8513717
	743

208,7 : 743 = 10″ : 35″, 6

więc kąt ACD = 45°. 15′. 35″,6

przeto kąt A = 90° — 45°. 15′. 35″, 6 = 44°.44′.24″,4 Fig. 17

Szukamy kąta B. Mamy z troykąta DCB

BC : BD = wst. D : wst. DCB

kładąc znajomé wartości, będzie

89,1 : 75,2412 = Pro : wst. DCB

Log. Pro =	10,0000000
Log. 75, 2412 =	1,8764557
dop. Log. 89, 1 =	8,0501223
Log. wst. BCD =	9,9265780
Log. wst. (67°. 36′) =	9,9265112
	668

133, 5 : 668 = 10″ : 50″

więc kąt DCB = 57°, 36′. 50″

przeto kąt B = 90° — 57°. 36′. 50″ = 32°. 23′. 10″,

Szukamy kąta C.

kąt ACD = 45°. 15′. 35″, 6

kąt DCB = 57°. 36′. 50″

przeto kąt ACB = 102°. 52′. 25″, 6

87. *Szukamy kąta A sposobami podanémi w przypisku* (h).

Sposob 1. Mamy proporcyą

$2 \times AB \times AC : AB^2 + AC^2 — BC^2 = Pro^2$: dosta. A

AB^2 =	15227,56
AC^2 =	4596,84
AB^2+AC^2 =	19824,40
BC^2 =	7938,81
$AB^2+AC^2—BC^2$ =	11885,59

kładąc wiadomé wartości w proporcyą, będzie

$2 \times 123,4 \times 67,8 : 11885,59 = Pro^2$: dosta. A

Log. 2 =	0,3010300
Log. 123,4 =	2,0913152
Log. 67,8 =	1,8312297
Log. 2×123,4×67,8 =	4,2235749

Fig.17 dop. Log. $2 \times 123{,}4 \times 67{,}8 = 5{,}7764251$
Log. $11885{,}59 = 4{,}0750208$
Log. Pro^{2}. $= 20{,}0000000$

Log. dosta. A $= 9{,}8514459$
Log. dosta. $(44^\circ.\ 44') = 9{,}8514969$

510

$208{,}7 : 510 = 10'' : 24'',\ 4$
więc kąt $A = 44^\circ.\ 44'.\ 24'',\ 4$.

Sposob II. Mamy proporcyą
$AB \times AC : (\tfrac{1}{2}S - AB)(\tfrac{1}{2}S - AC) = P^2 : \text{wst}^2.\ \tfrac{1}{2}A$
$S = AB + AC + BC$
$= 123{,}4 + 67{,}8 + 89{,}1 = 280{,}3$
$\tfrac{1}{2}S - AB = 140{,}15 - 123{,}4 = 16{,}75$
$\tfrac{1}{2}S - AC = 140{,}15 - 67{,}8 = 72{,}35$
kładąc wartości w proporcyą będzie
$123{,}4 \times 67{,}8 : 16{,}75 \times 72{,}35 = P^2 : \text{wst}^2.\ \tfrac{1}{2}A$
Log. $123{,}4 = 2{,}0913152$
Log. $67{,}8 = 1{,}8312297$

Log. $123{,}4 \times 67{,}8 = 3{,}9225449$
dop. Log: $123{,}4 \times 67{,}8 = 6{,}0774551$
Log. $16{,}75 = 1{,}2240148$
Log. $72{,}35 = 1{,}8594385$
Log. $P^2 = 20{,}0000000$

Log. wst^2. $\tfrac{1}{2}A = 19{,}1609084$
Log. wst $\tfrac{1}{2}A = 9{,}5804542$
Log. wst. $(22^\circ.\ 22') = 9{,}5803917$

625

$512 : 675 = 10'' : 12'',\ 2$
więc kąt $\tfrac{1}{2}A = 22^\circ.\ 22'.\ 12'',\ 2$
przeto kat $A = 44^\circ.\ 44'.\ 24'',\ 4$

Sposób III. Mamy proporc ą:
$AB \times AC : \tfrac{1}{2}S(\tfrac{1}{2}S - BC) = P^2 : \text{dosta}^2.\ \tfrac{1}{2}A$

$\tfrac{1}{2}S - BC = 140{,}15 - 89{,}1 = 51{,}05$ Fig.17
kładąc wartości w próporcyą będzie
$123{,}4 \times 67{,}8 : 140{,}15 \times 51{,}05 = P^2 : \text{dosta}^2.\ \tfrac{1}{2}A$
dop. Log. $123{,}4 \times 67{,}8 = 6{,}0774551$
Log. $140{,}15 = 2{,}1465931$
Log. $51{,}05 = 1{,}7079957$
Log. $P^2 = 20{,}0000000$

Log. dosta^2. $\tfrac{1}{2}A = 19{,}9320439$
Log. dosta. $\tfrac{1}{2}A = 9{,}9660219$
Log. dosta. $(22^\circ.\ 22') = 9{,}9660326$
$86{,}7 : 107 = 10'' : 12''\ 3$
więc kąt $\tfrac{1}{2}A = 22^\circ.\ 22'.\ 12'',\ 3$
przeto kąt $A = 44^\circ.\ 44'.\ 24'',\ 6$

88: *Przykład do liczby* 75. Niech w troykącie ABC, będą wiadome bok $AB = 135{,}7$ prętóm; kąt $A = 48^\circ.\ 9'.\ 10''$ kąt B prosty, trzeba znaleść kąt D i boki BC, AC. Fig.12

Szukamy kąta C.
Kąt $A = 48^\circ.\ 9'.\ 10''$
odeymuję od $= 90^\circ$

zostaje kąt $C = 41^\circ.\ 51'.\ 50''$

Szukamy boku BC. Mamy proporcyą
Pro : sty. $A = AB : BC$.
kładąc wartości wiadomé będzie
Pro : sty. $(48^\circ.\ 9'.\ 10'') = 135{,}7 : BC$
Log. $135{,}7 = 2{,}1325798$
Log. sty. $(48^\circ.\ 9'.\ 10'') = 10{,}0478921$

$12{,}1804719$
Log. Pro $= 10{,}0000000$

Log. BC $= 2{,}1804719$
Log. $151{,}52 = 2{,}1804700$
więc bok $BC = 151{,}52$

Szukamy boku AC. Mamy proporcyą
Pro : siecz. $A = AB : AC$

Fig. 12 kładąc wartości wiadomé będzie

Pro : sie. (48°. 9'. 10") = 135,7 : AC

Log. Pro². = 20,0000000

dop. Log. dosta. (48°. 9'. 10") = 0,1757787

Log. 135,7 = 2,1325798

12,3083585

Log. Pro = 10,0000000

Log. AC = 2,3083585

Log. 203,40 = 2,3083509

76

więc bok AC = 203,403 prętóm.

89, *Przykład do liczby* 76. Niech w troykącie ABC, będą wiadomé boki AB = 246, 8 prętóm, AC = 357, 9 prętóm, i kąt A prosty, trzeba znaleść kąty A i C, i bok BC.

Szukamy kąta A. Mamy proporcyą

AB : AC = Pro ; Siecz. A.

kladąc wartości będzie

246,8 : 357,9 = Pro.: Siecz. A.

Log· Pro = 10,0000000

Log. 357,9 = 2,5537617

dop. Log. 246,8 = 7,6076548

Log. Siecz. A = 10,1614165

$$\text{aże (30) Sie. A} = \frac{\text{Pro}^2.}{\text{dosta.A}}; \ \text{dosta. A} = \frac{\text{Pro}^2.}{\text{Siecz. A}}$$

przeto log. dosta. A = log. Pro² — log. Siecz. A

to jest, log. dosta. A = 20 — 10,1614165

= 9,8385835

Log. dosta. (46°. 24') = 9,8386096.

261

221,2 : 261 = 10" : 11" 8

więc kąt A = 46°. 24' 11",8

Szukamy kąta C.

Kąt A+C = 90° Fig 12

odjąwszy kąt A = 46°. 24'. 11". 8

mamy kąt C = 43°. 35", 48", 2

Szukamy boku BC. Mamy proporcyą

Pro : sty. A = AB : BC

kładąc wartości będzie

Pro : sty. (46°. 24" 11" 8) = 246, 8 : BC

Log. 246, 8 = 2,3923452

Log. sty. (46°. 24'. 11", 8) = 10,0212818

12,4136270

Log. Pro = 10

Log. BC = 2,4136270

Log. 259, 19 = 2,4136182

88

więc bok BC 259, 195.

90. *Przykład do liczby* 77. Niech w troykącie wiadomé będą, bok AB = 456,7 prętóm, BC = 345,6 prętóm, i kąt prosty B, trzeba znaleść kąty A i C, i bok AC.

Szakamy kąta A. Mamy proporcyą

AB : BC = Pro : sty. A

kładąc wiadomé wartości będzie

456,7" : 345,6 = Pro : sty. A

Log. Pro = 10,0000000

Log. 345,6 = 2,5385737

dop. Log. 456,7 = 7,3403690

Log. sty. A = 9,8789427

Log. sty. (37°. 6') = 9,8786907

2520

37,7 : 2520 = 10" : 57",598

więc kąt A = 37°. 6'. 57", 598

Szukamy kąta C.

Summa kątów A+C = 90°.

odjąwszy kąt A = 37°. 6'. 57", 598

będzie kąt C = 52°. 53'. 2", 402

Fig. 12 *Szukamy boku AC.* Mamy proporcyą

Pro : Siecz. A = AB : AC

kładąc wartości wiadomé będzie

Pro : Siecz. (57°. 6'. 57". 598) = 456,7 : AC

Log. Pro² =	20,0000000
dop. Log. dosta. (57°. 6'. 57", 598) =	0,0983153
Log. sie. (57°. 6'. 57"; 598) =	10,0983153
Log. 456,7 =	2,6596310
Log. AC =	2,7579463
Log. 572,72 =	2,7579423

więc bok AC = 572,725 prętóm.

91. *Przykład do liczby* 79. Mamy w troy-

Fig. 17 kącie ABC, tę samę wartość rzeczy wiadomych jaka była dana w liczbie 82, to jest; bok AB = 123,4, prętóm; kąt A = 65°. 43'. 20"; kąt B = 54°. 32', 10". trzeba znaleść powierzchnią troykąta.

Rozwiązanie. Na znalezienie wysokości CD, mamy proporcyą;

Pro : wst. A = AC : CD.

z liczby 83 mamy AC = 116,36

kładąc wiadomé wartości, będzie

Pro : wst. (65°. 43'. 20", = 116,36 : CD

Log. 116,36 =	2,0658021
Log. wst. (65°. 43'. 20") =	9,9597866
	12,0255887
Log. Pro =	10.
Log. wysokości CD =	2,0255887
Log. podstawy 123,4 =	2,0913152
dop. Log. 2 =	9,6989700
Log. powierzchni ABC =	3,8158739
Log. 6544,4 =	3,8158698
	41

więc powierzchnia troykąta ABC = 6544,46

albo tak. Mamy pod liczba 79 Fig. 17

$$\text{Pow. troy. ABC} = \frac{AB^2 \times \text{wst.A} \times \text{wst.B}}{2 \times P. \times \text{wst. C.}}$$

kładąc wartości wiadome będzie

$$\text{Po.tr.ABC} = \frac{(123,4)^2 \times \text{wst}(65°.54'20") \times \text{wst}'54°.32'.10")}{2 \times \text{Pro} \times \text{wst.}(59°.44'.30")}$$

Log. (123,4)² =	4,1826304
Log. wst. (65°. 43'. 20") =	9,9597866
Log. wst. (54°. 32'. 10") =	9,9108811
dop. Log. 2 =	9,6989700
dop. wst. (59°. 44', 30") =	0,0636058
Log. pow. troy. ABC =	3,8158739

ten sam logarytm, jakiśmy otrzymali sposobem poprzedzającym.

92. *Przykład do liczby* 80, Weźmy w troykącie ABC, tę samę wartość wiadomych rzeczy, jaka była dana w liczbie 84, to jest AB = 345,6 prętóm, AC = 254,5 prętóm, kąt C = 65°. 43'. 20", trzeba znaleść powierzchnią troykąta.

Rozwiązanie. Na znalezienie wysokości CD mamy proporcyą

Pro : wst. A = AC : CD.

Z liczby 84 mamy kąt A = 76°. 4', 10"

kładąc w proporcyą wartości wiadomé będzie,

Pro : wst. (76°. 4'. 10") = 254,5 : CD.

Log. 254,5 =	2,3701428
Log. wst. (76°. 4'. 10") =	9,9870350
	12,3571778
Log. Pro. =	10.
Log. wysokości CD =	2,3571778
Log. podstawy AB =	2,5385737
dop. Log. 2 =	9,6989700

Fig. 17

Log. pow. ABC = 4,5947215
Log. 39329 = 4,5947129
86

więc powierzchnia troykąta ABC = 39329,78 prętóm kwadratowym.

93. *Przykład do liczby* 81. Załóżmy w troykącie ABC tę samę wartość rzeczy wiadomych, jaka była pod liczbą 85, to jest bok AB = 345,6 prętóm, AC = 456,7 prętóm, kąt A = 76°. 54'. 30"; trzeba znaleść powierzchnią troykąta ABC.

Rozwiązanie. Na znalezienie wysokości CD mamy proporcyą

Pro : wst. A = AC : CD

kładąc wiadomé wartości będzie

Pro : wst. (76°. 54'. 30") = 456,7 : CD

Log. 456,7 = 2,6596310
Log. wst. (76°. 54'. 30") = 9,9885629
12,6481939
Log. Pro: = 10

Log. wysokości CD = 2,6481939
Log. podstawy AB = 2,5385737
dop. Log. 2 = 9,6989700

Log. powierzchni ABC = 4,8857476
Log. 76868 = 4,8857456
20

więc powierzchnia troykąta ABC = 76868,35 prętóm kwadratowym.

albo tak. Mamy pod liczba 81

$$\text{pow: troy. } ABC = \frac{AB \times AC \times \text{wst. } A}{2 \times \text{Pro.}}$$

kładąc wartości wiadomé będzie

$$\text{Pow. troy. } ABC = \frac{345{,}6 \times 456{,}7 \times \text{wst}(76^\circ.54'.30'')}{2 \times \text{Pro.}}$$

Fig. 17

dop. Log. 2 = 9,6989700
Log. 345,6 = 2,5385737
Log. 456,7 = 2,6596310
Log. wst. (76°. 54'. 30") = 9,9885629

Log. pow. troy. ABC = 4,8857476

Ten drugi sposob w tém się różni tylko od sposobu piérwszego, iż według sposobu piérwszego, znayduiemy naprzód logarytm wysokości CD, dodając log. wst. A, do log. AC; a potém do log. wysokości dodając logarytm połowy podstawy AB, znaydujemy logarytm powiérzchni troykąta; sposobem zaś drugim postępując, otrzymujemy za jednym razem logarytm powierzchni troykąta, zbierając w jednę summę log. wst. A, log. AC, i log. połowy podstawy AB.

94. *Przykład do liczby* 82. Zakładamy w troykącie ABC, tę samę wartość rzeczy wiadomych jaka była w liczbie 86, to jest bok AB = 123,4; AC = 67,8; BC = 89,1; trzeba znaleść powierzchnią troykąta ABC.

Rozwiązanie. Wysokość CD znaydziemy z któregokolwiek troykąta prostokątnégo *np.* ACD kładając proporcyą,

Pro : wst. A = AC : CD.

Znaleźliśmy pod liczbą 86 kąt A = 44°. 44'. 24", 4. kładąc w proporcyą wartości wiadomé będzie;

Pro : wst. (44°. 44'. 24",4) = 67,8 : CD

Log. 67,8 = 1,8312297
Log. wst. (44°. 44'. 24",4) = 9,8475062
11,6787356
Log. Pro = 10.

Log. wysokości CD = 1,6787359
Log. podstawy 123,4 = 2,0913152
dop. Log. 2 = 9,6989700

Fig. 17 Log. pow. troy. ABC = 3,4690211
Log. 2944,5 = 3,4690116

95

więc powierzchnia troykąta ABC = 2944,56 prętom kwadratowym.

95. *Przykład znalezienia powiérzchni troykąta z wiadomych trzech jego boków, według sposobu wyłożonego w przypisku (i).*

Mamy wyrażenie powierzchni

$$=\sqrt{(\tfrac{1}{2}S(\tfrac{1}{2}S-AB)(\tfrac{1}{2}S-AC)(\tfrac{1}{2}S-BC))}$$

kładąc w to wyrażenie wartości wiadomé będzie pow. tr. $ABC=\sqrt{(140,15\times16,75\times72,35\times51,05)}$

Log. 140,15 = 2,1465931
Log. 16,75 = 1,2240148
Log. 72,35 = 1,8594385
Log. 51,05 = 1,7079957

Log. pow². troy. = 6,9380421
Log, pow. troy. = 3,4690210
Log. 2944,5 = 3,4690116

94

więc powierzchnia troykąta ABC = 2844,56 prętóm kwadratowym.

Treść wszystkich liczb.

1. Figury prostokréślne mogą być na troykąty prostokréślne albo zamienione, albo rozebrane - - - - - strona 1
2. Troykąt zamyka sześć rzeczy, z których jedne mogą być dowolné, inne zaś od nich zależą - - - - - 1
3. W troykącie prostokréślnym dla znalezienia rzeczy niewiadomych, trzy powinny być wiadome, między któremi bok jeden przynaymniéy znaydować się powinien - - - - - - 2
4. Opisanie trygonometryi płaskiey - 3
(a) Opisanie trygonometryi kulistéy - 3
5. Potrzeba użycia na mieyscu kątów, liniy prostych — Takowe linije nazywają się linijami trygonometrycznémi - - 3
6. Linije trygonometryczné kątów i łuków te kąty mierzących są też samé - - 5
(b) Linije trygonometryczne są też same w trygonometryi płaskiéy i kulistéy 5
7. Porządek wykładania rzeczy w trygonometryi - - - - - - 5
8. Opisanie wszystkich liniy trygonometrycznych - - - - - 6
(c) Które to kąty albo łuki nazywają się jeden względem drugiégo dopełnieniem, i spełnieniem - - - - 6
(d) Krótsze wyrażenie nazwisk liniy trygonometrycznych - - - - 8
9. Inne opisanie dostawy, wstawy odwrotnéy i dostawy odwrotnéy - - - 8

L

10. Każdego łuku linije trygonometryczne są podwóyne, lecz jednego gatunku są rówene między sobą - - - - - 8
11. Wstawa jakiegokolwiek łuku jest połową cięciwy podpierającéy łuk dwa razy większy - - - - - 9
12. Wstawa dwónastéy części okręgu koła, czyli trzeciéy części kąta prostego, równa się połowie promienia - - - 9
13. Połowy kąty prostego, czyli ósméy części okręgu koła, wstawa równa się dostawie, a styczna równa się promieniowi 10
14. W troykącie prostokątnym uważając za promień, raz przeciwprostokątną, drugi raz ramie kąta prostego, czém będą inne boki - - - - - 10
15. Linije trygonometryczne w samym początku łuku - - - - 11
16. Co się dzieje z linijami trygonometrycznémi, gdy się łuk w piérwszéy cwiartce okręgu koła powiększa, i jakie są, kiedy staje się równy całey cwiartce - 11
17. Co się dzieje z linijami trygonometrycznémi, gdy się łuk powiększa w drugiey cwiatce okręgu koła, i jakie wypadają, kiedy staje się równy półokręgowi 12
18. Co się dzieje z linijami trygonometrycznémi, gdy się łuk powiększa w trzeciéy cwiartce okręgu koła, i jakie są, kiedy staje się równy trzem cwiartkóm - 13
19. Co się dzieje z témi linijami, gdy się łuk powiększa w czwartéy cwiartce okręgu koła, i jakie wypadają, gdy stanie się równy całemu okręgowi koła - - 13
20. Co się dzieje z linijami trygonometrycznémi, gdy się łuk staje większym od całego okręgu koła - - - 13

21. Okazuje się, kiedy każda z liniy trygonometrycznych jest dodatną, a kiedy odjemną - - - - - - 14
22. Tablica pokazująca różność znaków liniy trygonometrycznych we wszystkich cztérech cwiatkach koła - - - 15
23. Linije trygonometryczné łuków spełniających się wzajemnie do półokręgu koła są równé między sobą - - 16
24. Linije trygonometryczné łuków jednego większégo od półokręgu koła, a drugiégo mniéyszégo od cwiartki okręgu koła, będącégo różnicą między łukiem uważanym, a półokręgiem koła, są równe między sobą odpowiednie, to jest wstawa wstawie i t. d. - - - - 16
25. Linije trygonometryczne łuków spełniających siebie do okręgu koła są równé odpowiednie między sobą - - - 17
26. Linije trygonometryczné łuków większych od okręgu koła - - - - 17
27. Ażeby mieć linije trygonometryczné jakichkolwiek bądź łuków, jak wielkich łuków trzeba szukać liniy trygonometrycznych - - - - 17
28. W trygonometryi płaskiey na znaki liniy trygonometrycznych żadnéy nie dajemy baczności - - - - - 18
29. Za miarę porównania bierze się promień, na wartość jemu daje się jedność z ilakolwiek zerami - - - - 18
(e) Podział promienia używany od dawniéyszych Geometrów - - - 19
30. Wyprowadzają się stosunki między linijami trygonometrycznémi zachodzące 19
31. Dla znalezienia wszystkich liniy trygono-

metrycznych trzeba naprzód wyrachować wstawy i dostawy wszystkich łuków 21
32. Znaleść wstawę i dostawę łuku dwa razy większego od łuku danego - - 22
33. Znaleść wstawę łuku dwa razy mnieyszego od łuku danego - - - 22
34. Znaleść dostawę łuku dwa razy mnieyszego od łuku danego - - - 23
35. Znaleść wstawę łuku równego summie, lub różnicy dwoch łuków danych - 24
36. Znaleść dostawę łuku równego summie, lub różnicy dwoch łuków danych - 26
37. Ciąg całego postępowania w rachowaniu wstaw wszystkich łuków - - 27
38. W dawnym koła podziale sposob znalezienia wstawy łuku jedney minuty 28
39. Sposób rachowania wstaw łuków od 0°, do 30°. - - - - - 29
40. Sposób rachowania wstaw łukow od 30°; do 60°. - - - - - 31
41. Sposób rachowania wstaw łuków od 60°, do 90°. - - - - - 32
42. W nowym koła podziale, sposob znalezienia wstawy łuku jedney minuty, a ztąd wstaw innych łuków - - - 33
43. Ze wstaw łuków zamykających stopnie i minuty, sposób znalezienia wstaw łuków mających stopnie, minuty i sekundy 34
44. Mając wstawy wszystkich łuków zawartych w cwiartce okręgu koła, mamy tém samém ich dostawy - - - 35
45. Dogodniéy jest szukać wstaw łuków w całéy cwiartce zawartych, niżeli wstaw i dostaw łuków mieszczących się w połowie tylko cwiartki - - - - 35

46. Sposób znalezienia innych liniy trygonometrycznych - - - - 36
47. Szereg łuków z linijami trygonometrycznémi im odpowiadającémi, składa tablice trygonometryczné - - - 36
48. Stosunki zachodzącé między linijami trygonometrycznémi gatunku jednego łuków podobnych - - - - 37
49. Mając linije trygonometryczné wyrachowané podług jednégo promienia, przerobić je podług promienia innégo - 38
50. Wypadki rachunku odbytego za pomocą liniy trygonometrycznych podług jakiegokolwiek promienia rachowanych, zawsze są też samé - - - - 38
51. Na miéyscu wstaw, możnaby rachować cięciwy łuków dwa razy większych - 39
52. Sposób rachowania logarytmów wstaw 39
53. Mając logarytmy wstaw wszystkich łuków, mamy logarytmy ich dostaw - 40
54. Sposob rachowania logarytmów innych liniy trygonometrycznych - - 40
55. Ułożenie tablic logarytmów liniy trygonometrycznych - - - - 41
(f) Wyliczenié znajomszych tablic, tak liniy trygonometrycznych, jak ich logarytmów 42
56. *Twierdzenie* 1. W każdym troykącie prostokréślnym, boki tak się mają do siebie, jak wstawy kątów im przeciwnych brané podług jednégo promienia - 43
(g) Inny dowód tego twierdzenia - 44
57. Zastosowanie tego twiérdzenia do troykąta prostokątnego - - - 45
58. Proporcye zachodzącé między dostawami kątów troykąta prostokątnégo a jego bokami - - - - - 45

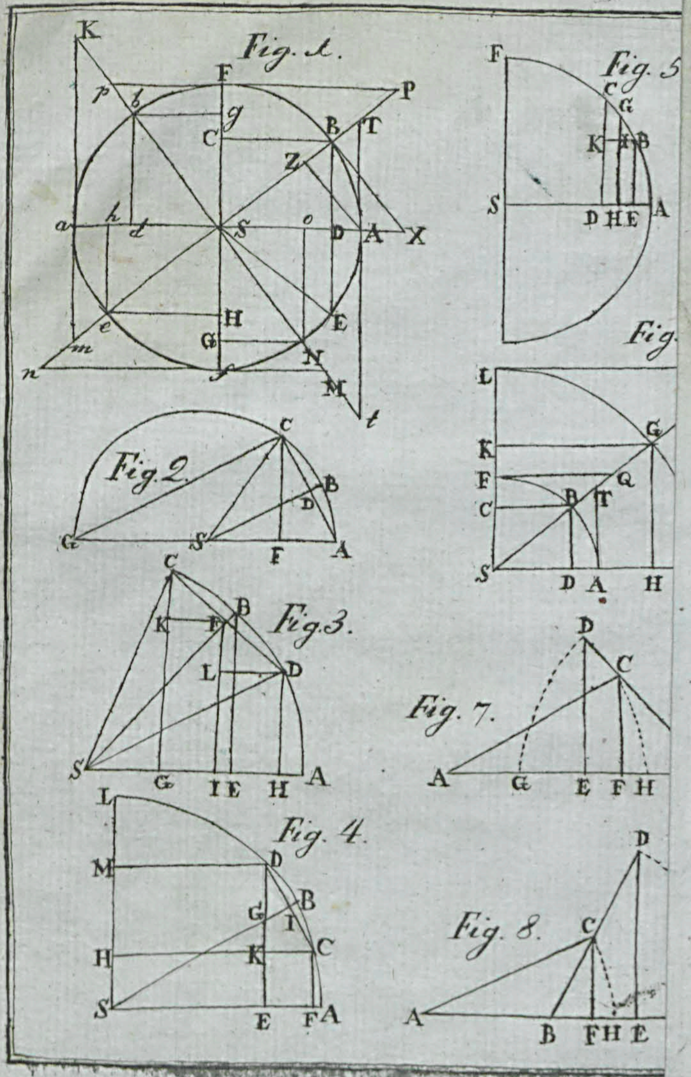
59. Proporcye zachodzące między stycznémi i siecznemi kątów troykąta prostokątnégo a jego bokami - - - 46
60. Inny wywód tych samych proporcyy 47
61. Z dwoch ilości nierównych, ilość większa równa się połowie ich summy, i połowie różnicy, ilość zaś mniéysza równa jest połowie ich summy mniéy połową ich różnicy - - - - - 48
62. *Twierdzenie 2.* W każdym troykącie prostokréślnym summa dwoch którychkolwiek boków tak się ma do ich różnicy, jak styczna połowy summy kątów przeciwnych wziętym bokóm, do styczney połowy różnicy tychże kątów - - - 49
63. Dwa wyłożoné twierdzenia są prawdziwie trygonometrycznémi, lecz potrzebne jescze trzecie - - - - 51
64. *Twierdzenie 3.* W każdym troykącie prostokréślnym, jeźli z wierzcholka któregokolwiek kąta, będzie spusczona prostopadła na bok jemu przeciwny, tak się będzie miał ten bok do summy dwoch innych boków, jak różnica tychże boków do różnicy lub summy ucinków zawartych między prostopadłą a końcami boku, na który jest prostopadła spusczona; do różnicy, jeźli prostopadła przypada na sam bok, do summy jeźli pada na przedłużenie boku - - - - - - 51
65. Znając kąty w troykącie, znamy stosunek między ich bokami. — Wyliczenie przypadków, w których troykąt może być rozwiązany - - - - 53
66. Które twierdzenie służy do rozwiązania każdego w szczególności przypadku - 54

67. Rozwiązać troykąt mając w nim wiadomy bok jeden i dwa którekolwiek kąty 54
68. Rozwiązać troykąt, mając w nim wiadomé dwa boki i kąt niezawarty między niémi 54
69. W tym przypadku zachodzi wątpliwość, sposób jey zaradzenia - - - 55
70. Rozwiązać troykąt mając w nim wiadomé dwa boki i kąt między niémi zawarty 56
71. Rozwiązać troykąt mając w nim wszystkie trzy boki wiadomé - - 57
(h) Proporcye służącé do znalezienia któregokolwiek kąta w rzeczonym troykącie, nie szukając ucinków - - - 58
72. Sposób poznania co oznacza czwarty wyraz proporcyi summę czy różnicę ucinków - - - - - - 59
73. Jeźli wypada czwarty wyraz równy piérwszemu, troykąt jest prostokątny 60
74. Jeźli troykąt jest równoramienny, ucinki zrobione przez prostopadłą są znajomé 60
75. Rozwiązać troykąt prostokątny, w którym prócz kąta prostego wiadomy jest kąt jeden ostry i bok jeden którykolwiek 60
76. Rozwiązać troykąt prostokątny, w którym wiadoma jest przeciwprostokątna i jedno ramie kąta prostego - - - 61
77. Rozwiązać troykąt prostokątny mając wiadome oba ramiona kąta prostégo - 62
78. Za pomocą troykątów prostokątnych, rozwiązać troykąt mając w nim dwa boki i kąt między niémi zawarty jakikolwiek 62
79. Znaleść powierzchnią troykąta mając wiadome dwa kąty i bok jeden - 63
80. Znaleść powierzchnią troykąta, mając wiadomé dwa boki i kąt niezawarty między niemi - - - - - 65

81. Znaleść powierzchnią troykąta, mając wiadomé dwa boki i kąt między niémi zawarty - - - - - 65
82. Znaleść powierzchnią troykąta mając wiadomé wszystkie trzy boki - - 66
(i) Inny sposób znalezienia powierzchni troykąta w tym przypadku - - 66

Przykłady rozwiązywania troykątów.

83. Przykład do liczby 67 - - - 67
84. Przykład do liczby 68 - - - 68
85. Przykład do liczby 70. - - - 69
86. Przykład do liczby 71 - - - 70
87. Przykład do przypisku (h) - - 71
88. Przykład do liczby 75 - - - 73
89. Przykład do liczby 76 - - - 74
90. Przykład do liczby 77 - - - 75
91. Przykład do liczby 79 - - - 76
92. Przykład do liczby 80 - - - 77
93. Przykład do liczby 81 - - - 78
94. Przykład do liczby 82 - - - 79
95. Przykład do przypisku (i) - - 80



Trygonometrya M. Polińskiego.