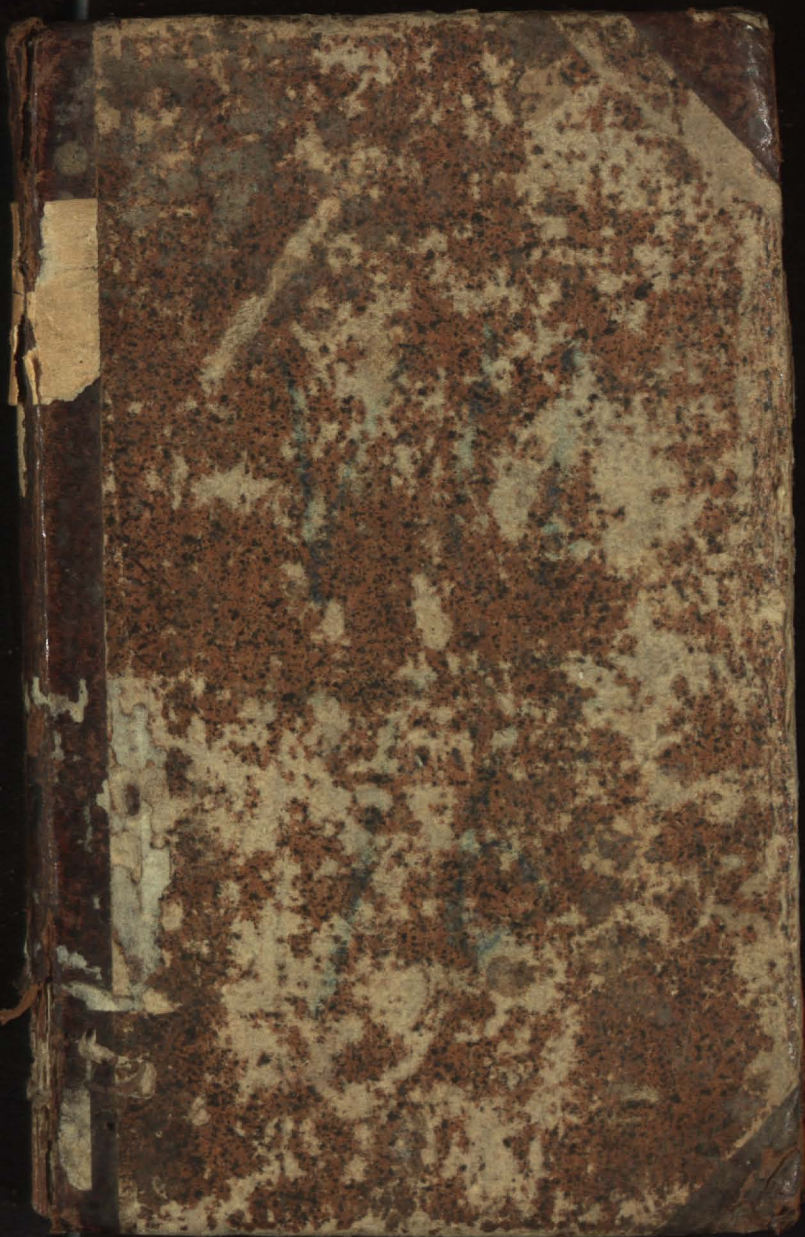




N^o 393 (I. 393).

VII-16

Call
M



1693 g. 1291

M 751



N^o 1599

Dziś. A
Znak. 734
M. 100. 3135

Dziś.
Znak.
N^o 1599.

1599
Znak.
M. 100.



N^o 1589

ELEMENTA
ALGEBRAE.

AUTHORE

R. P. MAXIMILIANO HÖLL
P. S. J. PHIL. DOCTORE.
Mathesi Prof: Publ. & Ordin.

Ex Libris ~~Nicolaus~~
~~Dietrich~~ ~~Reich~~
~~Academiae Albae Ducalis~~
~~Bibliothecae Scholae~~
~~Bianconi~~

P R Æ F A T I O.

Algorismis quatuor Arithmetica numeri-
 ca instructo Tyroni Prima Algebra

 principia traditurus, ad summum sci-
 entiarum apicem aditum pando. Est hæc
 scientia inter Mathematicas hujus ævi præcipua,
 ac nobilissima, quæ methodo Analytica veritates Ma-
 thematicas quantumlibet ignotas, & intricatas sa-
 gacitate mira feliciter deregit, explicat, invenit,
 inventas stricto compendio clarissimè demonstrat,
 inque methodum Syntheticam non sine legentium ad-
 miratione ordinat. Hujus scientia tanta quorun-
 dam Mathematicorum animis insedit æstimatio, ut
 Divinam appellarent propterea, quod à sensuum
 cognitione longe remotissima perscrutando, nullis
 numerorum, aut mensurarum finibus, nulla ma-
 gnisudinum mole conclusa per omnem, quæ late pa-
 ret veritatum Mathematicarum, rerumque narra-
 tium campum diffusa quidquid Quantum audit, si-
 bi proprium faciat, eaque facilitate abstrusa quæque
 pandat mystèria, ut oracula funderè videatur.

Mirandam hæc artem munere DEI veteribus
 quoque usitatum fuisse (cujus ope Theoremata, ac
 Problemata invenerint) quamque ipsi, ut eo major
 subiret alios inventorum admiratio, studiosè dissi-
 mulaverint, Græcum de Arithmetica restatur opus
 à Diophanto Alexandrino conscriptum signisque
 consignatum Algebraicis. * Nec immerito scientia
 hæc

(a)

* Floruit Alexandria Diophantus Mathem. se-
 culo post Christum secundo, scripsit 13 de Al-
 gebra libros, quorum 6. tantum hodie supersunt
 à Xylandro latinitate donati, hos primis Typis An-
 no 1575. in lucem datos subinde D. Casperus Ba-
 ber commentariis suis Anno 1621. editis, auxerat.

PRÆFATIO

hæc veteribus nulle non æstimanda pretio, ætquam summus mathematicarum Thesaurus secreti silentio re-
cta, paucisque discipulorum, (ut opinor) concedi-
ta, studiosè custodienda curabatur, cujus finem, ac
scopum esse norant, quantitatem, sub quibusvis qua-
stionis etiam difficillimæ involueris delitescere, in, ex
brevissimis, ac obviis indiciis (ut ita dicam) subodo-
rari, tantisque veritatum certissimarum divitiis,
quasi aliud agendo Philetis Sui paucarum horarum
laborem levissimum remunerari, quas arte Syntheti-
ca, summo etiam ingenio præcellens, labore maxi-
mo vix unquam satis assequeretur.

Quapropter Recentiores, hac arte beati, vim e-
jus mirandam in perscrutandis, determinandisque
naturæ phænomenis fausto successu experti, Philoso-
phica sua circa res naturales dogmata Algebraicis
expressa formulis proposuere, probe gnari, unica sæ-
pe linea Algebraicis rite signata figuris, et tan-
taque naturæ mysteria declarari, quibus explicandis
(si verbi uterentur) complures paginas conscribendi
necessitatem sibi imponerent.

Quæ cum ita sint, Matheseos juxta, ac Phi-
losophiæ Recentiorum studiosus diligentem scientiæ
huius operam navet, quæ adjutus non sine sincera vo-
luptate animi ea reperiet Martæ suo, quæ e veterum
Libris magna & temporis, & scientiæ jactura vix
hauriet sine radio, itaque secum statuat velim Ty-
ro Analystæ, tantum se profecturum in Mathema-
ticipis, ac Philosophiæ naturali, quantum exercita-
tus fuerit in Algebra Geometricæ juncta, cujus pri-
ma principia duntaxat Recentiorum more, ad caput
Tyronum methodo clara in DEI Gloriam concinna-
ta, isthic propono. Vel manent ea sibi in memo-
riam revocet Tyro, monita, quæ Elementis
Arithmetica præmiseram.

CON.



CONSPECTUS PARTIUM, & CAPITUM

Algebra.

PARS I.

*De Arithmetica literali, seu Algebra tam
speciosa, quam numerosa integrorum eum
fractionum.*

Folia.

Cap. I. Hypotheses, & Definitiones in Algebram Universam.	I
Cap. II. De Additione Algebraica.	27
Cap. III. De Subtractione Algebraica.	38
Cap. IV. De Multiplicatione Algebraica.	37
Cap. V. De Divisione Algebraica.	45
Cap. VI. De Natura, & proprietatibus Fractionum in genere.	55
Cap. VII. De quatuor Algorithmis fractionum.	66

PARS II.

*De Quantitatum Potentiis, & earundem
Radicibus.*

Cap. I. De Quantitatum Potentiis, & Radicibus in genere.	89
Cap. II. De Extractione Radicum quarumvis.	94
Cap. III. De Calculo quantitatum, & Radicum irrationalem seu surdarum, tam sim- plicium, quam compositarum.	107

P A R S III.

*De' Analyfi speciofa, seu arte resolvendi
Problemata, & Quaestiones quantumvis reconditas.*

- Cap: I. *Axiomata, Præcepta, & Præces univer-
sales totius artis Analyticae* 115
Cap: II. *Analysis Problematum simplicium; & de-
terminatorum uno incognito affectorum.* 128
Cap: III. *Resolutio Problematum, in quibus plures
occurrunt incogniti heterogenei.* 135
Cap: IV. *Resolutio Problematum indeterminatorum.* 140
Cap: V. *De Resolutione Equationum Quadraticarum.* 142

P A R S IV.

*De Proportionibus, Progressionibus, uso
Regulae Aureae, Inventione Theorematum, ac
Problematum.*

- Cap: I. *De Ratione tam Arithmetica, quam Geo-
metrica.* 152
Cap: II. *De Proportionem Geometricam.* 157
Cap: III. *De Ratione composita, & Progressione
Geometrica continua.* 166
Cap: IV. *De Proportionem, & Progressione Arith-
metica.* 175
Cap: V. *De Usu Regulae Aureae directæ, Inversa,
simplicis, & compositæ, itemque de Re-
gula Societatis.* 180
Cap: Ultim. *De Inventionem Theorematum, ac
Problematum.* 186

ELE-

E L E M E N T A

A L G E B R Æ

P A R S I.

DE ARITHMETICA LITERALI.
SEU

*Algebra tam speciosa, quam numerosa integrorum
cum fractis.*

C A P U T I.

Hypotheses, & Definitiones in Algebram universam.
DEFINITIO I.

*Algebra est scientia, quæ ope literarum al-
phabeti, & certis adhibitis signis per re-
gulas sibi proprias inquirat in quantitates,
& veritates ignotas, easque ex datis quibusdam
cognitis secundum axiomata Aequalitatis, infal-
libiliter eruit, ac demonstrative determinat. Di-
citur etiam calculus universalis, quia literæ uni-
versaliter significant quamcunque quantitatem,
pro qua significanda assumuntur.*

S C H O L I O N.

2. *Dividitur Algebra in Arithmetica literalem, seu speciosam, & in Analysis subli-
miorem; illa, substituentis loco numerorum literis,
in naturam numerorum, & veritates Arithmeticas
universaliter inquirat, Hæc quantitates quasvis
finitas, & mensurabiles per universam Mathematicam, ac
Philosophiam vagantes eruit, demonstrat, ac regulas
universales invenit, & statuit. Prior illa, si numeris
(non substitutis literis) utatur, appellatur etiam
Algebra numerosa.*

R. P. HÖLL ELEM. MATH. TOM. I.

A

DE-

DEFINITIO II.

3. *Quantitas* dicitur, quidquid addendo augeri, aut subtrahendo minui potest. *Quantum* vèro appellatur, quod constare partibus intelligitur; harum respectu vocatur etiam *Totum*.

HYPOTHESIS I.

4. Literæ Alphabeti minuscule substituantur in Algebra pro quantitatibus; & quidem literæ alphabeti priores, Ex. gr. a, b, c, &c. adhibentur pro quantitatibus nobis notis, & cognitis. Ultimæ vero x, y, z, pro ignotis, seu quærendis, & determinandis usurpantur.

SCHOLION I.

5. Cum quantitatis nomine intelligatur quidquid augeri vel minui potest (§. 3.) literæ alphabeti non tantum pro numeris, sed etiam pro lineis, areis, corporibus, & universim pro omni quantitate substitui possunt; Utiliter autem quantitates cognitæ per primas, ignoratæ per ultimas alphabeti literas exprimuntur, ut imaginationi, ac memoriæ distinctè exhibeatur quantitas, cui inquirenda per datas regulas insistit operans. Sunt, qui, ut memoria, & imaginationi adhuc melius subvenirent, literis utuntur initialibus eorum nominum, per quas, quantitates tanquam cognitæ denominantur. Ex. gr. Locò datæ quantitatis cognitæ Temporis, ponunt literam T. locò ponderis P. locò celeritatis C, &c. quod laudabile Recentiorum inventum etiam nos in Algebra ad Geometriam applicata sequemur; ignoras tamen, seu quærendas quantitates non aliter, quam per ultimas literas x, y, z, appellabimus. Vietapost antiquiores Algebrae restaurator, & inventor usus est literis majoribus alphabeti, alii cum Anglis secuti Harriotum incognitas quantitates per vocales, cognitæ per consonantes exprimebant. Literis mi-

nuscule.

nusculis usus est Cartesius, cujus praxim hodiernè ferè omnes sequuntur præter Anglos quosdam.

SCHOLION II.

6. Quoniam literæ substituantur pro quacunque quantitate (§. 4.) eaque sic substitutæ, universaliter significant illam quantitatem, pro qua substitutæ sunt (§. 1.) sequitur calculum literalem Algebrae, esse calculum quantitatum indeterminatarum; non quidem in hoc sensu, quasi talis quantitas in se non esset determinata, & certa, sed quod relatè ad unitatem (quæ nobis arbitraria est) per quam determinatur talis quantitas; non sit determinata, eò quod unitas nò supponatur determinata, determinatæ autè unitate, & ipsa quantitas determinata intelligitur. Sic si litera a significet altitudinē Ex. gr. montis, aut turris, hæc litera a significare potest altitudinem magnam, aut parvam, mensurabilem per perticas, aut pedes; aut tantum per digitos, & hoc modo dicitur quantitas a indeterminata; si verò supponatur altitudo a Ex. gr. montis, esse centum pedum; determinata habetur unitas nēpe pes, à qua determinata, determinatur quoque quantitas altitudinis a. Et in hoc sensu calculus literalis, dicitur calculus universalis, seu indeterminatorum, vique obtinet regulæ, ac Theorematis universalis, quidquid per literas ritè expressum habetur, ut inferius declarabitur.

SCHOLION III.

7. Ut Tyronibus (qui usu idearum universalium destituti in primis Algebrae algoritmis, & principiis, nescio, quas tenebras experiri solent, aut è præiudiciis aliorum sibi met monstrosa mysteria fingunt) virtus, ac non satis laudanda vis universalis Algebrae ob oculos ponatur; paritate desumpta ex Arithmetica numerica, ut puto, universalitatem, & indeterminationem quantitatum literis alphabeti

A 2

expres-

expressarum, ad caput declarabimus. Itaque, quæ admodum in Arithmetica numerica, signa, seu notæ numericæ puræ, & abstractæ ab omni materia Ex. gr. 1, 2, 3, 4, 5, 6, &c. significant suo modo universaliter, & indeterminatè omnem numerum mixtum, & concretum, Ex. gr. numerus purus, & abstractus 5, significare potest 5 studiosos, vel 5 libros, aut 5 urnas vini, 5 perticas, 5 ulnas &c. ita pariter (imò magis universaliter) litera alphabeti pro quantitatibus in Algebra usurpata ac substituta, significant quantitatem universaliter, ac indeterminatè, ut exemplum in priore scholio adductum declarat; Et verò quid magis universaliter significare potest, quam litera a, aut b, denotans Ex. gr. lineam, quæ cum multorum milliarii longa, aut tam brevis esse possit, ut unius, alteriusve capilli latitudinem vix excedat, certè litera huiusmodi magnam æquè, ac parvam denotabit, aut significabit lineam. Et binc, sicut numerus purus Ex. gr. 5 ante applicationem ad materiam erat signum, seu nota universalis quinque unitatum suo modo indeterminatarum, applicatus verò ad materiam Ex. gr. urnas vini, jam determinatus evadit; ita litera alphabeti Ex. gr. a aut b substituta pro significanda quantitate lineari, significat universaliter omnem longitudinem lineæ, assumpto autem determinato numero Ex. gr. perticarum, cujus unitas (nempe pertica) determinata intelligitur, jam determinata evadit quantitas per litteram prius universaliter indicatam; Aut quemadmodum in dialectica vox domus significat omne ædificium habitabile, atque indeterminate significat domum, vel religiosam, vel seculari, aut rusticam, &c. & per adjectam vocem aliquam determinantem ad certam speciem. Ex. gr. Principis, primò restringitur, ita etiam litera pro quan-

quantitate substituta; hoc solum discrimine, quod dialectico (propter communem hominum infirmitatem) voce domus, uti non liceat ad significandum Ex. gr. calamum, liceat autem utenti Algebræ, per litteram a, Ex. gr. significare, & denominare vel lineam, vel numerum, vel milliæ &c. non secus, atque in arbitrio Parentis est, nato sibi filio imponere nomen Petri, aut Joannis, aut Stephani, &c.

AXIOMA I. FUNDAMENTALE.

8. Quantitas, quæ sub considerationem, & calculum Algebraicum aut Mathematicum cadere potest, triplex constituitur: 1. Quantitas positiva, vel affirmativa, quæ etiam major nihilo dicitur. 2. Quantitas nulla, aut æqualis nihilo. 3. Quantitas negativa, aut minor nihilo.

DECLARATIO AUXIOMATIS FUNDAMENTALIS.

Primo: Petrus Ex. gr. habet florenos 8. nulloque hominum tenetur, aut debet aliquid; hi 8 floreni relate ad Petrum possessorem sunt quantitas positiva, realis, & affirmativa, atque major nihilo, cum plus habeat, quam nihil.

Secundo: Habeat Petrus tantum 8. florenos teneatur autem ex debito hos 8. florenos, seu totidem Joanni, tali casu, si Petrus Joanni det hos 8. si intelligitur habere nihil, id est quantitatem nullam seu æqualem nihilo.

Tertio: Habeat Petrus 8. florenos, teneatur autem Joanni flor. 10, tali casu, si Petrus Joanni det hos 8. flor. tenebitur adhuc 2. florenis qui 2. flor. sunt quantitas negativa, & minor nihilo, cum ad hoc, ut Petrus nihil habeat, requirantur adhuc 2. floreni positivi, quos tenetur Joanni, iisque habitis, & redditis Joanni, primum intelligitur Petrus habere nihil.

ELEMENTA
SCHOLION I.

9. Sunt, qui axioma hoc fundamentale declarant per motum progressivum hominis; Ex. gr. Statue te medium inter portam, & fenestram oppositam portæ tui cubiculi, & esto tibi negotium aliquod peragendum extra cubiculum, ad quem finem obtinendum necesse est, te propinquum fieri portæ, ut per eam exeas. Itaque IMO: si e medio cubiculi, in quo consistis, duos passus versus portam facias, diceris, facere duos passus positivos, quia conducunt ad tuum finem, extra cubiculum egredienai. 2do: Si verò in medio consistens quietus maneat, id est, nec versus portam, nec fenestram versus ullum passum facias, habebis motum nullum, id est, quantitatem nullam motus progressivi portam versus. 3tio: Si ex medio non portam versus (per quam te exire necesse est) sed versus fenestram duos passus retrò facias, diceris fecisse duos passus negativos, respectu nempe habito ad exitum per portam, cum non appropinques portæ, sed ab ea magis elongeris, atque ad hoc, ut ex medio portam versus non processisse dicaris, necesse est, te per duos passus ad medium redire cubiculi, in quo consistens, deprehendes, te nihil magis portæ appropinquasse, quam si ibi quietus mansisses. Cl. Jo. Poetius explicat per motum progressivum hominis in navi à prora ad puppim progredientis dum interea navis secundo fluvio defertur. Nobis tamen prima declaratio, utpote magis ad captum Tyronum, placet præ cæteris.

SCHOLION II.

10. Tyrones axioma hoc fundamentale (§. 8.) aliter menti imprimant, & omnem quantitatem, quæ per decursum Algebrae occurret, per modum illorum 8, & 10 florenorum considerare assuescant, ex qua consideratione maximarum intelligendi, tum operandi facilitas in Algebra dependet.

HYPOTHESIS II.

11. Signum Algebraicum indicans quantitatem aliquam esse positivam, vel affirmativam (§. 8.) aut majorem nihilo, est præfixa quantitas data crucula hujusmodi (+) minor, & enunciatur per vocem: plus; sic: + a, significat quantitatem a esse positivam, & enunciatur; plus a. Similiter; a, + b, enunciatur; a plus b. Signum quantitatis negativæ (§. 8.) aut minoris nihilo, est lineola (—) præfixa, & enunciatur per vocem minus; Ex. gr. sit, a — b, dic, a, minus b, Signum quantitatis nullius (§. 8.) est zerus (0) qui, cum nullam quantitatem significet, præfigi non solet literis, sed tamum inservit in problematibus reductis ad nihilum, ut locum unius partitis æquationis occupet, ut infra dicitur.

SCHOLION I.

12. Signa hæc +, & — afficiunt tantum illas quantitates, aut literas, quibus præfiguntur, nec ultra suam vim exerunt. NB. Si initio alicujus calculi literalis nullum expressè præfigatur signum, semper intelligatur tacite præfixum esse signum +, idque ex institutione hominum, adeoque illam quantitatem primam, esse positivam.

SCHOLION II.

13. Quantitas negativa, seu quæ præfixum habet (—) signum hoc, non in eo sensu accipienda est, esse negativa, quasi esset non ens, aut quid imaginarium, existens tantum in cerebro Mathematicorum, sed reipsa est quantitas realis quidem, & existens, sed quæ tantum suam præsentiam hic & nunc negat, id est, pro his certis circumstantiis præsens esse non intelligitur, tanquam non conducens ad finem incertum. Exemplum habes (in §. 9.) de duobus passibus fenestram versus factis, qui utique reales, & existētes intelligi-

ELEMENTA

8
relliguntur, sed solum sunt negativi relatè ad finem
intenzum, exendi nempe per portam, ad quem finem
tandem non conducentes, præsentiam suam negant,
id est, negativi evadunt respectivè tantum ad datas
circumstantias, licet in aliis circumstantiis positivi
esse possint. Ex. gr. si consistens in medio cubiculi fe-
nestram aperire velis. Non secus duo illi floreni ne-
gativi (in §. 8.) quos propter debitum 10. florenor
supra 8. flor. positivos persolvere tenetur Petrus
Joanni, tantum non præsentem intelliguntur relatè
ad Petrum, etsi alibi reales sunt, & existant, atque
seclusa circumstantia debiti, etiam relatè ad Petrum
esse possint positivi, id est, præsentem. Itaque quan-
tatem esse negativam, est, non negare existentiam,
sed præsentiam quantitatis pro datis circum-
stantiis.

HYPOTHESIS III.

14. Loco vocis æqualis, vel æquale, per quam
indicamus æqualitatem duarum, vel plurium
quantitatum, in Algebra usurpantur hæc signa,
(=) vel (**) aut (Do), inter quantitates æ-
quales posita. Ex. gr. Si volumus indicare quan-
tatem a, esse æqualem quantitati b, scribatur
sic, a = b, aut a. ** b, vel a, Do b, & enunci-
atur, 2 æquale b, ita 7. ** 7, dic, 7 æquale 7.

HYPOTHESIS IV.

15. Signum Majoritatis est (>) signum ve-
rò Minoritatis (<) indicans duarum quantita-
tum eam esse minorem, versus quam cuspis por-
rigitur, alteram verò majorem. Ex. gr. a > b,
enunciatur; a est majus quàm b, item b, < a, e-
nunciatur; b est minus quàm a, eodem modo; 8.
< 12, dic, 8 est minus quàm 12; aut, 12 > 8, dic,
12 est majus quàm 8.

SCHO-

ALGEBRÆ SCHOLIUM

9

16. In Algebra etiam per certa signa ipsæ quo-
que operationes, seu Algorithmi indicantur, uti sunt:
Additio, subtractio, multiplicatio, divisio, ex-
tractio radices, proportionales &c.

HYPOTHESIS V.

17. Signum Additionis, seu collectionis est
(+) præfixum quantitati additæ, & enunciatur
per vocem; Plus. Ex. gr. Summa duarum quan-
titarum a & b indicatur, aut scribitur ita, a + b,
& enunciatur; a plus b, hoc est: ad quantitatem
a addita est quantitas b. Quod si Ex. gr. 8. voce-
tu a, & 5 vocetur b, quantitas a + b, significabit
summam 8 + 5 = 13.

HYPOTHESIS VI.

18. Signum subtractionis, seu diminutionis
est lineola (—) præfixa quantitati subtrahen-
dæ, & enunciatur per vocem; Minus. Ex. gr.
Residuum, aut differentia duarum quantitatum
a & b, indicatur, aut scribitur ita, a — b, & e-
nunciatur, a minus b, hoc est: ex quantitate a ab-
lata, aut subtracta est quantitas b. Quod si Ex. gr.
8 vocetur a, & 5 vocetur b, significabit residuum
a — b idem quod 8 — 5, id est, 3.

COROLLARIUM

19. Quoniam + est signum Additionis, si-
mulque signum quantitatis positivæ (§. 11.) hoc
vero — est signum subtractionis, & simul signum
quantitatis negativæ (§. 11.) quantitas autem po-
sitiva, & negativa, itemque additio, & subtractio
sibi contrarie opponuntur (§. 121. Arithm.)
patet quantitates duas, quarum una habet si-
gnum +, altera signum — præfixum, esse sibi
contrarie oppositas, & invicem destructivas; hinc
signa + & — vocantur etiam signa contraria, &
quan-

B

quantitates his affectæ, vocantur affectæ *signis contrariis*. Ex qua hypothefi manifestum est sequens axioma fundamentale.

AXIOMA II. FUNDAMENTALE.

20. Quantitas positiva cum quantitate negativa æquali, æquatur *nihil*, seu zero (0), id est, se invicem totaliter destruant, sic: $a - a = 0$, aut $-a + a = 0$ seu si 4 valeat a , erit $4 - 4 = 0$, aut, $-4 + 4 = 0$.

COROLLARIUM

21. Si quantitas positiva major est quantitate negativa sibi conjuncta, tali casu, quantitas negativa tantam partem destruit ex positiva quantâ ipsa negativa indicat; & vicissim, si quantitas negativa major est quantitate positiva sibi conjuncta, quantitas positiva tantum destruit ex negativa, quantum positiva se habere indicat. Ex. gr. Sit quantitas $+8$. & altera -5 . cum sit $8 > 5$. erit: $8 - 5 = 3$. id est, quinque unitates negative ex 8 positivis destruant quinque unitates; & iterum, sit quantitas $+5$. & altera -8 , erit $-8 + 5 = -3$. Quia quinque positivæ unitates, destruant ex 8, negativis quinque, unde remanent tres negativa. Ut patet ex (§.8.)

DEFINITIO III.

22. Quantitas incomplexa, aut monomia, vocatur quævis quantitas seorsum sumpta, id est, non conjuncta cum altera quantitate per signa $+$ vel $-$ interposita; Ex. gr. a , vel b , aut c , item ba , vel cba , aut abc &c.

DEFINITIO IV.

23. Quantitas complexa, aut Polynomia, dicitur, cum duæ vel plures quantitates interpositis signis $+$ vel $-$ sibi junguntur; Ex. gr. $a + b$, aut

b , aut $a - b$ vel $a + b + c$; item; $ba + c - ad$ &c.

SCHOLION.

24. Quando duæ quantitates per signum $+$ vel $-$ conjunguntur; Ex. gr. $a + b$, vel $a - b$, aut ad $+bc$. hujusmodi complexa quantitas vocatur, Binomia, id est: (duarum partium). Si tres, Ex. gr. $a + b + c$, vel $a - b + c$, &c. vocatur Trinomia; si quatuor, Ex. gr. $a + b - c + d$, &c. dicitur Quadrinomia. In genere, si plures per signa $+$ vel $-$ jungantur, appellatur quantitas complexa Polynomia.

HYPOTHESIS VII.

25. Signa Algebraica multiplicationem quantitatum indicantia, sunt: Primo utilitissimum signum est, si factores absque ullo signo interposito sibi connexi scribantur; Ex. gr. Si volumus indicare productum, quod ortum est ex multiplicatione duorum factorum a & b , scribatur, ba , vel ab ; Secundo: multiplicationem indicat punctum (.) inter factores interjectum, aut duæ lineæ decussatæ (X) interpositæ. Ex. gr. $a.b$, vel $a \times b$, & enunciatur, a est multiplicatum per b ;

Hoc ultimo (X) signo nos raro utemur.

SCHOLION.

26. Itaque si Ex. gr. a valeat 8, & b valeat 3. erit productum ex a per b ; id est: $ab = 24$, item $a.b = 8.3 = 24$, aut $a \times b = 8 \times 3 = 24$. hoc est productum 24, quod factum est ex factoribus 8 & 3 indicari potest per signa, vel sic: 8.3. vel 8×3 . quæ significant multiplicationem. Adhibent etiam aliqui pro signo multiplicationis commâ (,) sed minus rectè propter confusionem typi, nos commatæ pro signa multiplicationis nunquam utemur, sed sufficiat

ficiat insinuisse, ne erroris Typographos arguamus, cum pro signo multiplicationis comma positum legerimus.

HYPOTHESIS VIII.

27. Si multiplicatio quantitatis polynomiae per monomiam, & vicissim, item multiplicatio quantitatis polynomiae per polynomiam indicanda sit, quantitas polynomia parenthesi includatur, & alteri quantitati vel cum, vel sine signo multiplicationis (§ 25) jungatur. Ex. gr. Sit indicanda multiplicatio ex factore $a + b - c$ in factorem d ; scribatur $(a + b - c) d$, vel $d(a + b - c)$ vel interjecto puncto $(a + b - c) \cdot d$, vel interjecto $\times$ signo, $(a + b - c) \times d$, seu $d \times (a + b - c)$, sit item indicanda multiplicatio quantitatis polynomiae, $a + b - c$, per polynomiam $d + f - m$; scribatur: $(a + b - c)(d + f - m)$ vel $(a + b - c) \cdot (d + f - m)$, aut etiam $(a + b - c) \times (d + f - m)$.

SCHOLION I.

28. Vulgò, exempla à nobis expressa ita etiam scribuntur; $a + b - c \cdot d$; vel $a + b - c \cdot d$, aut $a + b - c \times d$, item exempla nostra polynomiorum vulgò sic exprimuntur: $a + b - c \cdot d + f - m$, aut $a + b - c \times d + f - m$; in quibus notandum; quod si superducta linea non omnes quantitates includat; Ex. gr. $a + b - c \times d + f$, intelligi debet, illas quantitates, ad quas linea superducta non porrigitur, non esse multiplicatas per ceteras; uti in hoc exemplo est quantitas a , quae non intelligitur multiplicata per $d + f$, sed solum quantitas $b - c$; quia linea supra $b - c$ ducta, non extenditur supra quantitatem a . Unde, quia per ductum huiusmodi linea facile error committi

potest, tutius erit uti parenthesi & ab usu huiusmodi expressionis abstinere nisi casus scholii sequētis urgeat

SCHOLION II.

29. Contingit non nunquam, ut per signa (§. 27) indicatam jam duorum factorum multiplicationem per novum tertium factorem aliquem, multiplicatam esse, indicare cogamur; tali casu, super priori modo indicatam multiplicationem linea dicenda erit, quae indicet, an uterque factorum prioris expressionis, an unus aliquis tantum per novum tertium factorem multiplicatus sit. Ex. gr. Sit quantitas, quae jam per signa multiplicationis haec: $(a + b - c) \cdot (d + f - m)$ denud super indicanda, esse tota multiplicata per novum factorem; $n + u$. scribatur sic: $(a + b - c) \cdot (d + f - m) \times (n + u)$, vel sic: $(a + b - c) \cdot (d + f - m) \times n + u$. Quod si linea super unum ex factoribus dicta non sit, intelligendum est, illum non esse multiplicatum per tertium novum factorem; Ex. gr. Si scribatur: $(a + b - c) \cdot (d + f - m) \times n - u$, vel sic: $(a + b - c) \cdot (d + f - m) \times n + u$; Vulgò haec exempla sic exprimuntur: $a + b - c \cdot d + f - m \times n + u$ vel etiam hoc modo: $a + b - c \cdot d + f - m \times n + u$, aut $a + b - c \cdot d + f - m \times n + u$; sed haec Tyronibus insinuisse sufficiat cum ejusmodi exempla rariùs occurrant.

HYPOTHESIS IX.

30. Signa Algebraica Divisionem indicantia sunt Primo: usitatissimum signum est, si indicetur per modum fractionis, id est, si dividendus subducatur linea, & infra lineam scribatur divisor: Ex. gr. Indicare volumus quantitatem dividendam a esse divisam per divisorem b , scri-

batur sic, — & enunciatur, a divis. m per b. Se-

cundo: Non minus usitatum signum divisionis sunt duo puncta (:) interjecta inter totum dividendum, & divisorem; Ex. gr. Si scribatur a : b, dic, a est divisum per b.

S C H O L I O N.

31. Quomodo multiplicatio indicata (§. 25.) significat productum, ita divisio indicata, significat quotum, adeoque hæc expressiones $\frac{a}{b}$ vel a :

b exprimentur quotum ex divisione ortum. Ex. gr. Si a valeat 12, b, valeat 4, erit $\frac{2}{b} = \frac{12}{4} = 3$, item

a : b = 12 : 4 = 3, cum 3 sit quotus ortus ex divisione 12 per 4.

H Y P O T H E S I S X.

32. Si divisio quantitatis polynomia per monomiam, & vicissim; item, si divisio polynomiae quantitatis per polynomiam indicanda sit, polynomia quantitas parenthesi includatur, si nempe pro signo divisionis usurpentur (:) duo puncta; si vero per modum fractionis exprimere placeat, omittatur parentesis, sed linea sub dividendo ducta ad totum dividendum, & divisorem extendatur; Ex. gr. Sit quantitas a + b indicanda esse divisa per c, scribatur, (a + b) : c. vel $\frac{a+b}{c}$

eodem modo, si dividendus sit a, & divisor sit b

$\frac{a}{b+c}$, scribatur, a : (b + c) vel — item, sit quantitas polynomia a + b — c indicanda esse divisa per

per

per polynomiam d + m, scribatur, (a + b — c) :

$$\frac{a+b-c}{d+m}$$

(d + m) vel sic:

S C H O L I O N.

33. Valde, ut in multiplicatione indicanda (§. 28.) dictum est, etiam in indicanda divisione pro parenthesi usurpatur linea. Ex. gr. licet (2 + b) :

c, ita scribatur: $\frac{2+b}{c}$; c, item divisio polynomiae per polynomiam, sic exprimitur: $\frac{a+b-c}{d+m}$. Hinc, quæ de his signis in scholio (§. 28. & 29.) monuimus huc quoque cum analogia applicari possunt.

C O R O L L A R I U M I.

34. Quoniam, quod multiplicatio componit, tollit divisio (§. 121. Arith.) patet multiplicationem, & divisionem sibi contrariè opponi, atque adeo adducta (§. 25.) signa multiplicationis, & adducta (§. 30. signa divisionis esse signa contraria, & hinc destructiva, sive deletiva quantitatum eandem his signis affectarum; quantitates his signis affectæ, vocantur affectæ signis contrariis. Unde manifestum est, sequens corollarium.

C O R O L L A R I U M II.

35. Quantitas aliqua multiplicata per quantitatem aliam quamcunque, & per eandem simul divisa, manet invariata, id est, nec illi quantitati aliquid accedit per multiplicationem, nec per divisionem decedit aliquid. Ex. gr. Sit a quantitas multiplicata per b, & divisa per eandem b, erit

expressio huiusmodi; $\frac{ab}{b} = a$, vel $\frac{a.b}{b} = a$, aut $\frac{a \times b}{b} = a$, item sic: (a.b) : b = a, vel sic: (a × b) :

=a. Idem patet in numeris, si Ex. gr. a valet 5, b valeat 2, erunt priores literales expressiones in

numeris hujusmodi: $\frac{10}{2} = 5$, vel $\frac{5 \cdot 2}{2} = 5$, aut $5 \times 2 = 10$, item sic $(5 \cdot 2) : 2 = 5$, vel $(5 \times 2) : 2 = 5$.

COROLLARIUM III.

36. Unde quantitas multiplicans simul, & dividens aliam aliquam quantitatem tanquam si non adesset, id est, pro nulla quantitate habetur, atque adeo deleri, & omitti potest.

SCHOLION.

37. Ut memoria tyronum consulatur, Hypothesium hucusque declaratarum tabellam compendiarum, velut memoriae adjumentum quoddam subijcere placuit, in qua residuas quoque nondum adductas signorum Hypotheses quæ explicatione vix egent, subjungimus.

TABULA COMPENDIARIA.

38. Exhibens Hypotheses signorum in Algebra hodierna usitatorum.

+ Est signum quantitaris Positivæ, seu Affirmativæ, & Præsentis (§. 11.) idem signum est Additionis, seu collectionis, (§. 17.) & nunciatur per vocem: plus; sic $a + b$, dic, a plus b.

NB. Hoc signum initio formula alicujus Algebraicæ, non præfigitur, præfixum tamen subintelligitur. (§. 12.)

— Est signum quantitatis Negativæ (§. 11.) item Subtractionis, seu diminutionis, (§. 18.) & enunciatur per vocem. minus; sic, $a - b$, dic, a minus b.

$\times$ vel $(.)$ aut $(,)$ est signum Multiplicationis, seu

seu producti, sic, $a \times b$, vel $a \cdot b$, dic, a est multiplicatum per b, usitatissimè sic scribitur ab (§. 25. & seq.)

* Divisions, seu quori, sed usitatissimè per modum fractionis; sic, $a : b$, vel $\frac{a}{b}$, dic, a est divi-

sum per b, (§. 30. & seq.)
= vel $(::)$ aut $(\propto)$ est signum Equalitatis; sic $a = b$, vel $a :: b$, aut $a \propto b$, dic, a est æquale b, (§. 14.)

> Est Majoritatis; sic, $a > b$, dic, a est majus quam b, (§. 15.)

< Minoritatis; sic, $b < a$, dic, b est minus, quam a, (§. 15.)

0 Nullitatis; sic, $a = 0$, dic, a est æquale nihilo, id est, nulla quantitas, (§. 20.)

~ Similitudinis; sic, $a \sim b$, dic, a est quantitas similis quantitati b.

∞ Infinitudinis; sic, $a = \infty$, dic, a est æquale infinito, vel potius, indefinito.

✓ Est signum Radicis; sic, $a = \sqrt{b}$, dic, a est æquale radici de quantitate b.

✓✓ Significat Radicem radicis; sic, $a = \sqrt{\sqrt{b}}$, dic, a æquale radici de radice b.

** Est signum Proportionis geometricæ continuæ, ut suo loco dicetur.

Cætera pauca per algebram occurrentia signa suis locis adferentur.

SCHOLION.

39. Iisdem omnino signis utitur Algebra numerosa (§. 2) seu ea pars Algebra, quæ pro numeris puris, & abstractis non substituit literas alphabeti, sed adhibitis signis Algebrae cum numeris suas operationes peragit.

C

SCHO.

R.P. HOLL ELEM: MATH: TOM: I.

ELEMENTA SCHOLION II.

40. Tyrones significationem, & usum horum signorum admodum familiarem sibi reddant oportet in quorum recto usu stipenda totius Algebrae virtus, & admiranda vis, ac efficacia potissimum consistit. His enim solis signis in acceptis referre debemus, artem, ac methodum proprio Marte inveniendi, ac demonstrandi veritates mathematicas, seu Theoremata; His signis debemus, resolutionis perquam faciles problematum seu questionum, quarum solutio sine possibilis fore crederetur; His signis adjuti plus hora, velut aliud agendo, sine fatigio, & intentione intellectus condiscimus, quam alia methodo vix mense integro ex aliorum libris non sine radio; & molestia habuerimus. His signis adjuti regulas nobis formamus ipsimet generales, quae literis, & signis paucis expressa memoria ita retinentur, ut eam aetate tota vix oblivisci possimus; si tamen oblivisceremur, in his signis, penum mathematicam, velut in nuce Illudam, collatam habemus, e qua sine magno labore regulam universalem, dum illa opus habemus, ultero nobismet ipsis depromimus. Signa haec vices docentis, & nos instruents Magistri fideliter obeunt, nihil recedunt, sed arcana omnia pandunt, & clarius longe, partisque verbis veritates eloquuntur mathematicas, quam d'ssertissimus Mathematicorum unquam praestare poterit; Verbo, in his mysteria omnia totius artis Analyticae contineri usus ipse docebit; hujus vero stipendia signorum horum virtutis ratio in eo sita est, quod notiones signis expressae, sint imagines quaedam sistentes imaginationi nostrae ea praesentia, quae alias, aut ultra ejus agendi sphaeram ascenderent, aut ob imaginationis evagationem facilem, elaberentur.

HYPOTHESIS XI.

41. Quantitates cognitae eadem seu aequales, lre-

literis iisdem; diversa, literis etiam diversis denominandae sunt. Ex. gr. Sint in data aliqua questione floreni, grossi, cruciferi, denominetur jam arbitrariè florenus per literam *a*, igitur per hanc literam *a*, gressum denominare non licet, sed grossum per diversam literam Ex. gr. *b*, item cruciferum, nec per literam *a*, nec per *b*, sed per tertiam aliquam *c* denominare cogimur, (intelligendo in eadem tractanda questione) quia floreni, grossi, & cruciferi, sunt inter se diversae speciei, quam diversitatem, seu heterogeneitatem literae substitutae per seipsas exprimere tenentur.

COROLLARIUM.

42. Quoniam numeri puri, & abstracti (§. 18. Arith.) solam multitudinem unitatum significant; unitatum autem multitudo una, altera multitudo major, minorve esse possit; sequitur numeros pure eandem multitudinem unitatum habentes, pro quantitativibus aequalibus, id est iisdem haberi. Ex. gr. 8. & 8. numeros verò pure majorem unitatum multitudinem habentes pro inaequalibus, id est diversis, censeri, Ex. gr. 5. & 3. Et hinc si pro numeris literae substituantur. Numeri ejusdem multitudinis, per literas eadem, diversa multitudinis per literas etiam diversas denominandi sunt; at si denominandi sunt numeri per literas, Ex. gr. 5. 8. 24. cum omnes inter se sint diversi; si sit $5 = a$, & $8 = b$, numerus 24 nec vocari potest *a*, nec dici *b*, sed per tertiam aliquam Ex. gr. $24 = c$, intelligendo in eadem questione tractanda.

SCHOLION

43. Quod de quantitativibus cognitis denominandis dictum est, idem in denominandis incognitis tenendum, ut diversa incognita per diversas ultimas alphabetas

phaberi literas, eadem verò per eandem denominantur, nisi diversa quantitates in cognita propter certam relationem ad se invicem, ad eandem reduci possint, Ex gr. Sit una x , altera y , constet autem ex circumstantiis, vel aliunde, y quantitatem esse duplam de quantitate x , tali casu, utriusque loco y , scribere possum $2x$, adeoque y sub eadem expressione x , exhibere licet; ut infra dicetur; quod monitum etiam servit in denominandis cognitis.

DEFINITIO V.

44. Quantitas monomia composita, dicitur, quæ duabus, vel pluribus literis (nullo intermediente signo aliquo) sibi invicem conjunctis expressa habetur; Ex. gr. bc , vel bca , aut abd ; item aa , vel aab , aut dfe , &c.

COROLLARIUM.

45. Ex (§. 25.) patet, quod quantitas monomia composita exprimat Hypothesim multiplicationis primo modo indicatam, & vicissim Hypothesis multiplicationis primo modo indicata, exprimat quantitatem monomiam compositam.

DEFINITIO VI.

46. Quantitas monomia affecta coefficiente, dicitur, cui ad partem sinistram (NB. nequaquam ad dextram) præfixus est numerus aliquis, vel absque signo ullo intermediente, Ex. gr. $3a$, vel $4ab$, aut $15bc$; vel etiam intermediente signo, sed solius multiplicationis, Ex. gr. $3 \cdot a$, vel $4 \cdot ab$, aut $15 \cdot ab$. Numeri vero præfixi vocantur coefficientes.

COROLLARIUM I.

47. Coefficientes itaque indicant, quoties sibi met quantitas literalis addita est, Ex. gr. $3a$ significat quantitatem a ter sibi met additam, & Coefficientens 3 conjunctus quantitati a , supplet hanc longio-

giorem expressionem; $a + a + a$; item $4a$ significat quantitatem a quater sibi met additam, & supplet vicem hujus longæ expressionis; $ab + ab + ab + ab$; unde porro liquet, quod expressio per coefficientes, sit modus quidam scribendi per abbreviationem quantitates literales, sibi met aliquoties additas, ita Ex. gr. loco hujus seriei; $bc + bc + bc + bc + bc + bc + bc + bc$, brevissime scribitur, $7bc$. Item loco hujus, $2bd + 3bd + 5bd + 7bd$, scribatur: $17bd$. Idem intelligendum de quantitatibus negativis, sic $-4a$, est compendiosa expressio hujus, $-a, -a, -a, -a$.

COROLLARIUM II.

48. Quoniam omnis quantitas monomia (considerata per modum totius) seipsam semel sumptam, id est, unum totum significat, omnis quantitas monomia non affecta coefficiente, unitatem tacite præfixam habere intelligitur; Ex. gr. a idem est quod $1a$, aut $bc = 1bc$; &c. NB. Hæc unitas nunquam expressè præfigitur, (nisi circumstantiæ aliud svadeant) semper tamen tacite præfixa intelligitur.

DEFINITIO VII.

49. Quantitas literalis affecta exponente, illa dicitur, quæ ad dextram sursum versus, vel numerum, vel literam appositam habet; Ex. gr. a^3 , vel ab^4 , aut a^a , vel a^m ; numeri verò, vel literæ ad dextram positæ, vocantur Exponentes.

COROLLARIUM

50. Cum exponentes ex Hypothesi indicent repetitam datæ quantitatis per semetipsam multiplicationem, Ex. gr. a^3 indicat quantitatem a esse multiplicatam per eandem a seu aa , & hoc factum aa , esse iterum multiplicatum per a , seu aaa ; sequitur, expressionem hanc a^3 , supplere hanc

hanc longiorem, aaa , vel $(a.a.)a$, aut hanc $(a \times a) \times a$; & hinc liquet, expressionem per exponentes, esse modum scribendi per abbreviationem quantitates easdem in semet aliquoties multiplicatas. Sic loco hujus seriei; $a.a.a.a.a$, vel loco hujus; $aaaaa$, brevissime scribitur; a^5 .

SCHOLION.

51. Observent tyrones, atque alii menti imprimant notiones distinctas coefficientium, & exponentium, ne scilicet coefficientes, cum exponentibus confundantur, aut pro eodem accipiantur; Alia enim longe quantitas indicatur per coefficientem, & alia per exponentem, sic Ex. gr. alia quantitas est $3a$, & alia a^3 ; nam $3a$ ponitur loco hujus expressionis, $a+a+a$ (§. 47) Hæc verò a^3 , loco hujus aaa , vel loco hujus $(a.a).a$, (§. 50.) quarum prior nempe $3a$ significat additionem simpliciter raries factam, quot unitates habet coefficientis numerus 3. (§. 47.) Altera verò, a^3 , multiplicationem sui met-ipsius, & quidem iteratam indicat, (§. 50.) ut patet ad oculum si pro literis substituantur numeri; Ex. gr. Sit $a=4$. erit; $3a=a+a+a$, hoc est $4+4+4=12$ (§. 47.) Hæc verò a^3 , $= (a.a).a$, hoc est: $(4.4).4=64$ per (§. 50.). Adeoque $3a=12$, & $a^3=64$ patet autem 12, & 64 esse quantitates utique, valde inter se discrepantes.

DEFINITIO VIII.

52. Quantitates monomiæ dicuntur Homogeneæ (§. 20. Arith.) quæ, & iisdem literis constant (§. 41. & 43.) & exponentes (si adsint) eosdem habeant, tametsi diversis affectæ sint coefficientibus; sic Homogeneæ sunt Ex. gr. $3a$, & $4a$, item, $2ab$, & $5ba$, vel $3a^2$ & $7a^2$.

SCHOLION.

53. Animadvertant Tyrones Homogeneitatem

ia

in quantitatibus monomiis compositis non tolli per diversum præcisè earundem literarum inter se ordinem & situm; sic quantitatibus compositis monomiis, Ex. gr. abc manet homogenea, licet ejusdem literæ quocunque ordine, & situ permutatæ combinentur, Ex. gr. abc , acb , bca , bac , cba , cab , & hinc adductæ hæc quantitates singula expriment Hypothesim multiplicationis (§. 45. & 25) factum autem seu productum manet idem, quomodocunque factores inter se dicantur, (§. 49. Arith.) igitur manifestum est, adductas quantitates esse inter se easdem, & æquales, id est, homogeneas.

DEFINITIO IX.

54. Heterogeneæ quantitates monomiæ (§. 21 Arith.) dicuntur, quæ vel per unam literam diversam inter se discrepant, aut exponentes (si adsint) diversos habeant; diversitas autem coefficientium non inducit heterogeneitatem, (§. 12.) sic heterogeneæ sunt, Ex. gr. a & b , item, ab , & bc , aut ba , & cb ; Heterogeneæ quoque sunt, numeri seorsim positi, & literæ, Ex. gr. ab , & 15, aut $3bc$, & 3, & c.

SCHOLION.

55. Quod de homogeneitate, & heterogeneitate quantitarum monomiarum compositarum, exponentibus affectarum, dictum est, idem omnino cum analogia intelligendum est de quantitatibus monomiis habentibus præfixum signum ($\sqrt{\quad}$), ut suo loco declarabimus.

DEFINITIO X.

56. Formula, aut Propositio practica Algebraica, dicitur quodvis literale complexum, exhibens universaliter per signa Algebraica factas, aut faciendas operationes algebraicas; Ex. gr. Hæc

com-

complexum Algebraicum, $x = \frac{bc}{a}$ exhibens quantita-
tem incognitam x . esse æqualem quantitati b , multi-
plicata per quantitatem c , & divisa per quantita-
tem a , & hinc.

DEFINITIO XI.

57. *Resolutio Algebraica, (quæ etiam constru-*
ctio in geometria appellatur) est, si formula al-
gebraica secundum suam expressionem univer-
salem proposita, resolvatur in suos valores de-
terminatos, substituendo videlicet pro literis,
vel numeros arithmeticos, vel figuram per lineas
geometricè construendo; si in numeros simplici-
ter resolvatur, dicitur Resolutio, si vero per li-
neas geometricas determinetur, dicitur constru-
ctio Ex. gr. Sit $b=4$, $c=3$, & $a=2$, sitque formu-
la Algebraica resolvenda in numeros substituendos hæc;

$$x = \frac{bc}{a} \text{ erit in numeris; } x = \frac{4 \cdot 3}{2} \text{ seu, } x = \frac{12}{2} \text{ id est,}$$

$x=6$; adeoque x est æqualis quantitati numerica 6,
multiplicata per numerum 3, & divisa per nume-
rum 2; quod ipsum faciendum formula algebraica
eloquitur.

DEFINITIO XII.

58. *Demonstratio, seu propositio speculativa al-*
gebraica, est formula algebraica, quæ per sua si-
gna, ac literas exhibet, & eloquitur eam verita-
tem universalem, quam demonstrandam propo-
suimus, simulque continet tacite argumentatio-
nem demonstrativam. Ex. gr. Sit algebraice de-
monstranda hæc veritas universalis: Quantitas
positiva addita quantitati negativa æquali, & vicis-
sim, se invicem destruunt; erit demonstratio alge-
brai-

braica hæc formula: $-a + a = 0$, quæ formula
universalis dictam propositionem exacte elo-
quitur, & simul hanc tacitam argumentationem
continet: *Quantitas* $-a$ est *quantitas negativa*
per (§. 11.), & quantitas $+a$, est *quantitas positi-*
va per (§. 11.); eadem hæc quantitas positiva $+a$,
est simul æqualis quantitati $-a$, per (§. 41.) præ-
terea quantitas $+a$, est *simil addita quantitati* $-a$,
per (§. 17.), ergo (in hac formula) habetur quan-
titas positiva conjuncta cum quantitate negativa æ-
quali; sed quantitas positiva cum quantitate ne-
gativa æquali æquantur nihilo, id est, se invicem
destruunt totaliter per (§. 20.), ergo quantitas
positiva addita quantitati negativa æquali, & vicis-
sim, se invicem destruunt totaliter. En stupendam
signorum energiam.

COROLLARIUM.

59. Liqueat itaque formulas algebraicas, &
exprimere propositionem speculativam, vel practi-
cam, & simul continere modum perfectissimum
argumentandi, id est, demonstrationem, & qui-
dem paucissimis characteribus clarissime tan-
quam in imagine expressam, & eloquentem. Pa-
ret secundo; mira signorum, & literarum virtus,
quæ utpote universaliter eloquuntur, quam vir-
tutem numeri, etiam si sint parvi, possidere ne-
queunt, cum numeri determinatis unitatum
multitudines exhibeant, id est, numeri sunt
quantitates determinatae, & hinc formula Algebra
numerosa (§. 39.) declarationi tantum, non au-
tem demonstrationi inservire potest. Tertio: cla-
rum est, formulas Algebraicas, esse quoddam com-
pendium universale veritatum mathematicarum,
quo una linea sæpe tot veritates eloquitur, quas
si per voces consignare, & explicare vellemus,

D

non

non una pagina conscribenda foret, ut patet inferius. Qua propter.

S C H O L I O N.

60. Tyrones serio contemplationi, ac resolutioni formularum Algebraicarum incumbant, quod ipsum monitum in Prolegomenis ad Tyrones dedi, atque habita præ oculis formula algebraica quacunq̃ue, idem sibi ipse hanc cantilenam occinant; Quid loquitur hæc formula? Quam veritatem per sua signa, & literas indicat, & exprimit? quid jubet faciendum? Experti credant velim, cantilenam hanc millies repetitam, millies placituram magis, cum fructu Rei literariae, & quod consequens est, Reipubl. nulla non tempore satis aestimando, proprio experimento discant, dum ea in lucem marte proprio proferunt, quæ latet, vel acutissimos etiam Mathematicos, & Philosophos, aut latuerunt, aut quæ reppererunt adeo obscuris ambagibus, ad nos transmissa dolemus, ut iis explicandis, & enodandis Oedipi sagacitatem vix suffecturam crederes.

THEOREMA I. PRÆLIMINARE.

61. PROP. Omnis formula algebraica, continens propositionem speculativam rite per suas regulas, hypothesen, & axiomata deductam, vices obit Theorematis Mathematici.

D E M O N S T R A T I O.

Theorema mathematicum est complexum constans propositione speculativa universali, & demonstratione propositionis, seu est veritas proposita, & demonstrata, per (Prolegom.), sed huiusmodi complexum est omnis formula algebraica continens propositionem speculativam rite per suas regulas, hypothesen, & axiomata deductam, per (§. 53.) ergo. Q. E. D.

THEO-

THEOREMA II. PRÆLIMINARE.

62. PROP. Omnis formula algebraica, continens propositionem practicam rite per suas regulas, hypothesen, & axiomata deductam, vices obit problematis Mathematici.

D E M O N S T R A T I O.

Problema Mathematicum, est complexum constans propositione practica, resolutione propositionis, & demonstratione resolutionis, per (Prolegom.) sed huiusmodi complexum est omnis formula algebraica continens propositionem practicam rite per suas regulas, hypothesen, & axiomata deductam per (§. 56. & 57.) ergo. Q. E. D.

C O R O L L A R I U M

63. Quidquid igitur formula algebraica rite per suas regulas, hypothesen, & axiomata deducta exprimit, & eloquitur, pro demonstrato ab omnibus concedendum, & admittendum est.

S C H O L I O N.

64. Tyrones singula, quæ hoc capite, quod jure clavim totius Algebrae dixerim, continentur, sæpius relegendo reperant, ac memoriae mandant. Expertus loquor, eos, qui hæc intelligendo penetraverint, & memoria retinuerint, vix aliquam per decursum hujus doctrinae difficultatem habituros. Iis vero, qui hoc neglecto capite ad cetera Algebrae secreta sine clavi hac se penetraturos confidunt, svadeo, pedem referant, atque tempus pretiosum, in hoc perdendum, in alio scientiæ genere redimant.

C A P U T II.

De Additione Algebraica.

D E F I N I T I O XIII.

65. Quantitates literales, seu Algebraica dicuntur quantitates quæcunque per literas alphabeti

D 2

beti

beti (§. 4.) denominatæ, & expressæ. Ex. gr. Si linea vocetur *a*, aut numerus 1000 appelletur *b*. Quantitates *a* & *b* vocantur *literales*, seu *algebraicæ*.

DEFINITIO XIV.

66. *Additio Algebraica* est quacumque, & quomocumque affectuum quantitatum literalium, (sive ex numeris permixtæ sint, sive non sint) in unum complexum algebraicum collectio. Hoc complexum vocatur *Totum*, seu *Summa*.

THEOREMA III FUNDAMENTALE.

67. PROP. Complexum algebraicum per solam permutationem ordinis, aut loci quantitatum literalium *suis signis affectuum*, non variatur quoad quantitatem; *id est*, valor complexi algebraici nec augetur, nec minuitur. Ex. gr. Complexum algebraicum $(a + b - c)$ idem manet quoad quantitatem seu scribatur; $(b + a - c)$ sive $(b - c + a)$, sive $(-c + a + b)$, aut $(-c + b + a)$ &c.

DEMONSTRATIO.

Complexum Algebraicum est totum quoddam, aggregatum ex quantitatibus literalibus duabus, vel pluribus, tanquam partibus (§. 23. & 24.) totum autem variari non intelligitur quoad quantitatem, nisi varientur quoque quoad quantitatem partes constituentes totum (§. 25. Arith.) sed partes quoad quantitatem non variantur per solam permutationem loci aut ordinis (§. 3.), ergo complexum algebraicum per solam permutationem ordinis, aut loci quantitatum literalium *suis signis affectuum* non variatur quoad quantitatem. Q. E. D.

SCHO-

ALGEBRÆ
SCHOLIUM

63. Theorema hoc per modum axiomatis assumi poterat, cum penetratis rite terminis veritas per se nota sit; certum nempe clarum quod est, numerum Ex. gr. 100 hominum non variari quocumque ordine 100 homines disponantur, semper enim numerus 100 hominum, erit centum, & nunquam major, aut minor per solam transpositionem localem evadere potest.

COROLLARIUM I.

69. Quoniam summa ex Additione algebraica resultans est complexum algebraicum; eadem erit summa, quocumque ordine quantitates literales cum suis signis collectæ scribantur: Et hinc *Additio* quantitatum literalium inchoari potest à quacumque quantitate literali ad arbitrium operantis, modo in summa, omnes rite collectas esse, exprimatur.

COROLLARIUM II.

70. Cum in subtractione algebraica residuum, sit differentia quantitatum; & quidem singularum à singulis (§. 37. Arith.) differentiam quoque per solam permutationem quantitatum literalium suis signis affectuum, non variari; clarum est.

COROLLARIUM III.

71. In multiplicatione quoque algebraica factum totale per solam permutationem factorum partialium non variari, clarum est ex notione totius complexi algebraici (§. 67.): In factis autem partialibus combinatio literarum per (§. 25.) non variat factum, quocumque ordine factores inter se combinentur ut patet ex (§. 53.) Et hinc *multiplicatio algebraica* inchoari potest à quacumque quantitate multiplicandi, & per quamcunque quantitatem multiplicantis: ut infra patebit.

D 2

CO-

COROLLARIUM IV.

72. Ex eodem Theoremate sequitur, quod in Divisione algebraica. arbitrarium sit operanti, divisionem inchoare à quacunque quantitate dividendi, & per quamcunque quantitatem divisoris; item quotos ex divisione resultantis quocunque ordine scribi posse, infra docebitur.

SCHOLION.

73. Liquez itaque multò faciliores esse operationes Arithmeticae literalis, quàm numerorum, cum in operationibus numericis opus sit multis regulis solutis, & ordinem concernentibus, easque regulas caute observandas habeat operans, quibus in calculo literali eundè supersedis.

PROBLEMA I.

74. PROP. Quantitates quascunque signis algebraicis expressas addere.

RESOLUTIO.

CASUS I. Si quantitates addendæ sint inter se homogeneæ (§ 52. & 53.)

I. Coefficientes quantitatum homogenearum iisdem signis (hoc est, quarum quælibet habet signum $+$, vel quævis signum $-$) affectarum, colligantur in unam summam sub suis signis per (§ 47. & 48.) exprimendam. Hic revocentur in memoriam (§. 12. & 48.) Vide exemp. I. casus I.

II. Si quantitates homogeneæ sint affectu diversis, seu contrariis signis (§. 19.) id est, (una harum habeat signum $+$, altera $-$), coefficientis minoris subtrahatur à majore, & residuum scribatur in loco summæ, præfixo signo habentis majorem coefficientem per (§. 21.) Vide exemp. II. casus I.

III. Si quantitates homogeneæ, diversis signis affectæ, sint æquales, id est (si æquales habeant

beant coefficientes) in loco summæ omittantur, seu non scribantur. Vide exemp. III. casus I.

DEMONSTRATIO.

Regula I. est hypothesis (§ 47. & 48.) Reg. II. continetur in (§. 21.) Reg. III. innititur axiomati (§. 20.) Q. E. D.

CASUS II. Si quantitates addendæ sint heterogeneæ (§. 54.)

Regula unica; Quantitates heterogeneæ manentibus suis signis in loco summæ sibi tantum juxta scribantur; quocunque ordine; Hic in memoriam etiam revocandus (§. 12.) Vide exemp. I. & II. casus II.

DEMONSTRATIO

Patet hanc collectionem esse solum additionem indicatam (§. 17.) cum heterogeneæ quantitates reipsa per coefficientes addi nequeant per (§. 31. Arith.) Q. E. D.

CASUS III. Si ex quantitativis addendis, quædam sint homogeneæ, quædam verò heterogeneæ.

I. Homogeneæ addantur per regulas casus I.

II. Heterogeneæ sibi juxta ponantur in loco summæ cum suis signis per Reg. casus II. Vide exemp. I. & II. casus III.

CASUS IV. Si quantitates addendæ sint numeri seorsim cum signis algebraicis positi.

I. Cum numeri sint quantitates inter se homogeneæ, addendi sunt per regulas casus I. Vide exemp. I. casus IV.

II. Cum numeri seorsim positi sint quantitates heterogeneæ respectu quantitatum literalium, si cum iis addendi veniant, servetur reg. casus II, Vide exemp. II. casus IV. Hic casus jam demonstratus est.

ELEMENTA PARADIGMA

Exemplorum Additionis algebraicæ.

CASUS I.

EXEMP. I. REG. I.

$$\text{Ad. } \begin{pmatrix} 3a - 2b + c \\ 4a - 3b + c \end{pmatrix} \quad \text{§} \quad \text{Ad. } \begin{pmatrix} 3ab + cd - f \\ ac + 5ab - 7 \end{pmatrix}$$

$$\text{Sum: } 7a - 5b + 2c \quad \text{§} \quad \text{Sum: } 8ab + ac + cd - f - 7$$

EXEMP. II. REG. II. § EXEMP. II.

$$\text{Ad. } \begin{pmatrix} a^2 + 7b - 4c \\ 7a^2 - 9b + 7c \end{pmatrix} \quad \text{§} \quad \text{Ad. } \begin{pmatrix} 12a - 4c + b \\ -3b + ad + 4c \end{pmatrix}$$

$$\text{Sum: } 8a^2 - 2b + 3c \quad \text{§} \quad \text{Sum: } 12a - 2b + ad$$

EXEMP. III. REG. III. § EXEMP. III.

$$\text{Ad. } \begin{pmatrix} 2a + 3b - c + d \\ 3a - 3b + c + 2d \end{pmatrix} \quad \text{§} \quad \text{Ad. } \begin{pmatrix} 5x + 3y - 8b \\ 2xy - 3y + 12 \end{pmatrix}$$

$$\text{Sum: } 5a + 3d \quad \text{§} \quad \text{Sum: } 5x + 2xy - 8b + 12$$

CASUS III.

EXEMP. I.

$$\text{Addenda } \begin{pmatrix} 4a^3 + 3b \\ 3ab - db \end{pmatrix}$$

$$\text{Sum: } 4a^3 + 3b + 3ab - db$$

EXEMP. II.

$$\text{Addenda } \begin{pmatrix} a^2 + a^3 - 15 \\ 2a - bc + 8c \end{pmatrix}$$

$$\text{Sum: } a^2 + 2a + a^3 - bc - 15 + 8c$$

CASUS IV.

EXEMP. I. § EXEMP. II.

$$\text{Ad. } \begin{pmatrix} 24 + 8 - 4 = 28 \\ 15 - 10 + 4 = 9 \end{pmatrix} \quad \text{§} \quad \text{Ad. } \begin{pmatrix} ad + b - 4 \\ 6 + ad - f \end{pmatrix}$$

$$\text{Sum: } 39 - 2 = 37 \quad \text{§} \quad \text{Sum: } 2ad + b - f + 2$$

SCHOLIUM.

75. In gratiam Tyronum (qui in idæis universalibus veritatem propositam non illico assequun-

tur

ALGEBRÆ

tur adductum universale exemplum I. casus I. claritatis gratia ad determinatas quantitates applicare placuit, substituendo videlicet loco literarum, vel certarum quantitates, vel numeros. Igitur significet; a unum florenum Germ: unum grossum, c crucif: erit in numeris determinatis.

EXEMPLUM I. CASUS I.

Algebraicè numericè.

$$3a - 2b + c \text{ id est; } 3 \text{ flor.} - 2 \text{ gross.} + 1 \text{ cr.}$$

$$4a - 3b + c \text{ seu } 4 - 3 + 1$$

$$\text{Sum: } 7a - 5b + 2c = 7 \text{ fl.} - 5 \text{ gr.} + 2 \text{ cr.}$$

Idem Arithmetice.

flor. gross. crucif.

$$\begin{array}{r} 2 \quad 18 \quad 1 \\ 3 \quad 17 \quad 1 \\ \hline 6 \quad 15 \quad 2 \end{array}$$

Idem exemplum substituendo pro literis numeros

$$\text{Sit; } a = 5, b = 4, c = 7$$

erit

$$3a - 2b + c = 15 - 8 + 7 = 14$$

$$4a - 3b + c = 20 - 12 + 7 = 15$$

$$\text{Sum: } 7a - 5b + 2c = 35 - 20 + 14 = 29$$

Eodem modo, & reliqua exempla substitutis loco literarum numeris, vel certis quantitatibus, veritatem doctrinæ declarant.

CAPUT III.

De Subtractione Algebraica.

DEFINITIO XV.

76. Subtractio Algebraica, est inventio, vel expressio complexi alicujus algebraici, quod per sua signa exhibet differentiam, seu residuum alterius majoris, vel simplicis, vel complexæ quantitatis. Ex. gr. Si ex quantitate a, sit subrahenda quantitas b, erit complexum a - b, exhibens

E

hibens

hibens differentiam, seu residuum de quantitate
a, (18.)

AXIOMA III.

77. Ablatio, seu subtractio quantitatis positivæ, est ejusdem quantitatis subtrahendæ positio negativa; & vice versa, ablatio, seu subtractio quantitatis negativæ, est ejusdem negativæ quantitatis subtrahendæ, positio positiva. (§. 20. & 21.) Ex. gr. Si Petrus habeat flor. 8. positivos; & eidem auferantur 3. flor. positivi, habebit Petrus tantum 5. flor. id est; $8 - 3$. Et vice versa; si Petro habenti 5 fl seu $8 - 3$, donentur 3 floreni, habebit utique $5 + 3$ seu 8, id est $8 - 3 + 3 = 8$. (§. 20.)

PROBLEMA II.

78. PROP: Quantitates quasunque, signis algebraicis expressas, ab aliis quantitatibus algebraicis subtrahere.

RESOLUTIO.

I. Quantitates subtrahendæ subscribantur quantitatibus, à quibus subtractio fieri debet. Vide exempl. I. & II. &c.

II. Signa in quantitatibus subtrahendis mutantur in contraria, id est, (signum $+$ mutetur in $-$, & signum $-$ mutetur in $+$) Vide exempl. I. & II. &c.

III. Sic affectæ quantitates sub signis suis contrariis, addantur (per regulas Problematis prioris) cum quantitatibus superioribus in unâ summam, dabit summa hæc differentiam, seu residuum quæsitum.

DEMONSTRATIO

Subtractio quantitatis positivæ à positiva est ejusdem quantitatis subtrahendæ positio negativa, & vice versa per axioma (§. 77), fed hoc

hoc factum est per datas regulas, ergo per datas regulas rite peracta habetur subtractio, ergo rite inventa differentia, seu Residuum (§. 76.)

SCHOLIUM.

79. In his & cæteris subtractionum algebraicarum adducendis exemplis, mutationem signorum in contraria, indicabimus signis inferiore loco in subtrahendo positis, Ex. gr. Si $+$ in $-$ sit mutatum, indicabitur hoc modo $(+)$ & vice versa $-$ in $+$, hoc modo $(-)$, unde pro facienda additione (juxta datam regulam III. hujus) signa inferiore loco posita usurpanda erunt, superiora verò in subtrahendo posita signa, pro non adjectis habenda.

PARADIGMA.

Exemplorum Subtractionis Algebraicæ desumptis exemplis ex Additione (§. 74.)

CASUS I. EXEMPLUM I.

$$\begin{array}{r} 7a - 5b + 2c \\ \text{Subtrah: } 4a - 3b + c \\ \text{Mut: sig. } - 4a + 3b - c \\ \hline \text{Resid: } 3a - 2b + c \end{array}$$

EXEMPLUM II.

$$\begin{array}{r} 8a^2 - 2b + 3c \\ \text{Subtrah: } 7a^2 - 9b + 7c \\ \text{Mut: sig. } - 7a^2 + 9b - 7c \\ \hline \text{Resid: } a^2 + 7b - 4c \end{array}$$

EXEMPLUM III.

$$\begin{array}{r} 5a + 3d \\ \text{Subtrah: } 3a + 2d - 3b + c \\ \text{Mut: sig. } - 3a - 2d + 3b - c \\ \hline \text{Resid: } 2a + d + 3b - c \end{array}$$

CASUS II. EXEMPLUM II.

$$\begin{array}{r} a^2 + 2a + a^1 - bc + 8c - 15 \\ \text{Subtrah: } 2a - bc + 8c \\ \text{Mut: sig. } - 2a + bc - 8c \\ \hline \end{array}$$

$$\text{Resid. } a^2 + a^3 = 15$$

CASUS III. EXEMPLUM III.

$$12a - 2b + ad$$

$$\text{Subtrah. } -3b + ad + 4c$$

$$\text{Mut. fig. } + \quad - \quad -$$

$$\text{Resid. } 12a + b - 4c$$

CASUS IV. EXEMPLUM I.

$$59 - 2 = 37$$

$$\text{S. bz. } 15 - 10 + 4 = 9$$

$$\text{Mut. fig. } - \quad + \quad -$$

$$\text{Resid. } 24 + 8 - 4 = 28$$

SCHOLION.

80. Ut veritas doctrinae Tyronibus magis clarescat, bina exempla in scholio Additionis (§. 75.) adducta, & ad quantitates determinatas applicata, hic exhibemus, igitur significet a flor. b gross. c crucif ut in additione.

CASUS I. EXEMPLUM I.

$$7a - 5b + 2c \quad 7 \text{ fl.} - 5 \text{ gr.} + 2 \text{ cr.}$$

$$\text{Subtr. } 4a - 3b + c \text{ seu } 4 \quad - 3 \quad + 1$$

$$\text{Mut. fig. } - \quad + \quad - \quad +$$

$$\text{Resid. } 3a - 2b + c \text{ seu } 3 \text{ fl.} - 2 \text{ gr.} + 1 \text{ cr.}$$

Id est.

flor. gross. crucif.

$$\begin{array}{r} 6 \quad 15 \quad 2 \\ 3 \quad 17 \quad 1 \\ \hline 2 \quad 18 \quad 1 \end{array}$$

Idem in numeris juxta substitutionem (§. 75.)

$$\text{Sic } a=5, b=4, c=7.$$

Erit

$$7a - 5b + 2c = 35 - 20 + 14 = 29$$

$$\text{Subtr. } 4a - 3b + c = 20 - 12 + 7 = 15$$

$$\text{Mut. fig. } - \quad + \quad - \quad +$$

Re-

$$\text{Resid. } 3a - 2b + c = 15 - 8 + 7 = 14$$

SCHOLION II.

81. Examen Additionis sive proba (si eam facere placet) in Algebra, fit per regulas subtractionis hujus Probl. ut exempla omnia declarant. Eodem modo examen subtractionis fit per regulas additionis (§. 74.) adductas. Videlicet, si quantitas subtrahenda non mutatis signis, seu cum signis superioribus expressa, addatur residuo, summa restituit quantitatem, à qua subtractio facta est. En Examen, seu probam exempli I. casus I.

$$7a - 5b + 2c$$

$$\text{Subtrah. } 4a - 3b + c$$

$$\text{Mut. fig. } - \quad + \quad -$$

$$\text{Addem. } \begin{array}{l} \text{Resid. } 3a - 2b + c \\ \text{Subtr. } 4a - 3b + c \end{array}$$

$$\text{Summa } 7a - 5b + 2c$$

CAPUT IV.

De Multiplicatione Algebraica.

DEFINITIO XVI.

82. Multiplicatio algebraica, est ductus quantitatis algebraicae unius in aliam, qui ductus exprimitur per hypothesim multiplicationis primo modo (§. 25.) indicatae.

THEOREMA IV.

83. PROP: Multiplicatio quantitatis negativae per positivam, & vice versa, quantitatis positivae per negativam, factam producit negativum; id est; signum — cum +, item + cum —, dat in facto signum —.

DEMONSTRATIO.

Pars I. Multiplicatio est iterata additio; (§. 46. Arith.) sed additio ejusdem quantitatis ne-

E3

gati-

gativa iterata, seu toties facta quoties quantitas positiva affirmat, producit summam negativam, (§. 47. & 74.) id est, factum negativum, ergo; quod erat primum.

Pars II. Productum, seu factum non variatur, siue multiplicans in multiplicandum, siue multiplicandus in multiplicatorem ducatur per (§. 49. Arith.) sed (per partem I. huius) quantitas negativa, multiplicata per positivam, factum producit negativum, ergo etiam eadem quantitas positiva, multiplicata per negativam, factum producit negativum. Cum tam affirmare negationem, quam negare affirmationem sit simpliciter negare. Quod erat alterum.

SCHOLION.

84. Demonstratio hæc, uti & sequentis Theorem. Tyronibus (qui algebraicis nondum asserevere demonstrationibus) interea sufficit, donec ad calcem huius doctrinae Algebraicæ, hoc, & cætera quæpiam Theoremata ope æquationum algebraicarum directè demonstraturi sumus. Ne quis verò me criminis, admissi in demonstratione paralogismi arguat; videlicet, eadem, sed inversa ratione, argumentando, probari quoque: multiplicationem quantitatis positivæ per negativam, & vicissim negativæ per positivam, factum producere debere positivum: adeoque eadem demonstratione contradictorium confici; Is noverit, argumentationem hanc meam huic innixi fundamento; quod, tam affirmare negationem quam negare affirmationem, sit simpliciter negare; quantitas autem positiva est affirmativa, & negativa est negativa (§. 11.) ut patebit inferius in schemate affirmationum, negationum: cui fundamento, cum inversa ratio argumentandi innixi non possit, crimine admissi paralogismi me absol-

ven-

vendum, sano quisquis utitur iudicio haud diffici-
intelliget.

THEOREMA V.

85. PROP. Multiplicatio quantitatis negativæ per negativam, factum producit affirmativum, seu positivum; id est, signum —, cum —, dat in facto signum +.

DEMONSTRATIO.

Negare negationem est simpliciter affirmare (per scholion §. 87.) sed multiplicare quantitatem negativam per negativam, est unam quantitatem negativam toties negare, esse sibi negative additam, quoties altera negativa negat, ergo se invicem affirmant, seu ponunt positive, ergo factum producit positivum. Q.E.D.

COROLLARIUM

86. Ex his duobus Theorematibus deducitur regula in multiplicatione algebraica cautè observanda, videlicet; Signa eadem factorum, dant in facto +, diversa verò —; id est: si uterque factorum habeat + præfixum, vel uterque habeat præfixum signum —, in facto ponendum est signum +: si verò unus factorum habeat +, alter —, in facto scribendum est —.

SCHOLION. I.

87. Ut veritas datae regulæ, ex Theorematibus deducta, vel ipsis oculis Tyronum pateat, Schema affirmationum, & negationum subiectum, inspicere velint, in quo quantitas positiva, seu affirmativa, responderet affirmationi, seu signo +, quantitas verò negativa; negationi, id est signo —.

Schema affirmationum, & negationum.

+	(Se negasse aliquid, ille id ipsum negat.	+
+		+
-	(Se affirmasse aliquid, ille id ipsum affirmat.	-
-		-

— (Se negasse aliquid, ille id ipsum affirmat.
 Qui negat (†
 (Se affirmasse aliquid, ille id ipsum negat

Ergo;

† cum —, dat —.

† cum †, dat †.

— cum —, dat †.

— cum †, dat —.

SCHOLION II.

88. Ante faciendam multiplicationem per sequens problema, in memoriam velim revocentur (§§. 25. 53. & 71.) cum ductus quantitas algebraica minus in alteram, fiat per solam literarum conjunctionem, seu combinationem.

PROBLEMA III.

89. PROP. Quantitates algebraicas quasvis, per quantitates alias quasunque multiplicare.

RESOLUTIO

CASUS I. Si quantitates literales non sint affectæ coefficientibus, aut exponentibus, nec numeris aliis permixtæ.

I. Infra multiplicandum scribatur multiplicans cum suis signis, & subducantur lineæ. Vide exempl. I. & II.

II. Singula membra multiplicantis ducantur in singula membra multiplicandi, ut in arithmetica. Ductus autem iste fit præcise combinando literas multiplicantis cum literis multiplicandi. (§. 25.) Vide facta partialia in exempl. I. & II.

III. Signa in factis partialibus præfigantur juxta regulam (§. 86.) videlicet; signa ead. m. dant †, diversa —; Vide exempl. I. & II.

IV. Facta partialia (ductâ lineâ) colligantur

tur, seu addantur in unam summam totalem, per Reg. Addit. (§. 74.) summa hæc dabit factum totale. Vide exempl. I. & II.

DEMONSTRATIO.

Regula I. demonstratione non eget. Reg. II. constat ex (§. 53. Arith.) Reg. III. eadem est, quæ (§. 86.) & denique Reg. IV. habetur demonstrata (§. 74.) Q. E. D.

CASUS II. Si quantitates inter se multiplicandæ affectæ sint coefficientibus,

Præter Regulas datas in casu I. observentur hæc:

I. Coefficientes singulorum membrorum in multiplicando, multiplicentur per coefficientes singulos multiplicantis, ut in Arith. & facta coefficientium singulorum adscribantur singulis factis literalibus partialibus, ad sinistram; præfixo signo juxta reg. III. casus I. Vide exempl. I. casus II.

II. Si factorum unus habeat coefficientem, alter verò careat coefficiente tunc coefficientis invariatus præfigatur facto literali partiali; Vide exempl. II, cas. II.

DEMONSTRATIO.

Reg. I. patet ex (Arith. §. 53.) cum coefficientes sint numeri. Reg. II. clara est; quia coefficientis quantitas literalis carentis coefficiente est (1) tacite præfixa, (§. 48.) unitas verò non multiplicat, hinc recte præfigitur facto literali, coefficientis alterius quantitas invariata.

CASUS III. Si quantitates affectæ sint exponentibus.

Præter regulas casus I. has servare necesse est;

F

I. VI-

R.P. HOLL ELEM: MATH: TOM: I.

I. Videatur an factorum literæ, exponentibus affectæ, sint inter se homogeneæ; si homogeneæ sunt, numeri, vel (si exponentes etiam sint literæ) literæ exponentium, addantur, & pro facto (loco combinationis literarum homogenearum) una duntaxat ex homogeneis litera scribatur, cui ad dextram sursum versus summa inventa exponentium superscribatur, cæteræ verò literæ heterogeneæ adhaerentes per regulas cas: I. combinatæ exprimantur. Vide exempl. I. & II. cas: III.

II. Si unus ex factoribus habeat exponentem, alter verò eidem homogeneus careat exponente; Exponens factoris homogenei augeatur unitate, & ita auctus superscribatur uni literæ homogeneæ, ut in regula I. hujus. Vide exempl. IV. cas: III.

III. Exponentes heterogenearum literarum invariati, cum suis literis quas afficiunt, scribendi sunt in facto. Vide exempl. III. cas: III.

DEMONSTRATIO.

Regula I. & II. patet ex (§. 49. 50. & 51.) reg: III. ex (§. 41.)

SCHOLION.

90. Tyrones adductum post exempla hujus III. casus postremum scholion (§. 91.) non prætermittant legendo, in quo fundamentum additionis exponentium, declaratur ad illorum caput.

CASUS IV. Multiplicare algebraicè inter se quascunque quantitates datas, affectas coefficientibus, exponentibus, ac aliis numeris permixtas. Serventur regula casus I. II. & III. ac præterea regula arithmetica (§. 53. Arith.) Vide exempl. I. & II. cas: IV. Hic cas: IV. demonstratione non eget, cum in hoc antecedentes omnes casus collecti habeantur. PA-

PARADIGMA.

Exemplorum Multiplicationis Algebraicæ.

CASUS I.

EXEMPLUM I.	EXEMPLUM II.
Multiplicand. $a-b$	facto-§
Multiplicans $a-b$	res-§
Facta $aa-ab$	§ $aa+ab-ac$
Parcialia $-ab+bb$	§ $+ab+bb-bc$
Fact: res. $aa-2ab+bb$	§ $aa+2ab+bb-ac-bc$

CASUS II.

EXEMPLUM I.

$$\begin{array}{r} 3a+b \\ 5a-4b \\ \hline 15aa+5ab \\ -12ab-4bb \\ \hline \text{Fact: } 15aa-7ab-4bb \end{array}$$

EXEMPLUM II.

$$\begin{array}{r} 2a+3b-2c \\ 4a+5b \\ \hline 8aa+12ab-8ac \\ +10ab+15bb-10bc \\ \hline \text{Fact: } 8aa+22ab+15bb-8ac-10bc \end{array}$$

CASUS III.

EXEMPLUM I.

$$\begin{array}{r} a^3+b^2 \\ a^3-b^2 \\ \hline a^6+a^3b^2 \\ -a^3b^2-b^4 \\ \hline \text{Fact: } a^6-b^4 \end{array}$$

EXEMPLUM II.

$$\begin{array}{r} a^n+a^x-b^m \\ a^n \\ \hline a^{2n}+a^{n+x}+a^x-b^m \\ \hline \text{Fact: } a^{2n}+a^{n+x}+a^x-b^m \end{array}$$

EXEMPLUM III.

$$\begin{array}{r} a_2+b^3d-d \\ a^3b_4 \\ \hline a_2b^3+b^3d-d^2-a^3b_4 \end{array}$$

EXEMPLUM IV.

$$\begin{array}{r} a+b^4 \\ a^6+b \\ \hline a^7+a^6b^4+a^6b+b^5 \end{array}$$

ELEMENTA SCHOLION.

91. Cum (§. 50.) expressio per exponentes sit tantum modis scribendi brevior, idcirco, Tyrones ut multiplicationem in quantitatum habentium exponentes menti fixius imprimant, exempla bina prioris casus III. per modum huiusmodi scribendi expressamur, ut, si Tyro dubitaverit in casu simili, quomodo per abbreviationem scribenda sint facta, hac methodo servata, seipsum instruat. En exempla huius casus III. fusè descripta.

EXEMPLUM I. CASUS III. fusè.

$$\begin{array}{r} aaa + bb \\ aaa - bb \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{Fusè } aaaaa + aaabb \\ - aaabb - bbbb \end{array}$$

$$\text{Factum } aaaaa - bbbb:$$

$$\text{Brevius } a^6 - b^4$$

EXEMPLUM III. CASUS III. fusè.

$$\begin{array}{r} aa + bbbd - d \\ aaabbbb \end{array}$$

$$\text{Fusè } aaaaabbbb + aaabbbbbbbd - aaabbbb$$

$$\text{Brevius } a^6b + a^3b^2d - a^3b^4d.$$

CASUS IV.

EXEMPLUM I.

$$2a^3 - 4b + 1$$

$$5a^4b - 7$$

$$10a^7b - 20a^4b^2 + 5a^4b$$

$$- 14a^3 + 28b - 7$$

$$10a^7b - 20a^4b^2 + 5a^4b - 14a^3 + 28b - 7$$

EXEMPLUM II.

$$a^2 + 4a = d^2$$

$$3a^2 + 8$$

$$\begin{array}{r} 3a^7 + 12a^3 - 3a^2d^2 \\ + 8a^1 + 32a = 8d^4 \end{array}$$

$$3a^7 + 12a^3 - 3a^2d^2 + 8a^1 + 32a - 8d^4.$$

SCHOLION

92. Ut doctrina de multiplicatione algebraica brevius tradita clarior Tyronibus evadat, praesertim quae de signis demonstrata sunt, exemplum I. casus I. ad numeros, seu determinatas quantitates applicabimus, quam applicationem in omnibus exemplis Tyronibus faciendam suadeo. Sit igitur $a = 8$, & $b = 2$

Erit

$$a - b = 8 - 2$$

$$f. d. 8 - 2 = 6$$

$$a - b = 8 - 2$$

$$\& 8 - 2 = 6$$

$$aa - ab = 64 - 16$$

factum ex multi-

$$- ab + bb = - 16 + 4$$

plicatione 6 per 6

$$aa - 2ab + bb = 64 - 32 + 4 = 36 \text{ id est } = 36.$$

CAPUT V.

De Divisione Algebraica.

DEFINITIO XVI.

93. Divisio Algebraica est producti, sive facti alicujus algebraici in suos factores Resolutio; & hinc dividere algebraicè, est dato factore uno invenire alterum. Ex. gr. Dato facto algebraico abc , tanquam dividendo, datoque factore uno a , tanquam divisore, invenire factorem alterum bc , tanquam quotum, qui factores in se ducti produxerunt factum abc .

THEOREMA VI.

94. PROP: Quantitas negativa divisa per quantitatem positivam, & vice versa positiva per negativam, pro quoto dat quantitatem negativam. Quantitas verò negativa divisa per negativam, dat positivam; seu universaliter: signa eadem in dividere, & dividendo, dat pro quoto +, diversa

dant —, quemadmodum in multiplicatione ostensum est.

DEMONSTRATIO.

95. Quod multiplicatio componit, hoc solvit divisio (§. 121. Arith.) sed factum seu productum algebraicum per eandem regulam signorum componitur (§. 86.) ergo etiam per eandem signorum regulam resolvi debet. Nam quotus, tanquam unus ex factoribus, multiplicatus per divisorem, tanquam factorem alterum restituere debet dividendum. Q. E. D.

COROLLARIUM

96. In divisione itaque algebraica eadem regula studiosè observanda; nempe signa in dividere, & dividendo eadem, dant pro quoti signo †, diversa —.

SCHOLIUM.

97. Cum usus divisionis algebraicæ actualis per Problema infra tradendum, haud frequens sit, propterea quod exacta huiusmodi divisio, seu resolutio in factores raro fieri possit, idcirco præcipua duntaxat exempla, quæ usui Tyrannum futura sint, adferentur.

PROBLEMA IV.

98. PROP. Productum algebraicum in suos factores resolvere, seu Dividere algebraice.

RESOLUTIO.

CASUS I. Si divisor sit quantitas monomialis nullo coefficiente, aut exponente affecta, & dividendus similiter non sit affectus aliquo coefficiente, aut exponente.

I. Si litera, vel literæ divisoris reperiantur in omnibus dividendi membris, peracta habetur divisio, simpliciter delendo in membris dividendi literas divisoris, erunt reliquæ divi-

dividendi literæ quotus (§. 35.) observata tamen cautè regula signorum (§. 96.) tradita. Vide exempl. I. cas. I.

II. Si aliquod membrum dividendi sit idem cum divisore, seu præcisè eadem quantitas literalis, pro quotu illius membri scribenda est unitas, seu numerus 1 Vide exempl. II. cas. I.

III. Si in aliquo membro dividendi litera, vel literæ divisoris non reperiantur, interposità lineâ exprimendus est quotus juxta doctrinam (§. 30.) Vide exempl. III. cas. I.

CASUS II. Si tam divisor, quàm dividendus sint quantitates polynomiales nullo aut coefficiente, aut exponente affectæ.

I. Ductis ad sinistram, & dextram deorsum versus lineis, includatur totus dividendus, divisor scribatur ante lineam sinistram dividendi, latus verò dextrum post lineam dextram deferriat quotus scribendis. Vide positionem I. in omnibus exemplis.

II. Divisoris polynomii membrum unum eligatur, quod placet, (illud tamen præ cæteris eligendum, cujus litera, vel literæ in pluribus dividendi membris reperiuntur,) cum quo tota divisio peragenda est; nam uno semel assumpto, aliud divisoris membrum intra eandem divisionem assumere non licet.

III. Videatur in quo dividendi membro reperiatur assumptum membrum divisoris, & reliquæ literæ membri dividendi, quæ in divisore non habentur, pro quotu scribantur, ut in casu I. dictum; servata regula de signis (§. 96.) adducta. Vide positionem I. exempli I. cas. II.

IV. Per hunc literalem quotum, juxta regulas multiplicationis algebraicæ, multiplicentur

tur omnia membra divisoris, & facta partialia sub membris dividendi homogeneis scripta, subtrahantur algebraice. *Vide exempl. I. casus II.*

V. Cum membris dividendi residuis, eodem modo per easdem regulas III. & IV. inquiratur in quotum literalem, donec facta subtractione ultima nihil remaneat, *vide positionem I. exempli I. casus II.* si aliquid remaneat, quod porro dividi non possit, illud juxta Hypoth: (§ 30.) exprimendum erit. *Vide exempl. II. cas. II.*

S C H O L I O N

99. Plenam divisionis praxim Tyrones oretenus edocendi sunt, nec enim ea à Typothetis impetrare potui, quæ ad plenam necessaria fuerunt doctrinam. Hic quoque recolenda, quæ (§ 72.) dicta sunt, nulum videlicet ordinem, aut in inquirendo quoto, aut in subtrahendis factis partialibus observari, sed quemadmodum quorum literalem partialem ex quocunque membro dividendi eruere licet, ita facta partialia à quibuscumque membris homogeneis subtrahi possunt. *Vide Paradigma exempl. divis.*

CASUS III. Si tam divisor, quam dividendus affecti sint coefficientibus.

Præter regulas cas. II. servanda isthæc: per coefficientem divisoris dividantur etiam coefficientes dividendi arithmetice. *Vide exempl. casus III.*

CASUS IV. Si tam divisor, quam dividendus affecti sint exponentibus.

Servatis regulis supra adductis, si quantitates affectæ exponentibus in divisore sint homogeneæ quantitatibus dividendi, exponentes divisoris subtrahantur ab exponentibus dividendi, reliqua fiant, ut in casu I. *Vide exempl. I. & II. cas. IV.*

Regu-

Regulæ harum Resolutionum demonstratione non egent, cum ex definitione divisionis (§ 93.) pateat, hac ratione inventum quotum in singulis membris esse factorem alterum dividendi, ut per multiplicationem divisoris in quotum liquet.

P A R A D I G M A.

Exemplorum Divisionis Algebraicæ.

CASUS I. EXEMPLUM I.

Dividendus. Quotus totalis.

$$\begin{array}{r} \text{Divisor } a \left(\begin{array}{ccc} ab & + & ac - ad \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \right) b + c - d \\ \hline (a \quad a \quad a) \end{array}$$

NB. Signum deletivum ad libitum est lineola (I) interposita.

EXEMPLUM II.

Dividendus.

$$\begin{array}{r} \text{Divisor } -ab \left(\begin{array}{ccc} abc & - & abdc - ab \\ 11 & 11 & 11 \end{array} \right) -c + dc + x. \\ \hline (-ab \quad -ab \quad -ab) \end{array}$$

EXEMPLUM III.

Dividendus Quotus.

$$\begin{array}{r} \text{Divisor } d \left(\begin{array}{ccc} db & + & ad + bc \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \right) b + a + bc. \\ \hline (d \quad d \quad d) \end{array}$$

CASUS II.

Exempla sequentium casuum desumpta sunt ex exemplis in multiplicatione adductis.

EXEM: I. quod est primum CAS: I. Multipl.

Dividendus

$$\begin{array}{r} \text{Positio I.} \left(\begin{array}{ccc} aa & - & 2ab + bb \\ aa & - & ab \end{array} \right) \text{quot. part.} \\ \text{Divisor } a - b \left(\begin{array}{ccc} - & + & \\ - & + & \end{array} \right) a \\ \hline G \end{array}$$

Positio II. (resid. $-ab + bb$) quot. part.) Quotus
 Divisor $a - b$ ($-ab + bb$) $-b$) totalis
 (Subtr. $+$ $-$) $a - b$

Scilicet, in Positione I. assumpta ad libitum ex divisore litera a , dico: a in aa , dat quotum a , per hunc quotum a multiplico totum divisorem $a - b$, & factum $aa - ab$, subscribo membris homogeneis dividendi, vide Position. I. deinde subtrahendo mutantur signa in contraria, unde $-aa$, & $+$ aa se destrunt, item $+$ ab destruit ex $-2ab$ unum $-ab$ adeoque remanet adhuc $-ab$ residuum, ad hoc residuum depono tertium membrum dividendi $+bb$, ut factum vides in Positione II.

In hac Positione II. iterum ex divisore assumpta eadem litera a , dico: a in $-ab$, dat quotum $-b$, & per quotum $-b$ multiplico totum divisorem $a - b$, dat factum $-ab + bb$, unde subtrahendo, mutatis in contraria signis, membra sibi homogenea ex dividendo totaliter destrunt, & nihil residui relinquunt, itaque quotus totalis emerfit $a - b$, qui per divisorem $a - b$ multiplicatus restituit dividendum, $aa - 2ab + bb$.

Ut veritas Reg. II. Cas. II. pateat, de assumendo ad libitum quocunque divisoris membro, in gratiam Tyronum idem exemplum repetere placet assumendo ex divisore $a - b$ secundam literam, nempe $-b$, sit itaque.

Dividendus

Positio I. ($aa - 2ab + bb$) quot. part.)
 Divis. $a - b$ (fact. $-ab + bb$) $-b$)
 (Subtr. $+$ $-$)

Posi-

Positio II. (res. $aa - ab$) quot. part.) Quotus
 Divis. $a - b$ ($aa - ab$) $+$ a) totalis
 ($-$ $+$) $-b + a$

In positione I. assumpta igitur ex divisore litera $-b$, dico: $-b$ in $+bb$, dat quotum $-b$, & multiplicando totum divisorem $a - b$, per $-b$, dat factum $-ab + bb$, subtrahendo mutatis signis fit $+$ ab , $-bb$, unde $-bb$ & $+$ bb se invicem destrunt, & $+$ ab ex $-2ab$ destruit unum $-ab$ unde remanet $-ab$, vide Positionem I. ad hoc residuum $-ab$, depono tertium membrum dividendi aa , vide Positionem II.

In positione II. retenta eadem divisoris litera $-b$, dico: $-b$ in $-ab$, dat quotum $+$ a , & multiplicando per quotum a , totum divisorem, $a - b$ dat factum $aa - ab$, mutatis itaque signis fit $-aa + ab$, unde cum $-aa$ & $+$ aa , item $+$ ab & $-ab$, se invicem destruendo nihil relinquunt, patet quotum totalem esse $-b + a$, qui idem est cum quoto operationis primæ; $a - b$, cum translocatio literarum non variet complexum. (§. 67.) Ex hac operatione secunda, etiam liquet veritas tum Reg. III. cas. II. tum Coroll. (§. 72.) adducti.

EXEMPLUM II. CASUS II.

Dividendus

Positio I. ($aa + 2ab + bb + dc$) quot. part.)
 Div. $a + b$ ($aa + ab$) a) quo: tota:
 ($-$) dc

Posit. II. (Resid. $ab + bb + dc$) quot. part.)
 Div. $a + b$ (Fact. $ab + bb$) $+$ b) $a + b$
 (Sub: $-$)

Posit. III. (Residuum $+dc$) dc)
 Div. $a + b$ ($a + b$)

ELEMENTA CASUS III.

Exemplum, quod est primum casus II. multiplicationis
Dividendus.

$$\begin{array}{r} \text{Positio I.} \quad \left(\begin{array}{r} 15aa - 7ab - 4bb \\ 15aa - 12ab \end{array} \right) \begin{array}{l} \text{quor. pa.} \\ 3a \end{array} \\ \text{Div. } 5a - 4b \quad \left(\begin{array}{r} - \\ + \end{array} \right) \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{quor.} \\ \text{totalis} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{Positio II.} \quad \left(\begin{array}{r} \text{Resid. } 5ab - 4bb \\ 5ab - 4bb \end{array} \right) \begin{array}{l} \text{quor. pa.} \\ +b \end{array} \\ \text{Div. } 5a - 4b \quad \left(\begin{array}{r} - \\ + \end{array} \right) \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} 3a + b \\ \end{array}$$

CASUS IV.

Exemplum I. quod est primum casus III. multiplicationis
Dividendus

$$\begin{array}{r} \text{Positio I.} \quad \left(\begin{array}{r} a^6 - b^4 \\ a^6 - a^3b^2 \end{array} \right) \begin{array}{l} \text{quor. part.} \\ a^3 \end{array} \\ \text{Div. } a^3 - b^2 \quad \left(\begin{array}{r} - \\ + \end{array} \right) \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{quor. tot.} \\ a^3 + b^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{Positio II.} \quad \left(\begin{array}{r} \text{Resid. } a^3b^2 - b^4 \\ a^3b^2 - b^4 \end{array} \right) \begin{array}{l} \text{quor. part.} \\ +b^2 \end{array} \\ \text{Div. } a^3 - b^2 \quad \left(\begin{array}{r} - \\ + \end{array} \right) \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \end{array}$$

Exemplum II. quod est secundum casus III. multiplic.
Dividendus

$$\begin{array}{r} \text{Div. } a^n \quad \left(\begin{array}{r} a^{2n} + a^n + a^n - a^{2n} \\ a^{2n} + a^n + a^n - a^{2n} \end{array} \right) \begin{array}{l} \text{quor. totalis.} \\ a^n + a^n - b^m \end{array} \\ \left(\begin{array}{r} - \\ - \\ + \end{array} \right) \end{array}$$

SCHOLION.

100. Examen divisionis fitiope multiplicationis
algebraica, & Acissim examen multiplicationis fit
per divisionem algebraicam. Tyrones sequentia ca-
rollaria ex praxi divisionis orza, perspecta habeant,
ut ea, quæ inferius de resolutione problematum tra-
habuntur facilius intelligant.

CO-

COROLLARIUM I.

101. Quemadmodum in multiplicatione (§.
89. cas. II. reg. II.) si unus factorum careat co-
efficiente, alter verò factorum affectus sit aliquo
coefficiente, in facto invariatus præfigitur co-
efficientens alterius factoris, ita in divisione, si di-
videndus habeat coefficientem, non item divisor
in quoto manet invariatus coefficientens. Ex. gr.
Sit dividendus $3abd$, & divisor db , erit quotus,
 $3a$; Ratio clara est, quia db est idem quod ldb (§.
48) sed unitas non dividit (§.77 Arith.) ergo,
Quodsi verò divisor habeat coefficientem, non
item dividendus, pro quoto scribenda erit illa li-
tera, quæ in divisore non comparet, & subscri-
pto coefficiente divisoris per Hypothefi (§.30)
exprimenda. Ex. gr. Sit dividendus, abd ; divi-
sor $3bd$ erit

quotus $\frac{a}{3}$ ut patet ex cas. I. §. 98.

COROLLARIUM II.

102. Ex cas. I. §. 98. colligitur, quod in com-
plexo algebraico per hypothefi (§.30.) expres-

so, Ex. gr. $\frac{ab+ac}{a}$, aut $(ab+ac):a$, deleri simpli-

citer possint literæ homogeneæ, tam in divisore,
quàm dividendo, atque adeo loco hujusmodi
expressionum, scribi potest, $b+c$, item loco hu-

jus $\frac{xb+ax}{x}$, scribi potest. $b+c$. item $\frac{xb+b}{b}$ dat

quotum $x+c$. I. aut $\frac{ac}{bc}$ quotum $\frac{a}{b}$ dat (§.36.)

G3

CO-

COROLLARIUM III.

103. Quoniam *Ex. gr.* $ax - bx$, est factum ex quantitate $(a - b) \cdot x$, si occurrat formula $\frac{ax - bx}{a - b}$,

deletis ex formula utrobique, $a - b$, erit quotus x , (non $x - x$) ut patet ex regula divisionis; i-

tem $\frac{ax + bx}{a + b}$ dat quotum x , (non $x + x$, seu $2x$);

hinc in occurrente huiusmodi formula considerandum, an litera in dividendo saepius repetita non compareat in divisore, hæc enim sola erit quotus, si cæteræ dividendi literæ in divisore compareant; sic, $\frac{ax + bx - cx}{a + b - c}$ valet tantum x .

COROLLARIUM IV.

104. Cum, quod ponit multiplicatio, tollit divisio (§. 121. Arith.) si in formula per divi-

sionem expressa, *Ex. gr.* $\frac{x}{a + b}$ dividendus x mul-

tiplicari deberet per $a + b$, seu per divisorem suum, tali casu simpliciter delendus est divisor,

manente solo dividendo; nam $\frac{x}{a + b} \cdot (a + b)$ & idem x

multiplicatum per $a + b$, dat factum $\frac{(ax + bx)}{a + b}$:

$a + b$, seu $\frac{ax + bx}{a + b}$, sed (per Corol. §. 103.) $\frac{ax + bx}{a + b}$,

est $= x$. ergo.

COROLLARIUM V.

105. Divisio actualis per datas regulas fieri non potest, quoties litera, vel literæ divisoris

non

non reperiuntur in membris dividendi. *Ex. gr.* Sit dividendus; $(ac + bc + cm)$ per divisorem, $(d + n)$; tali casu tantum exprimenda est divisio

per hypothesi: (§. 30.) videlicet, $\frac{ac + bc + cm}{d + n}$ cum non sit factor.

SCHOLION.

106. Hæc de quatuor algoritmis adduxisse in compendio sufficiat Tyronibus, quorum plenior doctrina viva docentis voce dabitur; monitos iterum iterumque volo Tyrones, in his quatuor algoritmis præcipue versari sint, sequè exerceant sedulo, nam ulterius progressi sine facilitate tractandi hos algorithmos sæpe sepius ad hos redire cogentur. non secus atque in arithmetica numerica, nemo nullus divisionem instituit, sine notitia additionis, subtractionis, & multiplicationis propterea, quod hæ operationes divisionis algorithmum ingredientur.

CAPUT VI.

De natura, & proprietatibus fractionum in genere..

DEFINITIO XVIII.

107. Fractio est quantitas unitate minor, id est, pars, vel partes alicujus totius, quod totum per modum unius consideratur. *Ex. gr.* 2. crucif: qui sunt partes duæ totius grossi per modum unius considerati.

HYPOTHESIS XII.

108. Fractio exprimitur, vel designatur per expressionem hypotheticam divisionis (§. 30.)

declaratam. *Ex. gr.* Algebraicè $\frac{a}{b}$ vel $a : b$. Nume-

ricè $\frac{3}{4}$ vel 3 : 4.

4

SCHO-

ELEMENTA
SCHOLIION.

109. Expressio prior fractionis per lineam interjectam usitatissima est: Ex. gr. $\frac{a}{b} \frac{3}{4}$ vel $\frac{3}{4}$ et si duo puncta interposita æquæ fractionem indicent.

DEFINITIO XIX.

110. Literæ, vel numeri supra lineam scripti, vocantur Numeratores, infra lineolam positi, Denominatores appellantur, sic in his

$\frac{a}{b} \frac{3}{4}$ vel $\frac{3}{4}$, Numeratores sunt a, vel Numerus 3,

Denominatores verò b, vel 4.

SCHOLIION.

111. Ratio: quæ nota infra lineolam scripta vocentur denominatores, supra lineolam posita numeratores, hæc est: quod nota inferior representans totum per modum unius, denotet, aut exprimât, seu denominet, in quot partes illud unum totum sit sectum, seu divisum. Superior verò seu numerator, numerat, quot hujusmodi partes (quales denominator exprimit) ex illo uno sint accipiendæ ad hoc, ut valor fractionis cognoscatur. Sic Ex. gr. in hac fractione

$\frac{3}{4}$ numerus 4 denominat illud unum esse sectum, seu divisum in quatuor partes, numerator verò 3 numerat seu dicit, tres partes ex illis quatuor accipiendas esse, ad constituendum valorem hujus fractionis

Rem hanc ad oculum in gratiam Tyronum declarare juvat. Sit linea AB representans unitatem Ex. gr.

I

ALGEBRÆ

AI ——— I ——— 2 ——— I ——— 3 C 4 ——— IB
unam ulnam, sitque secta hac linea AB in quatuor partes æquales: 1, 2, 3, 4. Sint itaque exprimenda, seu indicanda tres partes AC de hac linea, seu de una ulna AB, rectè igitur per fractionis expressionem sic indicabitur, $\frac{3}{4}$ unius ulnæ, in qua expressione, clarum est, denominatorem 4 indicare totam unitatem seu ulnam AB in quatuor partes sectam, numeratorem verò 3, numerare tres hujusmodi partes (quæ sunt AC), de tota linea AB in quatuor partes secta.

Idem algebraicè ostenditur in hac linea KM.

KI ——— I ——— a ——— I ——— ID ——— IM ———
b

In qua tota linea KM vocetur Ex. gr. b, partes KD, vocentur a, rectè algebraicè exprimeretur linearis fractio: $\frac{a}{b}$

COROLLARIUM I.

112. Hinc liquet Primò: fractionem veram esse, cujus numerator minor est suo denominatore, quia exprimit quantitatem unitate minorem (§. 107.) Secundò: Fractio vulgo spuria erit, si nu-

merator sit æqualis suo denominatori, ut $\frac{b}{b}$ vel $\frac{4}{4}$

quia tali casu valor fractionis est æqualis toti unitati, ut patet ex linea AB (§. III.) Multo magis spuria vocabitur, si numerator major sit suo

denominatore, ut $\frac{5}{4}$, quia numerator plures par-

H

par-

partes numerat, quàm sint in denominatore, seu in unitate. *Ut ex contemplatione lineæ AB clarum est*
COROLLARIUM II.

113. Inter duas, vel plures ejusdem unitatis fractiones, id est, (quæ habent eundem denominatorem) illas esse quoad valorem majores, quæ habent majores numeratores, *Ex. gr.*

$\frac{3}{4} > \frac{2}{4}$ quia numerator 3, ex æqualibus ejusdem unitatis partibus, plures partes numerat, quàm numerator 2. *Vide expressionem linearum AB (§. III.)* Et hinc manifestum est, quod si manente eodem denominatore augeantur, vel minuantur numeratores, valores quoque fractionum augeantur, vel minuantur, id est, vel majores, vel minores quoad valorem efficiuntur, igitur universaliter, valores fractionum homogenearum à solis numeratoribus cognoscuntur.

DEFINITIO XX.

114. Fractiones dicuntur homogeneæ, seu ejusdem denominationis, quæ habent eundem denominatorem, ut $\frac{a}{b}$ & $\frac{c}{b}$ aut $\frac{ad}{bd}$ & $\frac{bc}{bd}$ item $\frac{3}{4}$ & $\frac{2}{4}$.

Heterogeneæ appellantur, quæ sub diversis denominatoribus comparent, ut $\frac{a}{b}$ & $\frac{c}{d}$ vel $\frac{3}{4}$ & $\frac{5}{7}$.

DEFINITIO XXI.

115. Fractiones ejusdem valoris, seu æquales sunt, quarum numeratores æqualiter continentur in suis denominatoribus; *Ex. gr.*

$\frac{1}{2} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8} = \frac{5}{10} = \frac{6}{12}$ &c. in quibus, numeratores singuli in suis denominatoribus bis continen-

tur, sic pariter æquales sunt, $\frac{6}{18}$ & $\frac{8}{24}$, quia in

utraq; numerator ter continetur in suo denominatore, quod per divisionem innotescit.

SCHOLIUM.

116. Observent Tyrones, æqualitatem valoris fractionum confundendam non esse, cum æqualitate denominationis; nam fractiones possunt esse æquales quoad valorem, quin habeant æquales denominatores, ut patet ex (§. 115), & vicissim, possunt habere æqualem denominationem quin tamen sint æquales, quoad valorem, ut clarum est ex (§. 115.)

THEOREMA VII.

117. Si ejusdem fractionis tam numerator, quàm denominator multiplicetur, per eandem aliquam quantitatem tertiam, fractio nova ex productis orta, erit æqualis quoad valorem prioris nondum multiplicatæ.

DEMONSTRATIO ALGEBRAICA.

Sit fractio $\frac{a}{b}$ cujus numerator a , & denominator b , multiplicetur per eandem quantitatem tertiam c , erit fractio nova ex productis orta $\frac{ac}{bc}$ sed $\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b}$ per (§. 35. & 102.) ergo. Q.E.D.

IN NUMERIS DECLARATUR.

1.
 Sit fractio $\frac{1}{2}$ cujus tam numerator: quàm denominator multiplicetur per 3, & erit nova fractio $\frac{3}{6}$ sed $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ per (§. 115.) ergo.
 H 2

THEO-

THEOREMA VIII.

118. Si tam numerator, quam denominator ejusdem fractionis exacte dividatur per eandem aliquam tertiam quantitatem, fractio nova ex quotis orta quoad valorem erit eadem, quæ fuit ante divisionem.

DEMONSTRATIO ALGEBRAICA.

Sit fractio $\frac{ac}{bc}$ — cujus numerator ac , & denominator bc dividatur per eandem tertiam quantitatem c , erit fractio nova ex quotis orta $\frac{a}{b}$ — sed —

$\frac{ac}{bc}$ per (§. 117.) ergo. Q. E. D.

IN NUMERIS DECLARATUR.

Sit fractio $\frac{3}{6}$ — cujus tam numerator, quam denominator dividatur per 3, erit nova fractio $\frac{1}{2}$ — sed — $\frac{3}{6}$ per (§. 115. & 117.) ergo.

COROLLARIUM I.

119. Hinc si tam in numeratore, quam denominatore fractionis numericæ reperiuntur zeri finales, deletis utrinque zeris numero æqualibus, fractionis valor non variatur Ex. gr.

Loco $\frac{300}{6000}$ scribi potest $\frac{3}{60}$ item $\frac{20}{40}$, aut

$\frac{600}{1200}$ — &c. ratio patet, quia zeri finales oriuntur ex multiplicatione decadica, vel numeri

10,

10, vel 100, vel 1000 &c. ergo per eosdem divisæ (quod fit delendo zéros) manent eadem.

COROLLARIUM II.

120. Ex hoc Theoremate patet ratio compendii (§. 76. Arith.) adducti, cum omnis divisio expressa per Hypothesim (§. 30.) repræsentet fractionem spuriam, in qua numerator est *dividendus*, denominator verò *divisor*.

COROLLARIUM III.

121. Idem Theorema suppeditat methodum, fractionem numericam in numeris majoribus exhibitam, reducendi ad numeros minores, valore fractionis invariato. Videlicet I. Dividendo exacte tam numeratorem, quam denominatorem per eundem aliquem numerum. Ex. gr.

Sit fractio $\frac{12}{24}$ —, cujus numeratorem 12, & denominatorem 24 exacte dividat numerus 6, erit facta divisione per numerum 6, nova fractio $\frac{2}{4}$ æqualis $\frac{12}{24}$ per (§. 118.) Item $\frac{30}{60}$ $\frac{3}{6}$ per

(§. 119.) & dividendo $\frac{3}{60}$ per 3, erit $\frac{1}{20}$, ergo $\frac{30}{60} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$. Secundo: Eadem hac methodo,

fractio ad *minimos*, ut dicitur, *terminos* reducitur in casu, si numerator exacte dividat denominatorem suum; Ex. gr. in fractione $\frac{12}{24}$ —, cum

12 exacte contineatur bis in 24, si tam numerator,

H3

tor, quàm denominator, per 12 dividatur, erit

¹
fractio — in terminis minimis.

²

SCHOLIUM.

122. Reductio, hæc ad terminos minores, sua utilitate non caret; nam Primo: valor fractionis, sit in numeris minoribus, facilius innotescit, sit facilius intelligitur, quata pars sit — de uno floreno, quàm

36

²

36

— unius florenti, esse quoad valorem idem sicut —

72

72

¹
quod — Secundo. Reductio hæc compendium subministrat operationum arithmeticarum, cum compendioso sit modus operandi per parvos, quàm magnos numeros.

²

PROBLEMA V.

123. PROP: Ex numero quocunque dato integro, efficere fractionem vulgo spuriam datæ denominationis, manente valore numeri integri invariato.

RESOLUTIO

Datus numerus integer multiplicetur per datum denominatorem, erit productum numerator, cui, interposita lineola, subscribatur datus denominator. Q.E.F.

DEMONSTRATIO ALGEBRAICA.

Sit quantitas integra Ex. gr. a reducenda ad datum denominatorem b , erit per datam resolutionem fractio spuria — sed — a , per (§. 35.

$\frac{ab}{b}$ — $\frac{ab}{b}$ — a , per (§. 35.

& 102.) ergo. Q.E.D.

EXEM-

EXEMPLUM NUMERICUM.

Sit ex numero 4, facienda fractio spuria, quæ habeat denominatorem 6, igitur multiplicando 4 per 6: erit productum 24 numerator, cui subscriptus datus denominator 6, exhibebit fractionem spuriam

24

— equalē quoad valorem numero 4 integro.

6

COROLLARIUM.

124. Hinc liquet methodus reducendi numerum integrum ad datæ fractionis alicujus denominatorem; si nempe datus numerus integer multiplicetur per datum denominatorem, & producto addatur numerator fractionis datæ, ac ducta lineola subscribatur prior datæ fractionis denominator. Ex. gr. Sit numerus 3 reducendus ad-denominatorem fractionis —, erit multi-

²
plicando 3 per 5, productum 15, cui addendo numeratorem 2. efficitur summa 17, & huic sub-

scribendo denominatorem 5, erit fractio spuria —

17.
5

PROBLEMA VI.

125. PROP: Datam fractionem vulgo spuriam ad integra reducere.

RESOLUTIO.

Dividatur numerator per suum denominatorem, quotus erunt integri, vel cum, vel sine fractione vera remanente. Q.E.F.

Demonstratio algebraica patet; nam

$\frac{ab}{b}$

— a per (§. 35. & 102.) Q.E.D.

$\frac{ab}{b}$

EXEM-

ELEMENTA
EXEMPLUM NUMERICUM

Sic data fractio spuria $\frac{24}{6}$, igitur dividendo 24 per 6, erit quotus 4 numerus integer. Item sic fractio spuria $\frac{17}{5}$, itaque dividendo 17 per 5, erit quotus 3, cum remanente fractione vera $\frac{2}{5}$.

PROBLEMA VII.

126. PROP: Invenire, quid data quæcunque fractio valeat in data quavis certa specie,

Ex. gr. Si quæretur $\frac{3}{9}$ unius flor. Germ: in specie cruciferorum, vel nummorum, quot faciunt cruciferos, vel nummos?

RESOLUTIO.

Data species, in qua valor fractionis quæritur, multiplicetur per numeratorem datæ fractionis, factum dividatur per denominatorem ejusdem fractionis, & quotus dabit valorem fractionis quæsitum in data specie. Q. E. F. Demonstratio dabitur in parte ultimâ hujus.

EXEMPLUM NUMERICUM.

Ex. gr. Quæritur $\frac{3}{9}$ unius flor. Germ: quot faciunt cruciferos; igitur cum flor. Germ. habeat 60 xv. multiplicentur 60 per numeratorem 3, erit factum 180, hoc factum dividatur per denominatorem 9, & quotus emergens 20, erunt cruciferi, seu valor fractionis $\frac{3}{9}$ unius flor. Germ: in specie cruciferorum.

Item $\frac{3}{9}$ unius flor. Germ: in nummis, quid valent? igitur cum 120 nummi faciunt flor. Germ: multiplicentur 120 per 3, & factum 360, dividatur per 9, erit quotus 40, seu nummi, quos valet data fractio $\frac{3}{9}$.

Item: Quæritur Ex. gr. $\frac{24}{32}$ unius urnæ Transylvanica, quot faciunt mensuras? cum urna Transylvanica, habeat 8 mensur: multiplicentur 8 per 24 & factum 192, dividatur per 32, erit quotus 6, exhibens mensuras, quas valet data fractio $\frac{24}{32}$ unius urnæ Trans:

SCHOLION. I.

127. Problema hoc utilissimum, & in praxi summe necessarium est, quotiescunque certum quantum in datas partes distribuendum occurrit, quæ distributio, cum ope divisionis indagari debeat, ut (862. Ari:) dictum, plerumque autem quoto ex divisione orio adhibere soleat fractio, quæ indicat partem, vel partes aliquot unitatis, illius speciei, cujus erat dividendus, necessarium est ad æquam distributionem, ut sciatur, quid data fractio in specie illius unitatis valeat? res exemplo declaratur. Sint distribuendi 26 fl. Germ: in 3 pauperes, igitur ope divisionis Arithm: invenietur

quotus $\frac{2}{3}$ unius flor. Germ: dandi cuilibet pauperi: sed $\frac{2}{3}$ unius flor. Germ: ignorantur, ergo per hoc pro-

I
R.P. HOLL ELEM: MATH: TOM: I.

problema operando, ut habeatur valor $\frac{2}{3}$ unius flor.

Germ. Ex. gr. In nummis, multiplico 120 nummos (tot enim habet flor. Germ.) per numeratorem 2, & factum 240, divido per denominatorem 3, erit quotus 80 nummi, igitur ex 26 florenis, cuilibet pauperi obveniunt 8 flor. & 80 nummi.

SCHOLIUM II.

128. Ad hoc Problema rite tractandum necessariae sunt Tabulae Reductionum, in Parte III. Arith: adductae, ut sciatur in data quavis specie, quot unitates species major contineat ex specie minore, vide usum tabularum (§. 140. Arithm.)

CAPUT VII.

De quatuor Algorithmis fractionum.

PROBLEMA VIII.

129. PROP: Duas, vel plures fractiones heterogeneas (§. 114.) reducere ad fractiones homogeneas (§. 114.) seu ad eundem denominatorem, valore fractionum invariato.

RESOLUTIO

CASUS I. Si duae fractiones reducendae sint. Multiplicetur tam numerator, quam denominator primae fractionis, per denominatorem fractionis secundae, & vicissim tam numerator, quam denominator fractionis secundae, multiplicetur per denominatorem primae fractionis, erunt reductae ad eundem denominatorem valore fractionum invariato. Q.E.F.

Algebraicè, & Demonstrativè.

Sint reducendae fractiones $\frac{a}{b}$ & $\frac{c}{d}$, erunt per

da-

datam resolutionem reductae $\frac{a.d}{b.d}$ & $\frac{c.b}{d.b}$ seu $\frac{ad}{bd}$

$\frac{cb}{db}$, & habentes eundem denominatorem bd , sed

habent etiam valorem priorem, nam $\frac{ad}{cb} = \frac{a}{b}$

per (§. 117.) & $\frac{cb}{db} = \frac{c}{d}$ per eundem (§. 117.)

ergo. Q.E.F. & D.

EXEMPLUM NUMERICUM

Sint reducendae $\frac{3}{4}$ & $\frac{5}{7}$, erunt reductae per datam resolutionem, prima fractio $\frac{3 \cdot 7}{4 \cdot 7} = \frac{21}{28}$, & secunda $\frac{5 \cdot 4}{7 \cdot 4} = \frac{20}{28}$ seu prima $\frac{21}{28}$ secunda vero $\frac{20}{28}$, & hinc $\frac{21}{28}$ & altera $\frac{20}{28}$, per (§. 117.)

CASUS II. Si plures fractiones reducendae sint.

I. Numerator fractionis primae, multiplicetur per denominatorem secundae, hoc factum multiplicetur per denominatorem tertiae, productum hoc iterum multiplicetur per denominatorem quartae, & sic porro; erit productum ultimum numerator fractionis primae.

II, Numerator fractionis secundae multiplicetur per denominatorem primae, hoc factum per denominatorem tertiae, (nam per proprium denominatorem multiplicari non debet) productum

ductum hoc per denominatorem quartæ, &c.

III. Eodem modo reliquarum numeratores multiplicandi sunt per omnes denominatores aliarum fractionum, (NB. aliarum) manente videlicet proprio denominatore.

IV. Ut communis omnium denominator obtineatur, multiplicetur denominator fractionis primæ, per denominatorem secundæ, hoc factum per denominatorem tertiæ, productum hoc iterum per denominatorem quartæ, & ita porro; erit productum omnium denominatorum reductarum: hæc quatuor regulæ in sequente quinta regula universaliter continentur.

Regula universalis: Numerator fractionis reducendæ multiplicetur per denominatores aliarum fractionum, communis autem denominator, erit factum omnium denominatorum in se invicem ductorum. Q. E. F.

Algebraicæ, & Demonstrativæ.

Sint fractiones reducendæ.

Prima; $\frac{a}{b}$, secunda $\frac{c}{d}$, tertia $\frac{f}{g}$, quarta $\frac{m}{n}$

Erunt reductæ per datam Resolutionem.

adgn bogn bdfn bdgm.
Prima: $\frac{\text{adgn}}{\text{bdgn}}$, secunda $\frac{\text{bogn}}{\text{bdgn}}$, tertia $\frac{\text{bdfn}}{\text{bdgn}}$, quarta $\frac{\text{bdgm}}{\text{bdgn}}$

(sed per §. 117.) Prima $\frac{\text{adgn} \cdot \text{bdgn} \cdot \text{bdfn} \cdot \text{bdgm}}{\text{bdgn} \cdot \text{bdgn} \cdot \text{bdgn} \cdot \text{bdgn}}$ secunda $\frac{\text{bogn} \cdot \text{bdgn} \cdot \text{bdfn} \cdot \text{bdgm}}{\text{bdgn} \cdot \text{bdgn} \cdot \text{bdgn} \cdot \text{bdgn}}$
tertia $\frac{\text{bogn} \cdot \text{bdgn} \cdot \text{bdfn} \cdot \text{bdgm}}{\text{bdgn} \cdot \text{bdgn} \cdot \text{bdgn} \cdot \text{bdgn}}$ quarta $\frac{\text{bogn} \cdot \text{bdgn} \cdot \text{bdfn} \cdot \text{bdgm}}{\text{bdgn} \cdot \text{bdgn} \cdot \text{bdgn} \cdot \text{bdgn}}$ ergo.

EXEM-

EXEMPLUM NUMERICUM

Sint reducendæ; $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{6}{7}$,

Erit numerator primæ; 2. 5. 7. seu 10. 7 = 70.

secundæ; 4. 3. 7. seu 12. 7 = 84.

tertiæ; 6. 5. 3. seu 30. 3 = 90.

Communis denominator; 3. 5. 7. seu 15. 7 = 105

Igitur reductæ erunt

Prima; $\frac{70}{105}$, secunda $\frac{84}{105}$, tertia $\frac{90}{105}$.

SCHOLION I.

131. Vulgò, & usitatissimè plures fractiones ad eundem denominatorem reductæ, semel tantum describendo denominatorem communem exprimi solent, sic adductum prius exemplum algebraicum, ita expressum adgn, bogn, bdfn, bdgm

primitur $\frac{\text{adgn}}{\text{bdgn}}$ datum item exemplum numericum sic scribitur vulgò $\frac{70}{105}$, 84, 90.

quæ expressio, priore compendiosior, idem prorsus significat.

SCHOLION II.

132. Quandoque in Reductione ad eundem denominatorem datur locus compendiosior. Videlicet I. per (§. 117.) si unius fractionis denominator major, alterius fractionis denominatorem minorem exactè aliquoties contineat, tali casu, si minor denominator, simulque & illius numerator, multiplicetur per eum numerum, quoties minor in maiore continetur, manente illa altera fractione, habebantur fractiones

reductæ; Ex. gr. Sit Prima $\frac{4}{10}$, secunda $\frac{3}{5}$, quoniam

denominator secundæ 5, in denominatori primæ 10

bis continetur, multiplicetur fractionis secundæ $\frac{3}{5}$

nam numerator 3, quàm denominator 5 per 2, erit $\frac{6}{10}$

fractio secunda — sub eodem denominatore, sub quo

est prima — $\frac{4}{10}$

II. Locus est compendii per (§. 118.) quando per eum numerum, per quem denominator minor in maiore continetur, dividi potest exacte tam numerator, quàm denominator fractionis habentis maiorem denominatorem; manente illa altera fractione. Ex.

gr. Si prima, — secunda $\frac{3}{5}$, quoniam denominator 10

secundæ 5, bis continetur in denominatore 10, numerus vero 2 exacte dividit tam numeratorem fractionis primæ 4, quàm ejus denominatorem 10, igitur

dividendo per 2, erit fractio prima — sub eodem

denominatore, sub quo est secunda $\frac{3}{5}$; Quoniam verò

horum compendiorum rarior usus occurrat, hinc Tyroneus problema reductionum, utpote universale, frequentiori exercitio familiare fieri reddant oportet, cum fractiones heterogeneæ nec addi, nec subtrahi possint nisi prius ope problematis antecedentis homogeneæ efficiantur.

COROLLARIUM

133. Quod si inter duas, vel plures fractiones heterogeneas quærat, quænam illarum sit quo-

quoad valorem major, vel minor, ope hujus problematis reductionum, quæstio resolvitur; nam si datæ fractiones reducantur ad eundem denominatorem, illa erit quoad valorem major, cujus numerator major erit. Ex. gr. Si quæra-

tur inter datas fractiones $\frac{3}{4}$ & $\frac{6}{7}$, quænam illa-

rum sit majoris valoris, erunt reductæ per (§.

129.) Prima $\frac{3}{4} = \frac{21}{28}$, secunda $\frac{6}{7} = \frac{24}{28}$, & hinc

$\frac{6}{7} > \frac{3}{4}$, quia $\frac{24}{28} > \frac{21}{28}$ per (§. 113.)

DEFINITIO XXII.

134. Addere fractiones, est colligere valores partiales datarum omnium fractionum homogenearum in unam fractionem homogeneam, tanquam in unum totum, continens valorem omnium.

PROBLEMA IX.

135. PROP. Fractiones quasvis datas addere.

RESOLUTIO.

I. Si fractiones addendæ sint homogeneæ, id est, ejusdem denominationis, addantur numeratores. Summæ omnium numeratorum subscribatur denominator communis. Vide exempl. I. & II. Q. E. F.

II. Si fractiones sint heterogeneæ, reducantur prius ad homogeneas per (§. 129.) reductæ addantur per Reg. I. hujus. Vide exempl. III. & IV. Q. E. F.

DE

**ELEMENTA
DEMONSTRATIO.**

Valores partiales fractionum homogenearum habentur per solos numeratores (§. 113.) ergo fractio ejusdem denominationis, habens pro numeratore summam omnium numeratorum fractionum homogenearum, continet valores partiales omnium; jam verò per Resolutionem hujus, numerator fractionis ejusdem denominationis continet omnes numeratores datarum fractionum homogenearum, ergo continet valores partiales omnium, ergo per datam resolutionem habetur fractio homogenea tanquam totum, continens valorem omnium (§. 25 Arith:) ergo facta habetur additio fractionum. (§. 134.) Q. E. D.

EXEMPLUM I. ALGEBRAICUM.

Sint addenda $\frac{a}{b} \& \frac{c}{b}$, erit summa $\frac{a+c}{b}$

EXEMPLUM II. IN NUMERIS.

Sint addenda $\frac{3}{8} \& \frac{2}{8}$, erit summa $\frac{5}{8}$

EXEMPLUM III. ALGEBRAICUM

Sint addenda $\frac{a}{b} \& \frac{c}{d}$, erunt reducta $\frac{ad}{bd} \& \frac{cb}{bd}$ (§. 129)

$\& \text{ hinc addita } \frac{ad+cb}{bd}$, vel sine reductione simpliciter

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+cb}{bd}$$

EXEM-

EXEMPLUM IV. IN NUMERIS

Sint addenda $\frac{2}{3}, \frac{4}{5}, \frac{6}{7}$, erunt reducta per (§. 129)

$$\frac{2}{3} = \frac{40}{210}, \frac{4}{5} = \frac{168}{210}, \frac{6}{7} = \frac{180}{210}$$

$\& \text{ hinc summa } \frac{348}{210}$, qua per (§. 125)

$$\frac{348}{210} = \frac{105}{105} \frac{105}{105} \frac{105}{105}$$

dat integra $2 \frac{105}{105}$

SCHOLIUM.

136. Quoniam ex additione fractionum plerumque emergit fractio vel o s u r r a, hac ad integrum reducitur p r (§. 125) quemadmodum in exemplo IV. factum est. Examen verò additionis, fit per subtractionem.

DEFINITIO XXIII.

137. Subtrahere fractionem, est invenire fractionem, quæ contineat differentiam valoris duarum fractionum homogenearum valore inaequalium.

PROBLEMA X.

138. PROP: Fractionem valore minorem à fractione majoris valoris subtrahere.

RESOLUTIO.

I. Si fractiones sint homogeneae; numerator minor subtrahatur à numeratore majore, & residuo subscribatur denominator communis. Vide exempli I. & II. Q. E. F.

II. Si fractiones sint heterogeneae; reducantur prius ad homogeneas per (§. 129.) reducta subtrahantur per Reg: I hujus. Vide exempli III. & IV. Q. E. F.

DEMONSTRATIO

Valores fractionum homogenearum habentur

K

tur per solos numeratores (§. 213.) ergo fractio homogenea, habens pro numeratore differentiam, seu residuum duorum numeratorum, continet differentiam valoris duarum fractionum homogenearum; sed per datam Resolutionem, fractio homogenea exhibens residuum, continet differentiam numeratorum, ergo continet differentiam valoris earundem fractionum ergo facta habetur subtractio fractionum (§. 137.) Q. E. D.

EXEMPLUM I. ALGEBRAICUM

Sit à fractione $\frac{a}{b}$, subtrahenda fractio $\frac{c}{b}$ erit differentia. $\frac{a-c}{b}$

EXEMPLUM II. NUMERICUM

Sit à fractione $\frac{5}{8}$, subtrahenda fractio $\frac{3}{8}$ erit differentia $\frac{2}{8}$

EXEMPLUM III. ALGEBRAICUM

Sit à fractione $\frac{a}{b}$, subtrahenda $\frac{c}{d}$, erunt reducta ad bd $\frac{ad}{bd}$ $\frac{bc}{bd}$ $\frac{ad-bc}{bd}$ per (§. 129) $\frac{ad-bc}{bd}$ & hinc differentia $\frac{ad-bc}{bd}$ vel est

am sine reductione $\frac{a}{b} - \frac{c}{d}$

EXEMPLUM IV. NUMERICUM.

Sit à fractione $\frac{6}{7}$, subtrahenda $\frac{2}{3}$, erunt reducta per (§. 129) $\frac{18}{21} - \frac{14}{21} = \frac{4}{21}$ & hinc differentia seu residuum $\frac{4}{21}$

139. Examen subtractionis fit, si numerator restata fractionis, addatur ad numeratorem fractionis subtrahenda, prodire debet numerator fractionis, à qua subtractio facta est; sic si numerator differentia

$\frac{2}{8}$, addatur ad numeratorem $\frac{3}{8}$, erit fractio $\frac{5}{8}$ ipsissima, à qua subtractio facta est. Contrà examen additionis fractionum fit per subtractionem, sic in dato Exemplo II. additionis fractionum (§. 135) si à summa

$\frac{5}{8}$, subtrahatur $\frac{3}{8}$, prodire debet $\frac{2}{8}$ & vicissim.

PROBLEMA XI.

140. PROP: Fractiones per fractionem multiplicare,

RESOLUTIO:

I. Multiplicentur numeratores inter se, & factum numeratorum erit numerator novae fractionis Producti.

II. Multiplicentur quoque denominatores inter se, & factum denominatorum erit denominator novae fractionis Producti. Vide exemp: I. & II. Q. E. F.

SCHOLIUM.

141. Demonstratio dabitur sequenti problemate, alia verò magis ordinata dabitur ad calcem Partis ultimae hujus.

EXEMPLUM I. ALGEBRAICUM.

Sint datae fractiones $\frac{a}{b}$ & $\frac{c}{d}$ erit productum $\frac{ac}{bd}$

K 2

EXEM-

ELEMENTA
EXEMPLUM II. NUMERICUM.

Sint multiplicanda inter se $\frac{4}{5}$ & $\frac{6}{7}$, erit pro-
 $\frac{4 \cdot 6}{5 \cdot 7} = \frac{24}{35}$
 Sum $\frac{24}{35}$ seu $\frac{24}{35}$.

SCHOLION.

142. Illud à Tyronibus observetur dignum, quod fractio nova, producta ex multiplicatione fractionum, (ut videre est in exemplo II.) quoad valorem longe minor sit, quam valores singulæ fractionum, ex quibus per multiplicationem fractio nova orta est, cum tamen in multiplicatione integrorum factum longe majus producat, quam ipsi factores sint. Ratio itaque hæc est: Quod si quantitas aliqua per 1 multiplicetur, ipsa quantitas invariata semel ponitur, ut clarum est; igitur si quantitas multiplicanda sit per aliquid minus unitate, id est per fractionem, minus necessario poni debet, quam sit ipse multiplicandus, igitur pars tantum multiplicandi poni debet pro facto & hinc productum minus evadit, quam factores singillatim accepti.

PROBLEMA XII.

143. PROP: Fractionem per fractionem dividere.

RESOLUTIO.

I. Fractionis dividende numerator multiplicetur, per denominatorem fractionis divisoris, erit factum numerator fractionis novæ.

II. Fractionis dividende denominator multiplicetur per numeratorem fractionis divisoris, erit factum denominator fractionis novæ exhibentis quorum. Vide exempli I. & II. Q. E. F.

EXEM-

EXEMPLUM I. ALGEBRAICUM

Sit divisor $\frac{a}{b}$, dividenda $\frac{c}{d}$, erit quotus $\frac{bc}{ad}$

EXEMPLUM II. NUMERICUM.

Sit divisor $\frac{4}{5}$, dividenda fractio sit $\frac{24}{35}$, erit quotus $\frac{120}{35} = \frac{12}{7}$ seu $\frac{12}{7}$, id est $\frac{12}{7}$ per (§. 121.)

35. 4 $\frac{140}{14}$ 7
 DEMONSTRATIO.

Quotus multiplicatus per divisorem æquatur dividendo per (§. 61. Arith.) igitur quotus $\frac{bc}{ad}$ debet æquari dividendo $\frac{c}{d}$ sed $\frac{bc}{ad} = \frac{c}{d}$ per (§. 140.) & $\frac{bc}{ad} = \frac{c}{d}$ per (§. 35. & 117.) ergo. Q. E. D.

Demonstratur quoque resolutio prioris Problemæ XI. de multiplicatione fractionum. Si factum, sive productum dividatur per unum factorem, pro quo prode debet alter factorum, per (§. 57.

Arith.) igitur (in exempli I. problemæ XI.) productum $\frac{ac}{bd}$ si dividatur per unum ex suis factoribus $\frac{a}{b}$ prode debet alter $\frac{c}{d}$, sed $\frac{ac}{bd} = \frac{c}{d}$ per (§. 143.) & $\frac{ac}{bd} = \frac{c}{d}$ per (§. 35. & 117.) ergo. Q. E. D. bdc b

SCHOLION.

144. Demonstrationes hæc binæ, si in exemplis

K 3

uu-

numericis adductis exhibeantur, veritatem ad oculum declarant, simulque examen seu probam multiplicationis per divisionem, & divisionis per multiplicationem edocent.

SCHOLION II.

145. In gratiam Tyronum resolutio-
nem problematis hujus de divisione fra-
ctionum, sub hac schemate exhibeo: ubi $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d}$
ductus linearum, datas supra regulas
manifeste exhibent, nempe: quod c nu-
merator dividendi multiplicari debeat per
b denominatorem divisoris, & denomina-
tor d, quod multiplicari debeat per a numeratorem

divisoris, ut prodeat quotus —, Aliter: Invertatur
ad

divisor, id est, loco numeratoris scribatur denomina-
tor proprius, & loco denominatoris scribatur nume-
rator, deinde fiat multiplicatio numeratorum inter
se, itemque denominatorum, ut (§. 140.) dictum,

erit nova fractio quotus, Ex. gr. sit dividendus $\frac{a}{b}$,
divisor, erit divisor inversus $\frac{b}{a}$, & hinc $\frac{a}{b} \times \frac{b}{a} = 1$
ad

Que praxes in idem problema residunt.

SCHOLION III.

146. Quotus, ex divisione fractionum ortus, ma-
jor quoad valorem emergit ipso dividendo, imò saepe
ad fractionem vulgo spuriam assurgit, contra ac in di-
visione integrorum fieri debere docuimus. Cujus ra-
tio est, quod, quo minor sit divisor (etiam in inte-
gris)

gris) eo major emergat quotus, manente eodem di-
videndo; sic si Ex. gr. 18. dividatur per 2. quotus
erit 9, è contra si dividatur per 6 quotus erit 3.
9. Igitur cum divisor in fractionibus, sit minor u-
nitate, quotus prodire debet major, quam sit dividen-
dus.

SCHOLION IV.

147. Quoniam in praxi arithmetica fractiones
cum numeris integris frequenter tractanda occur-
rant, plerique Arithmeticorum novas regulas inte-
grorum cum fractis fuisse proponere solent; nos labori
Tyronum parcentes, simulque studentes commendio
doctrinæ, artem numeros integros cum fractis tra-
ctandi non aliam proponimus, atque eam, quam de
fractionibus hucusque exposuimus; hinc unico pro-
blemate universali algorithmos omnes numerorum
fractionum cum integris complectemur, sit igitur.

PROBLEMA XIII. & UNIVERSALE.

148. PROP: Algorithmos omnes fractio-
rum cum integris tractare, id est, Addere,
Subtrahere, Multiplicare, & Dividere integra
cum fractis.

RESOLUTIO.

I. Quantitas integra exprimitur per modum
fractionis vulgo spuria, quod sit subscribendo
unitatem loco denominatoris.

II. Sub hac ficta imagine fractionis tractetur
tanquam fractio vera secundum omnia pro-
blemata fractionum hucusque tradita. Vide ex-
empla subjecta. Q. E. F.

DEMONSTRATIO.

Regula I, ostenditur. Data expressio fractionis,
est expressio divisionis (§. 108.) dividendus
autem divisus per unitatem manet invariatus
(§. 77. Arith.) ergo expressio hæc quantitatis
inte-

integræ per fractionem vulgo spuriam non im-
mutat valorem integri. Quid erat primum.

Regula II. Fractio vulgo spuria habet imagi-
nem fractionis, ergo tractari potest, per modum
fractionis, ut constat ex tota doctrina fractionum.

EXEMP: ADDITIONIS ALGEBR:

Sit quantitas a addenda in unam fractionem cum

$$\frac{c}{b}, \text{ erit per datam Resolut: } \frac{a}{1} \text{ addenda ad } \frac{c}{b}, \text{ \&}$$

binc addenda per (§. 135.) igitur reducta erunt per

$$\frac{ab}{ab} \frac{c}{b} \text{ \& } \frac{ab+c}{b} \text{ per (§. 129.) } \text{ \& } \frac{ab+c}{b}, \text{ quarum summa est } \frac{ab+c}{b} \text{ per (§. 135.)}$$

EXEMPLUM NUMERICUM.

Sit numerus 4 addendus cum $\frac{2}{3}$, in unam fra-
tionem, erit numerus 4 sub sista imagine fractionis—

$$\frac{4}{1} \frac{2}{3} \text{ igitur addenda sunt } \frac{4}{1} \text{ ad } \frac{2}{3} \text{ per (§. 135.) quare re-}$$

$$\text{ducta erunt } \frac{12}{12} \frac{2}{3} \text{ per (§. 129.) \& addita in unam}$$

$$\text{fractione } \frac{14}{3} \text{ per (§. 135.)}$$

EXEMPL: SUBTRACTIONIS ALGEB:

Sit ex quantitate a subtrahenda fractio—, ergo ex—

$$\frac{c}{b} \text{ subtrahi debet } \frac{a}{1} \text{ per (§. 138.) igitur reducta erunt}$$

$$\frac{ab}{ab} \frac{c}{b} \text{ \& } \frac{ab-c}{ab-c} \text{ per (§. 138.)}$$

$$\text{ \& binc differentia } \frac{ab-c}{b} \text{ per (§. 138.)}$$

EXEMP:

EXEMPLUM NUMERICUM.

Sit à numero 4 subtrahenda fractio $\frac{2}{3}$ ergo ab $\frac{4}{1}$

$$\text{subtrahi debet } \frac{2}{3} \text{ per (§. 138.) igitur reducta erunt}$$

$$\frac{12}{12} \frac{2}{3} \text{ \& binc differentia } \frac{10}{3} \text{ per (§. 138.)}$$

EXEMPLUM MULTIP: ALGEBR.

Sit quantitas a multiplicanda per $\frac{c}{b}$, ergo $\frac{a}{1}$ mul-

$$\text{tiplicari debet per } \frac{c}{b} \text{ juxta (§. 140.) erit igitur pro-}$$

$$\text{ductum } \frac{ac}{b} \text{ per eundem (§. 140.)}$$

EXEMPLUM NUMERICUM.

Sit numerus 4 multiplicandus per $\frac{2}{3}$ ergo $\frac{4}{1}$ mul-

$$\text{tiplicari debet per } \frac{2}{3} \text{ juxta (§. 140.) erit igitur pro-}$$

$$\text{ductum } \frac{8}{3} \text{ per eundem (§. 140.)}$$

EXEMPLUM DIVISIONIS ALGEBR:

Sit quantitas a dividenda per divisorem $\frac{c}{b}$, erit di-

$$\text{videnda } \frac{a}{1} \text{ \& divisor } \frac{c}{b} \text{ igitur per (§. 143.) quoruz}$$

$$\frac{ab}{ab} \frac{1}{1} \frac{b}{b}$$

EXEMPLUM NUMERICUM.

Sit numerus 4 dividendus per divisorem $\frac{2}{3}$, erit

$$\frac{4}{1} \text{ divi-}$$

$\begin{array}{c} 4 \\ \text{dividendus} \end{array}$ — $\begin{array}{c} 2 \\ \text{divisor} \end{array}$ — igitur per (§. 143) quot. — $\begin{array}{c} 12 \\ \text{quot.} \end{array}$

COROLLARIUM.

149. Eadem methodo procedendum est, si numerus complexus ex fracto & integro tractari debeat cum alio numero complexo itidem ex fracto & integro, aut numerus complexus ex fracto & integro, cum fracto tantum; nam subscribendo integris unitatem, tractentur ut fractiones. Idem est in literalibus.

SCHOLIUM.

150. In adductis hucusque Theor. maxibus, ac problematibus fundamentalibus tota fractionum vulgarij, & simplicium doctrina continetur, de ceteris fractionibus potentijs, ut sunt fractiones quadratica, cubica, &c. agitur in Parte II. hujus; de eorundem progressionibus, & ceteris affectionibus in Parte IV. tractabitur. Ne verò aliquid à nobis desideretur praestitum fuisse, quod ab alijs quoque pertractatur, bina problemata, non quia necessaria, sed quod sua utilitate in certis circumstantiis non careant, adferemus.

DEFINITIO XXIV.

151. Communis mensura, simpliciter, dicitur quantitas, major unitate, quæ alias binas, vel plures quantitates exacte metitur, quod per divisionem exactam innotescit; sic communis mensura respectu numerorum 8, & 12, est numerus 2, item numerus 4, quia per hos tam 8, quam 12 exacte dividitur; Hæc communis mensura vocatur etiam *Pars aliquota communis*.

DEFINITIO XXV.

152. Communis mensura (cum addito) maxima, dicitur quantitas; quæ, metiendo plures quan-

quantitates inæquales, est mensura maxima respectu quantitatis inter datas minimæ, prout cum alijs conjunctæ. Ita numerorum 8 & 12 communis mensura maxima est numerus 4, quia 4 respectu numeri 8 prout conjuncti cum numero 12, est divisor maximus, qui numerum 8 & 12 simul exacte dividit.

COROLLARIUM.

153. Cum duorum, vel plurium numerorum communis mensura maxima, sit divisor, qui respectu numeri inter datos minimi, est maximus, sequitur, quod si numerus inter datos minimus sit divisor respectu reliquorum, erit ipse numerus inter datos minimus communis mensura omnium maxima, quæ in dato casu haberi potest. Ex. gr. Sint numeri 8 & 16, cum 8 sit mensura communis, & respectu sui, & respectu numeri 16 cumque respectu sui sit maxima, erit etiam respectu numeri 16 prout conjuncti cum 8, mensura maxima, Ita ut ea major in dato casu haberi non possit, cum divisor respectu dividendi major esse nequit, quam sit ipse dividendus, per (§. 62. Arith.) ergo eidem æqualis, omnium maximus est.

PROBLEMA XIV.

154. PROP: Invenire communem mensuram maximam, seu divisorem communem maximum, per quem exacte dividendo tam numeratorem, quam denominatorem fractionis datæ, fractio reducitur ad terminos minimos possibiles.

RESOLUTIO

I. Denominator dividatur per Numeratorem, quod si ex hac divisione nihil remaneat, erit ipse numerator, communis mensura maxima, per

per quam divisus tam numerator, quam denominator data fractionis, producit novam fractionem in terminis minimis. *Vide exempl. I.*

II. Si ex prima divisione denominatoris per numeratorem suum, relinquatur Residuum aliquod, sic procedendum erit; Numerator (qui fuit divisor) fiat *dividendus*, & Residuum fiat *divisor*, qui, si exacte dividat numeratorem sine residuo, erit hic communis mensura maxima. *Vide exempl. II.*

III. Quod si ex secunda divisione numeratoris per residuum, iterum emergat residuum, cum ex secundo *divisore* (qui fuit primum residuum) fiat iterum *dividendus*, & secundum residuum fiat *divisor*; atque alternativa methodo tandem procedendum est, donec inveniatur aliquis divisor major unitate, qui suum dividendum exacte sine aliquo residuo dividat, erit hic ultimus divisor communis mensura maxima respectu data fractionis, ut supra dictum.

IV. Quod si hac methodo procedendo semper aliquod residuum emergat, donec tandem ad divisorem perveniatur, qui sit *unitas*, cum unitas non dividat per (§. 77. Arith.) signum est, datam fractionem ad minores terminos irreducibilem esse. *Vide exemplum III.*

EXEMPLUM I. & EXEMPLUM II.

Sit fractio reducenda — $\begin{array}{r} 36 \div 144 \\ 144 \overline{) 36} \\ \text{erit} \end{array}$ Dividend: 144) quors. 4 Divisor 36 fact: sub: 144) Residuum 000	Sit reducenda fractio — $\begin{array}{r} 108 \div 144 \\ 144 \overline{) 108} \\ \text{erit} \end{array}$ Dividend: 144) quors. 1 Divisor 108 Residuum 36 Secundo.
---	--

Igt.

Igitur dividendo tam Numeratorem 36, quam denominatorem 144 per § Dividend: 108) quors. 3
 § Divisor 36)
 § Resid: 108)
 1 Igitur divisor maximus
 36. erit fractio — inter-
 4 gram respectu numeratoris
 § 108, quam denominatoris
 36 § 144 est 36, qui producit
 min: minimis valore — § fractione in terminis mi-
 144 § 3 108
 § quimis — a qualem data —
 § 4 144

EXEMPLUM III.

88
 Sit reducenda —
 erit 105 secundo tertio quarto
 Divid: 105) divid: 88) divid: 17) divid: 3)
 Divis: 88) 1 divis: 17) 5 divis: 3) 5 divis: 2) 1
 Resid: 17 fa: sub: 85 fa: sub: 15 Resid: 1
 Resid: 3 Resid: 2

Cum ultimus divisor sit unitas, fractio —
 est irreducibilis- 105

Algebraicæ.

In fractione algebraica cum omnes factores pate-
 ant, Ex. gr. — $\frac{abcd}{acdf}$ — delesis per (§. 35 & 36.) utrius-
 que terminis homogeneis acd; erit in terminis mi-
 nimis prior fractio — $\frac{b}{f}$

Lg

Dæ

**ELEMENTA
DEMONSTRATIO.**

Regula I. patet ex (§. 121.) Regula II. demonstratur per gradationem retrogradam; nam divisor secundus 36, seipsum seu 36 exacte dividit, sed idem etiam exacte dividit divisorem primum 108, ergo 36 exacte dividit quantitatem $36 \div 108$, sed $36 \div 108 = 144$ per (§. 43. Arith.) ergo 36 est communis mensura, & quidem maxima respectu numerorum 108. & 144. Q. E. D. Eodem modo Reg. III. demonstratur. Reg. IV. demonstratione non eget, cum unitas, ad quam devenitur, non dividat, per (§. 77. Arith.)

SCHOLIUM

155. In hujusmodi divisione, quorum nulla habetur ratio. Caterum molesta hac initio Tyronibus praxis, suppleri potest per methodum aliam tentativam; videlicet: si tam numerator, quam denominator finales numeros habeant pares, Ex. gr. 2, 4, 6, 8. Diviso utriusque exacta tentanda per numeros pares. Si verò finalis unius sit par, alterius impar, tentanda erit divisio exacta per imparem, eodem modo si uterque sit impar.

DEFINITIO XXVI.

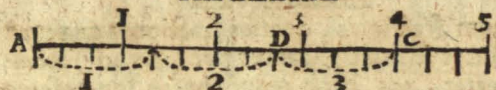
156. Fractio fractionis, vocatur fractio, quæ est pars, vel partes, alterius alicujus fractionis, seu est pars, vel partes, alicujus partis per

modum unius consideratæ. Ex. gr. $\frac{2}{3} \div \frac{4}{5}$

SCHOLIUM

157. Claritatis gratiâ; sit linea AB primum divisa in 5 partes.

Sic



Sicquæ fractio de tota linea $\frac{4}{5}$, quæ est Pars AC,

Porro intelligatur qualibet pars quinta de AB subdivisa in tres particulas, vide figuram. Sic jam de hac

ipsa parte AC indicanda pars AD, erit hæc $\frac{2}{3} \div \frac{4}{5}$ id est fractio $\frac{2}{3}$ est fractio fractionis $\frac{4}{5}$

PROBLEMA XV.

158. PROP: Fractionem fractionis ad fractionem simplicem reducere.

RESOLUTIO.

Multiplisetur, per (§. 140.) numerator per numeratorem, & denominator per denominatorem illius fractionis, cujus hæc est fractio.

Q. E. F.

EXEMPLUM ALGEBRAICUM

Sit fractio $\frac{a}{ac}$ de fractione $\frac{c}{bd}$ erit ad simplicem reducta $\frac{bd}{ac}$ per (§. 140.)

EXEMPLUM NUMERICUM

Sit fractio $\frac{2}{8}$ de fractione $\frac{4}{3}$ erit reducta ad simplicem $\frac{3}{5}$. Resolutio hæc jam demonstrata est (§. 143)

15

COROLLARIUM

159. Liqueat itaque primo; toties fieri fractio-

tionem fractionis, quoties fractiones quæcun-
que inter se multiplicantur per (§. 140.) *Secun-*
do: patet, per hanc reductionem innotescere
valorem fractionis de fractione, ut clarum fit
ex contemplatione lineæ AB in Scholio (§.

157.) adductæ. Nam AD, de AC, seu $\frac{2}{8} - \frac{4}{3} = \frac{5}{14}$
faciunt revera de tota lineæ AB $\frac{5}{14}$. *Tertio* colli-

gitur, si fractio fractionis addenda, subtrahenda sit ab aliis fractionibus, per hoc problema prius ad simplicem esse reducendam.

SCHOLION.

160. De aliis fractionum proprietatibus agitur
suis locis.

FINIS PARTIS I.



ELE.

ELEMENTORUM ALGEBRÆ PARS II.

De Quantitatum Potentiis, & earundem Radicibus

CAPUT I.

De Quantitatum Potentiis, & Radicibus in genere.
DEFINITIO I.

161. *P*roductum, seu factum, quod oritur
si quantitas quævis per seipsam se-
mel, vel sæpius multiplicetur, voca-
tur Potentia, Potestas, vel Dignitas. Ex. gr. Si *a*
per *a* multiplicetur, erit factum *aa*, Potentia Po-
testas, vel Dignitas; idem est in numeris sic 3. 3.
seu 9, est Potentia &c.

DEFINITIO II

162. Multiplicatio quantitatis per seipsam,
vocatur Elevatio, vel Eductio quantitatis ad Po-
tentiam &c. Quantitas verò illa, quæ elevatur,
vel elevata est ad potentiam aliquam, vocatur
Radix, vel Latus Potentiæ; aut etiam prima
Potentia. Sic *a* est radix de *aa*, vel *aaa*, item 3 est
radix de 3. 3 seu de 9.

COROLLARIUM

163. Omnis itaque quantitas secundum se
considerata, & ex quâ per elevationem, vel
fieri potest, vel facta est potentia, vocari potest
Radix.

SCHOLION I.

164. Ut Tyrones generum dignitatum tam in
quantitatibus integris, quàm fractis recte intelligant,
sequentem Tabulam contemplandam subjicio, quæ quan-

M

ritæ-

R. P. HÖLL ELEM: MATH: TOM: I.

itatis monomia elevationem ad aliquot dignitatis gradus declarat. Sic igitur.

IN INTEGRIS.

Algebraicè. Gradus Potentiæ. Numericè.

$$a = 1 \quad \text{Nulla Potentia.} \quad 1 = 1$$

$$a = a^1 \quad \text{Radix, vel prima Potent:} \quad 3 = 3$$

$$aa = a^2 \quad \text{Quadratum, vel secunda Pot.} \quad 3 \cdot 3 = 9$$

$$aaa = a^3 \quad \text{Cubus, vel tertia Potent:} \quad 3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$$

$$aaaa = a^4 \quad \text{quarta Potent.} \quad 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$$

Et c. Et c. in infinitum.

Universaliter: a^m significat omnem potentiam, quam denotat exponens m .

IN FRACTIS.

Algebraicè. Gradus Potentiæ. Numericè.

$$\frac{a}{b} = \frac{a^1}{b^1} \quad \text{Radix, seu prima Potent:} \quad \frac{3}{4}$$

$$\frac{aa}{bb} = \frac{a^2}{b^2} \quad \text{Quadratum, seu secunda Pot:} \quad \frac{3 \cdot 3}{4 \cdot 4} = \frac{9}{16}$$

$$\frac{aaa}{bbb} = \frac{a^3}{b^3} \quad \text{Cubus, seu tertia Potent:} \quad \frac{3 \cdot 3 \cdot 3}{4 \cdot 4 \cdot 4} = \frac{27}{64}$$

$$\frac{aaaa}{bbbb} = \frac{a^4}{b^4} \quad \text{quarta Potent.} \quad \frac{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}{4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4} = \frac{81}{256}$$

$$\frac{aaaaa}{bbbbb} = \frac{a^5}{b^5} \quad \text{quinta Potent.} \quad \frac{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}{4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4} = \frac{243}{1024}$$

$$\frac{aaaaaa}{bbbbbb} = \frac{a^6}{b^6} \quad \text{sexta Potent.} \quad \frac{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}{4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4} = \frac{729}{4096}$$

$$\frac{aaaaaa}{bbbbb} = \frac{a^6}{b^5} \quad \text{sexta Potent.} \quad \frac{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}{4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4} = \frac{2187}{1024}$$

$$\frac{aaaaaa}{bbbbbb} = \frac{a^6}{b^6} \quad \text{sexta Potent.} \quad \frac{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}{4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4} = \frac{729}{4096}$$

$$\frac{aaaaaa}{bbbbbb} = \frac{a^6}{b^6} \quad \text{sexta Potent.} \quad \frac{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}{4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4} = \frac{729}{4096}$$

$$\frac{aaaaaa}{bbbbbb} = \frac{a^6}{b^6} \quad \text{sexta Potent.} \quad \frac{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}{4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4} = \frac{729}{4096}$$

$$\frac{aaaaaa}{bbbbbb} = \frac{a^6}{b^6} \quad \text{sexta Potent.} \quad \frac{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}{4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4} = \frac{729}{4096}$$

$$\frac{aaaaaa}{bbbbbb} = \frac{a^6}{b^6} \quad \text{sexta Potent.} \quad \frac{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}{4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4} = \frac{729}{4096}$$

SCHOLIUM III.

165. Ex attenta hujus tabulæ contemplatione sequentia Corollaria deducuntur: I. Exponentes accuratè indicare gradum data potentia, sic a^2 significat secundam Potentiam, seu Quadratum; a^3 exprimit Cubum, seu tertiam Potentiam; a^4 , quartam, a^5 quintam Potentiam, & ita porro. II. Quadratum aa , seu

seu a^2 generari, si radix per seipsam semel multiplicetur; Cubum verò aaa , vel a^3 generari, si Quadratum aa iterum per a , seu per radicem suam multiplicetur; & ita porro: III. Ad hoc, ut fracti ad dignitatem evebantur, opus esse, ut tam numeratores, quam denominatores eleventur.

SCHOLIUM III.

166. Eodem modo per exponentes exprimuntur gradus dignitatis, seu potentia quantitarum, binomialium, vel polynomialium; sic $(a+b)^2$ vel a^2+b^2 significat totam quantitatem $a+b$ esse elevatam ad secundam potentiam, seu ad quadratum; item $(a+b)^3$, vel a^3+b^3 significat cubum seu tertiam potentiam, & ita porro. Idem est in numeris; sic $(3+4)^2$ est quadratum, 3^2+4^2 significat cubum; ut ex doctrina exponentium (§. 50.) data clarum est.

SCHOLIUM IV.

167. Nomina, & signa peculiariora graduum dignitatis, quibus Arabes, & antiquiores Mathematici usque sunt: Ex. gr. Zensus, vel zensi-zensus, aut surdesolidus, quadrato-cubus, & cetera heteroclyta, omittenda potius duxi, quàm Tyronum memoriam, oboleris, & inter Recentiores abolitis nominibus, inutiliter onerare, quorum catalogi, quibus legendi animus est, in comentariis antiquiorum non sive radice passim videri possunt.

HYPOTHESIS I.

168. Quoniam signum Radicale est $\sqrt{\quad}$ per (§. 38.) Numeri, vel literæ huic signo supra scripti, sunt Exponentes, quibus indicatur gradus potentia, cujus hæc est radix. Ex. gr. $\sqrt{\quad}$, vel simpliciter sine exponente $\sqrt{\quad}$, indicat radicem

quadratam, seu secundæ potentia. Sic $\sqrt{\quad}$ indicat radicem cubicam seu tertiæ potentia, & $\sqrt[6]{\quad}$ radicem quintæ potentia, aut universaliter: $\sqrt[n]{\quad}$ radicem cujuscunque potentia.

SCHOLION I.

169. Itaque $\sqrt{aa}$, vel $\sqrt{aa}$, aut $\sqrt{a^2}$ significat radicem quadratam ex aa , quæ cum sit a per (§. 164) erit $\sqrt{aa}$, vel $\sqrt{aa} = a$, ita $\sqrt{xx} = x$, & $\sqrt{2abb} = ab$ &c. item $\sqrt[3]{aaa}$, vel $\sqrt[3]{a^3} = a$, & universaliter $\sqrt[n]{a^n} = a$, eodem modo in fractis $\sqrt{\frac{aa}{bb}} = \frac{a}{b}$, &

$$\sqrt{\frac{a^3}{b^3}} = \frac{a}{b}, \text{ aut } \sqrt{\frac{a^n}{b^n}} = \frac{a}{b} \text{ \&c.}$$

SCHOLION II.

170. Eodem modo in polynomiis. $\sqrt{(a+b)^2}$ vel $\sqrt{a^2+b^2}$, significat radicem quadratam de $(a+b)^2$, quæ est $a+b$, item $\sqrt[3]{a^3+b^3}$ denotat radicem cubicam &c. Notent Tyrones quod signum radicale $\sqrt{\quad}$, afficiat quantitatem sibi ad dexteram scriptam, sic in hac, $ab\sqrt{aa}$, vel $2\sqrt{ac}$, signum $\sqrt{\quad}$ non afficit ab , vel 2 , sed tantum aa , vel ac , est tamen quantitas anteposita signo $\sqrt{\quad}$ coefficientens, sic $2\sqrt{aa}$ significat $\sqrt{aa} + \sqrt{aa}$.

SCHOLION III.

171. Sunt quæ Hypothesem expressionis radicalis per exponentes, non signo $\sqrt{\quad}$ superscribendo exponen-

ponentem, sed ad laus dexterum, interpositis inter exponentem, & dignitatem duobus punctis exprimunt.

sic Ex. gr. loco hujus $\sqrt[3]{ab^4}$, scribunt $\sqrt[3]{3:ab^4}$ vel loco hujus $\sqrt[4]{a^4+b^4}$, ponunt $\sqrt[4]{4:a^4+b^4}$, verum etsi hujusmodi expressio versatæ jam in Algebra nihil obrurber, Tyronibus tamen molesta; & perturbata accidit, atque hinc nos ea non utemur.

DEFINITIO III.

172. Radix rationalis, aut vera, dicitur illa, quæ numeris exacte exprimi potest; sic numerus 3 (qui est $\sqrt[2]{9}$) est rationalis, quia $3 \cdot 3 = 9$, ita quoque $\sqrt[3]{8}$, quæ est 2, est rationalis, quia $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$.

SCHOLION.

173. Hinc Radix irrationalis, vel furda appellatur, quæ numero exacte exprimi non potest, licet in lineis geometricis dari queat; sic furda, vel irra-

tionalis est $\sqrt[2]{28}$; quia nullus numerus per seipsum semel multiplicatus producere potest 28; nam $5 \cdot 5 = 25 < 28$, & $6 \cdot 6 = 36 > 28$. Sic furda est $\sqrt[3]{34}$ nam $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27 < 34$ & $4 \cdot 4 \cdot 4 = 64 > 34$.

DEFINITIO IV.

174. Radix Imaginaria, vel Impossibilis illa dicitur, quæ datur in potentia negativa, habente exponentem numerum parem 2, 4, 6, 8 &c.

sic $\sqrt{-a^2}$, vel $\sqrt{-4}$ imaginaria est, & impossibilis.

SCHOLION I.

175. Radices hujusmodi dicuntur impossibiles, quod

quod nec lineis, nec numeris exprimi possunt, propterea, quod nulla quantitas per seipsam, adeoque sub eodem etiam signo multiplicata producere potest quantitatē negativā affectū exponente, qui sit numerus par. Sic impossibilis est $\sqrt{-a^2}$, quia a^2 dat $\pm a^2$ & $-a^2$ dat etiam $\pm a^2$, per (§. 86.) ergo $-a^2$ produci non potest ex quantitate multiplicata per seipsam sub eodem signo; item impossi-

bilis est $\sqrt{-4}$, quia tam ± 2 quā -2 per seipsum multiplicatum dat ± 4 , per (§. 86.) dicitur autem Imaginaria propterea, quia solum imaginariōe nostra concipi potest, comparativē nempe ad positivā, cui negativē opponitur, eo prorsus modo, quo impossibilia concipere solemus. Neque tamen suā utilitate carent hę radices imaginarię, nam præterquam quod in *Analyse* numerorum indicent impossibilitatem Problematis, in *Geometria* flexus, & curvaturas linearum demonstrant.

SCHOLION II.

176. In potentia itaque negativa habente exponentem numerum imparem, 3, 5, 7 &c. radix non est imaginaria, aut impossibilis, sed vera, est negativa.

Sic $\sqrt[3]{-a^3}$ est possibilis, & vera, est enim $-a$, nam $(-a)^3 = -a^3$, factum dat $-aaa$ seu $-a^3$, item $\sqrt[3]{-64}$ est -4 , quia $(-4)^3 = -64$ per (§. 86.)

CAPUT II.

De extractione Radicum, quarumvis.

DEFINITIO I.

178. Extractio Radicis, est inventio quantitatis radicalis, quę, aut elevata produxit datam potentiam, aut, si producere non potuit, saltem in illa proximē continetur.

SCHOLION.

179. In specie Extractio radicis quadratę, est Inventio quantitatis, quę per seipsam semel multiplicata generavit quadratum; item, Extractio radicis cubicę, est inventio quantitatis, quę per seipsam bis multiplicata produxit cubum, & ita porro.

AXIOMA

180. Omnis quantitas radicalis considerari, & exprimi potest, tanquam quantitas binomia, Ex. gr. $a \pm b$, aut $a - b$, item $x - y$, vel $x \pm y$.

COROLLARIUM

181. Itaque omnis numerus radicalis monomius, exprimi potest per expressionem binomiam sic numerus $\sqrt[3]{7} = 2 \pm 5$, vel 3 ± 4 , aut 1 ± 6 &c.

THEOREMA I.

182. PROP: Omne Quadratum (generatum ex $\sqrt{\text{binomia}}$) componitur ex tribus elementis; Primo: ex quadrato partis primę radicalis; Secunda: ex duobus factis partium radicalium inter se; Tercio: ex quadrato partis secundę radicalis.

DEMONSTRATUR

Algebraicè. In Numeris.

Sit Radix binomia	$a \pm b$	$= 2 \pm 5$	$= 7$
Per seipsam multiplicata	$a \pm b$	$= 2 \pm 5$	$= 7$
Erunt facta	$aa \pm ab$	$= 4 \pm 10$	
Partialia	$\pm ab \pm bb$	$= 10 \pm 25$	

Quadratum $aa \pm 2ab \pm bb = 4 \pm 20 \pm 25 = 49$

Sed aa quadratum de parte prima radicalis TAB: a & $2ab$ est $a \cdot b \pm a \cdot b$, seu duo facta partium radicalium a & b inter se, & denique Fig: bb est quadratum partis secundę radicalis b I. & ergo. Vide Fig: 1. In qua se linea $CD = 2$.

DE secta inæqualiter, vocetur $a \pm b$, de in se

se invicem geometrice multiplicatae per (§. 90. Arith.) producunt $\square$ DCHE, constans quadratis partium aa & bb, & duobus factis ab.

Idem in Exemplo numerico; Vide Fig: 2. in qua

DC equalis DE sit Ex. gr. 7 seu 2 + 5, constabit

orum $\square$ DCHE, quadrato de 2, seu $\square$ 4, & qua-

drato de 5, seu $\square 25$, & duobus factis $10 + 10$, seu 20

que simul faciunt $49 = 7 \cdot 7 = (2+5) \cdot (2+5)$.

C O R O L L A R I U M.

183. Cum omnis radix esse possit *binomia*, per (§. 180.) omne quadratum considerari potest generatum ex radice *binomia*. Itaque formula algebraica, $aa + 2ab + bb$ universaliter representat omne quadratum, sed hæc formula facta est per multiplicationem, ergo inquisiturus, seu extracturus radicem divisione opus est, utatur, cum quod multiplicatio ponit, tollat divisio per (§. 121. Arith.)

PROBLEMA I.

184. PROP: Extrahere radicem quadra-
tam ex quadrato Algebraico.

RESOLUTIO ALGEBRAICA.

Sit extrahenda radix

$$ex \square na \div 2ab \div bb$$

aa --- (a) Radix

Subtrah: — ) $a + b$

Resid: $\text{+} 2ab \text{+} bb$

$$\text{Divis: } 2a) \quad + 2ab + bb(+b)$$

Subtrah: — —

○ ○

Itaque primo: Quia primum membrum aa est
quadratum de a, erit $\sqrt{aa} = a$ per (§. 169.) que
loceatur post lunulā, erit a pars prima radicit binomicæ

Secundo: Ex hac inventa radice a fiat quadra-
rum aa, quod subscriptum quadrato formae aa, &
subtrahit destruit ex formula primum membrum aa,
remanentibus duobus membris $2ab + bb$

Tertio: Quia in secundo membro $2ab$ continetur pars altera radicis b , quæ est multiplicata per $2a$,
 $2ab$

$\& \text{quia } \frac{2ab}{2a} = b \text{ per } (\S. 35. \& 98.) \text{ itaque } 2ab$

dividi debet per divisorem 23, & proditit quotus
 † b. pars nempe altera radicis, quæ ponatur post u. alā.

Quarto: Divisor 2a multiplicetur per quotum radicalem b, & factum $\div$ 2ab membro formulae homogeneo 2ab subscribatur. Fiat quoque quadratum ex b, quod est $\div$ bb, idque subscribatur membro formulae homogeneo $\div$ bb, unde subtrahendo rem $-$ 2ab ex $\div$ 2ab, quam $-$ bb ex $\div$ bb nihil relinquent:

igitur $a \pm b$ est $\sqrt{aa \pm 2ab \pm bb}$.

SCHÖLION

185. Hac itaque methodo universali ad numeros applicare ex quocunque numero radicem quadratam extrahere licet, ut paulo post in exemplo declaraturus sum; ante tamen, quam ad numeros descendamus, ut Tyronibus calculum faciliorem reddam, Tabulam sequentem subijcio.

T A B U L A

*Radicum, Quadratorum, & Cuborum
in Numeris unitarum.*

	2	3						3	3		
I.	Vaa, vel Ybb	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Vagv, Vb3
II.	□ aa, vel bb	1	4			12	36	44	64	81	Quadrata
III.	Cwb; aab	1	5			1	216	343	512	729	Cwb; bbb
N											
Se-											

Series I. continet radices tam quadratas, quam cubicas; Series II. continet quadrata numerorum prima seriei; Series III. exhibet cubos eorundem numerorum prima seriei. Sic numerus 2 seriei prima

est $\sqrt[2]{4}$ de $\square$ 4 seriei II. & idem numerus 2 est $\sqrt[3]{8}$ de cubo 8. seriei III.

PROBLEMA II.

186. PROP: Extrahere radicem quadratam numericam.

PARADIGMA EXTRACTIONIS $\sqrt[2]{}$

Sit extrahenda $\sqrt[2]{}$ ex numero 189225

Erit formula resolutoria $aa + 2ab + bb$.

Itaque

Operatio I. $18, 92, 25 \quad 435$
 $aa = 16 \dots$

$2ab + bb = * 292 \dots$

Divisor $2a = 4 \cdot 2 = 8 \dots$

Addend. (duplū factū: $2ab = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24 \dots$
 quadratum $bb = 3 \cdot 3 = \dots 9 \dots$

Summa subtrahenda $2ab + bb = * 249 \dots$

Oper. II. Resid. auctam $2ab + bb = * 4325$

Divisor novus $2a = 43 \cdot 2 = 86$

Addend. (duplū factū: $2ab = 43 \cdot 5 \cdot 2 = 430$
 quadratum $bb = 5 \cdot 5 = \dots 25$

Summa subtrahenda $2ab + bb = * 4325$

Residuum 0000

Numerica extractio $\sqrt[2]{}$ secundum formulam algebraicam sic procedit. Datus numerus distinguatur in

in classet à dextris sinistram versus, classibus singulis binas notas assignando (sinistima tamen etiam una constare potest) sit hæc classificatio per binas notas inde, quia quadratum de 9. (qui inter unitates maximus est) non excedit duas notas, est enim $9 \cdot 9 = 81$. ut patet ex Tabula; hæc classificatio ante operationem ostendit, tot notas numericas habendam radicem extrahendam, quot classes reperiuntur. Itaque operatio

prima extractionis $\sqrt[2]{}$ (inueniendo semper formulam algebraicam præfixam) eodem modo, ut (§. 184) dictum, procedit.

I. Cum in numero classis sinistima 18 (quem ex formula repræsentat aa) continetur $\square$ partis primæ radicalis 2, quærat in Tabula radicum in serie II. numerus quadratus æqualis, vel proximè respondens numero 18, qui reperitur esse 16, cujus superscripta radix numerica 4 ponatur post lunulam, voceturque a ut in Paradigmatæ factum vides.

II. Fiat ex invento numero 4 quadratum $aa = 4 \cdot 4 = 16$, idque subtrahatur ex 18, erit residuum 2, ad quod ex secunda classe deponantur numeri 92, & habebitur numerus * 292, quem ex formula repræsentant membra formula: $2ab + bb$.

III. Ut reperiat pars altera radicalis b dividatur 29 per $2a = 4 \cdot 2 = 8$, & quoruz 3 post lunulam positus vocetur b, quo reperta.

IV. Resolvantur termini formulae algebraicæ $2ab + bb$, in numeros jam inventos radices per a & b designatos. Erit itaque $2ab = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$, quod factum directe scribatur infra 29, (vide Paradigmatæ) fiat quoque $bb = 3 \cdot 3 = 9$ hoc una nota remota versus dextram ita scribatur, ut respondeat ultima nota 2 ex numero 292. (vide Paradig.)

V. Sic collocati numeri $2ab$ & bb , addantur, &

N 2

habe-

habebitur summa $= 249$ quæ summa subtracta à superiore numero $* 292$, relinquit residuum 43 , ad quod residuum deponantur numeri tertiæ classis 25 , ex e summa $* 4325$ pro secunda operatione, quem iterum ex formula algebraica representant $2ab + bb$.

Notandum: Quod si summa numerica ex $2ab + bb$ subtrahi non posset à superiore numero, signum est inventum quatum b deberi minui, & cum minuto b operationes Reg. IV. & V. repetendas esse.

187. Inchoetur II. operatio, pro qua inventi jam numeri radicis 43 simul vocentur a novum. (vide Parad.) Ad inveniendum itaque b novum.

I. Fiat novus iterum divisor ex novo a , qui erit $2a = 43$. $2 = 86$, per quem dividendo 4325 operetur quorundam 5 , qui post lunulam positus vocetur b novum.

II. Resolvantur iterum termini formulae algebræ. $2ab + bb$ in numeros per a & b novum indicatos, erit $2ab = 43 \cdot 5$. $2 = 430$, qui directè infra numeros $* 432$ scribatur, & $bb = 5 \cdot 5 = 25$, una nota remanens juxta Reg. IV. scribatur. Vide Parad.

III. Hi numeri sic collocati, & additi dant summam subtrahendam $* 4325$, quæ à superiore $* 4325$ subtracta nihil reliquendo, indicat inventam radicem 435 veram, & rationalem esse numeri 189225 , hujus recta inventæ radicis examen est, si $(435 \cdot 435)$ producat 189225 . per (§. 179.)

S C H O L I O N.

188. Hac itaque methodo operationis II. semper procedendum eris cum numeris reliquarum classium si plures fuerint, observata causæ regula: quod pro subsequente quavis operatione, omnes numeri radicis per antecedentes operationes inventi, valere debeant à novum, solaque altera pars radicis b , per Reg. I. II. & III. (§. 187.) deinceps investigando eruatur.

P L O -

P R O B L E M A III.

189. PROP: Construere formulam universalem pro extrahenda radice quavis, id est, radice in binomiam $a + b$ ad datam quavis potentiam elevare.

R E S O L U T I O.

Multiplicetur $a + b$, per $a + b$, dabit productum hoc secundam potentiam, seu quadratum; secunda hæc potentia iterum multiplicata per $a + b$, dat Tertiam, seu Cubum; tertia iterum multiplicata per $a + b$, dat Quartam, & ita porro procedendum, donec exponens membri primi de a , & membri ultimi de b exprimat ipsam potentiam petitam, erit hæc formula universalis pro extrahenda radice petita. Q. E. F.

Resolutio hæc per ipsam genesim potentiarum demonstratur.

S C H O L I O N.

190. Hac methodo constructa est sequens tabula quatuor potentiarum ex radice binomia $a + b$ productarum, quas in infinitum eadem methodo continuare licet.

$\sqrt{\quad}$, seu I. Potentia $= a + b$.

$\square$, seu II. Potentia $= a^2 + 2ab + b^2$.

Cub: seu III. Potentia $= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

IV. Potentia $= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$.

Et ita in infinitum.

In his formulæ pulcherrima, ac utilissima Theoremata, corollaria, ac praxes continentur, quas (quia referre libelli mole inbibitur) docentium explicatio, ac Tyronum attentioni, relinquimus.

P R O B L E M A IV. UNIVERSALE.

191. PROP: Datam cujuscunque potentie radicem numericam extrahere.

N 3

RE-

ELEMENTA RESOLUTIO.

I. Ut habeatur formula operationum, elevetur radix binomia $a+b$ ad datam potentiam, cuius radix queritur per (§. 189.)

II. Ut propositus numerus rite, in classes distinguatur, tot notæ a dextris sinistram versus cuiusvis classi assignandæ sunt; quot unitates denotat exponens primi membri formulæ de a .

III. Ex classe sinistima semper subtrahatur illa potentia, quam ex formula ostendit primum membrum de a , ejus verò radix numerica scribatur post lunulam, quæ vocetur a , ad residuum sinistimæ classis, si quod fuit, deponantur numeri classis secundæ.

IV. Juxta secundum membrum formulæ algebraicæ formetur ex inventa radice numerica divisor ad querendum quotum, qui erit radix numerica b , qua reperta, reliqua omnia formulæ membra per a & b expressa resolvantur in numeros inventæ radicis per a & b denominatæ, at (§. 186.) dictum: *Vide Parad. subje. m.*

V. Resoluta hæc facta numerica, ita sub se invicem scribenda sunt, ut notæ dextimæ singulorum factorum una nota remotius versus dextram promoveantur. *Vide Paradigma subje. m.*; hoc modo scripta hæc facta partialia addantur, addita à superscripto numero classis secundæ, auctæ per residuum si quod fuit, subtrahantur.

VI. Sic absoluta classe secundæ, eadem methode cum classe tertiæ, & cæteris classibus procedendum erit, assumendo semper pro formando novo divisore a omnes jam reperiæ (per antecessores operationes) radices numericas, eæque per novum a denominatæ, & juxta membrum secundum formulæ in numeros resolutæ, erunt novus divisor

pro

pro inquirendo novo b , quo invento juxta Reg. IV & V. bujus procedatur.

Quæ regulæ universales, ut clariores evadant; eas ad extrahendam radicem cubicam applicabimus, sic

itaque extrahenda $\sqrt[3]{}$ ex numero 14886936, erit per (§. 189.). Formula algebraica.

$$aaa + 3aab + 3abb + bbb \quad \text{Radix}$$

$$14,886,936 \quad \text{ab} \quad 24 \quad 6$$

$$\text{Operatio I. } aaa = 2.2.2 = 8 \dots \dots \quad a \quad b$$

$$3aab + 3abb + bbb = * 6886 \dots \quad \text{novum ex operatione II.}$$

$$\text{Divisor } 3aa = 2.2.3 = * 12 \dots$$

$$\text{Addend. } (3abb = 4.2.2.3 = 48 \dots$$

$$(3abb = 4.4.2.3 = -96 \dots$$

$$(bbb = 4.4.4 = -64 \dots$$

$$\text{Subtrahend. } = * 5824 \dots$$

$$\text{Operatio II. } 3aab + 3abb + bbb = * 1061936$$

$$\text{Divis. nov. } 3aa = 24.24.3 = 1728$$

$$\text{Addend. } (3aab = 6.24.24.3 = 10368$$

$$(3abb = 6.6.24.3 = -2592$$

$$(bbb = 6.6.6 = -216$$

$$\text{Subtrahendus } = * 1061936$$

$$\text{Residuum nullum } = 0000000$$

SCHOLION.

192. Quod si post subtractionem classis ultimæ residuum aliquod emergat, constat ex (§. 174.) radicem inventam non esse exactam, adeoque in proposito numero dari radicem irrationalem, & surdam, quæ licet à vera, deficere non possit una unitate radicali, quia tamen hic defectus radicalis (ob multiplicationem iteratam, per quam potentia generantur) defec-

tum

Itum saepe insignem in potentia producit; idcirco necesse est nosse methodum per decimales, appropinquandi ad illam unitatem radicalem: ut ita, si placet, ne una millionesima parte unitatis illius aberrare contingat; itaque.

PROBLEMA V. UNIVERSALE:

193. PROP: Extracta radice proxime vera ex quavis potentia irrationali, approximare ad radicem veram per fractiones decimales.

RESOLUTIO.

I. Extracta radice proxime vera per (§ 191.) ad residuum ultimum addantur tot zeri, quot unitates denotat præfixæ formulæ algebraicæ exponens primi membri de a ; Ex. gr. In approximatione ad radicem quadratam, addantur zeri duo, in cubica zeri tres, &c.

II. Cum hoc residuo zeri aucto procedatur secundum regulas IV. & V. (§ 191.) assumendo scilicet pro novo a totam radicem inventam, & per hanc inquirendo, juxta Reg. IV. & V. (§ 191.) in novum b , reperietur prima nota numeratoris, (quæ vocetur b novum) pro denominatore vero scribatur 10, & habebuntur partes decimæ, unitatis radicalis.

III. Ex hoc numeratore b , & cæteris notis per a novum denominatis formentur in numeris omnia membra formulæ præfixæ, ut regula IV. & V. (§ 191.) dictum, quibus additis, ad residuum iterum addantur tot zeri, quot exponens in formulâ præfixâ signat, & assumendo pro novo a omnes notas radicis, una cum nota numeratoris, procedatur iterum ad inquirendum novum b , per easdem Reg. IV. & V. (§ 191.) quo recepto, & priori numeratori adjuncto, denominator augeatur uno zero, & habebuntur partes centesi.

tesimæ, atque hac methodo reliquas numeratoris notas eruendo, & post singulas operationes denominatorem uno zero augendo, pervenietur tandem absoluta operatione sexta ad partes millionesimas.

In gratiam Tyronum subjungo approximationem ad radicem quadratam. In part. centesimis. Sit ita-

q^{ue} extrahenda $\sqrt{\text{ex numero irrationali } 1286.}$

Formula algebraica $a^2 + 2ab + b^2$

$$aa = \frac{12,86}{9} \begin{matrix} 35 \\ ab \\ 100 \end{matrix}$$

$$2ab + bb = * 386 \ a$$

$$\text{Divis: } 2a = 3.2 = 6$$

$$2ab = 5.3.2 = 30$$

$$bb = 5.5 = -25$$

$$\text{Subtrahend.} = * 325$$

$$\text{Approxim. I. Resid. auct. zeri} * 6100$$

$$\text{Divisor } 2a = 35. = 70$$

$$2ab = 8.35.2 = 560$$

$$bb = 8.8 = 64$$

$$\text{Subtrahend.} = * 5664$$

$$\text{Approxim. II. Resid. auct. zeri} * 43600$$

$$\text{Divisor nov. } 2a = 358.2 = 716$$

$$2ab = 6.358.2 = 4296$$

$$bb = 6.6 = ---36$$

$$\text{Subtrahend.} = * 42996$$

$$\text{Residuum pro approximatione III. } 604$$

& ita porro progrediendum.

SCHOLION.

194. Extractio radicum, & approximatio eadem

Q

metbo-

metodo peragitur in potentiis fractionum, extrahendo videlicet radicem datam tam ex numeratore, quam

denominatore sic $\sqrt[25]{\frac{5}{64}}$ erit $\frac{5}{8}$. Examen verò rectè

inventa radice tam in integris, quam fractis est, si inventa radix elevata ad datam potentiam, una cum adjuncto residuo (si quod fuit) aequet numerum ex quo radix extracta est, ut tentant in adductis supra exemplis patebit.

PROBLEMA VI.

195. PROP: Potentiam quamvis per exponentes expressam elevare ad aliam potentiam per exponentes indicandam.

RESOLUTIO.

Exponens datæ potentie elevandæ multiplicetur per exponentem potentie ad quam elevari debet. Q. E. F.

EXEMPLA ALGEBRAICA.

Sic a^3 elevandum ad 2. ad potentiam, erit $a^{3 \cdot 2} = a^6$

Secunda potentia de a^3 , sic x^m elevatum ad potentiam n , erit x^{mn} & $(a+b)^3$ elevatum ad 3 potentiam $(a+b)^9$

Idem est in potentiis numericis per exponentes indicatis.

Demonstratio liquet; hæc enim multiplicatio exponentium supplet vicem additionis iteratæ exponentium, quam fieri debere docuimus in multiplicatione quantitatum exponentibus affectarum in casu III. (§. 89.) nam a^3 elevatum ad secundam potentiam est a^6 , $a^3 = a^1 + 2 = a^6$ ergo. Q. E. D.

PROBLEMA VII.

196. PROP: Ex data potentia per exponen-

tes

tas expressa, indicare per exponentes, extractam esse radicem datam quamvis.

RESOLUTIO.

Exponens datæ potentie dividatur per exponentem datæ radice. Q. E. F.

EXEMPLA ALGEBRAICA.

Sic indicandum extractam esse $\sqrt[2]{a^6}$ de potentia a^6 erit $\sqrt[2]{a^6} = a^{6:2} = a^3$, item $\sqrt[n]{x^{mn}} = x^{mn:n} = x^m$

item $\sqrt[3]{(a+b)^9} = (a+b)^3$ &c.

Demonstratio clara est: Extractio radice fit per divisionem (§. 191.), divisionem autem quantitatum exponentibus affectarum fieri docuimus Casu IV. (§. 198.) per subtractionem, unde sequitur divisionem hanc supplere iteratam subtractionem, sic $a^6 : 3 = a^3$, &c. Q. E. D.

SCHOLION I.

197. Postrema dño Problemata usum amplissimum habent in calculo radicum irrationalium de que, in compendio sequenti capite; nam ope horum problematum quantitates irrationales reduci possunt ad expressionem rationalium, sub qua, ut rationales tractari possunt; sic $\sqrt[2]{a^4} = a^{4:2}$ item $\sqrt[3]{x^6} = x^{6:3}$ multo

$\sqrt[n]{x^m} = x^{m:n}$ &c.

SCHOLION II.

198. De quatuor algorismis potentiarum jam actum est Parte I. sunt enim potentie nihil aliud, quam quantitates affectæ exponentibus, & vicissim. Hinc Additio potentiarum fit per Casu I. & II. (§. 74.) Subtractio per (§. 78.) Multiplicatio per Casu III. (§. 89.) Divisio per Casu IV. (§. 98.)

O 2

Illud

Illud hic in divisione potentiarum notandum: quod si pro quoto prodeat potentia cum exponente negativo (ut fit in casu, quo divisoris exponens major est exponente dividendi) huiusmodi potentia fit fractio, cuius numerator est 1, denominator vero eadem potentia, sed cum exponente positivo; sic Ex. gr. 2^{-2}

$$= \frac{1}{a^2}, \text{ nam Ex. gr. } a^1 : a^3 = \frac{a^1}{a^3} = \frac{1}{a^2}, \text{ sed } a^3 : a^5 = a^{\frac{3-5}{1}} = a^{-2}$$

$$= a^{-2} \text{ per Cas. IV. (§. 98.) ergo } a^{-2} = \frac{1}{a^2} = \frac{1}{a^2} \text{ Sic}$$

$$a^{-4} = \frac{1}{a^4} \text{ \& } x^{-n} = \frac{1}{x^n} \text{ \&c.}$$

SCHOLION III.

199. Locus hic esset agendi de potentiis affectis, & deficientibus, ac de earundem extractione radicis, item de inventione radicum verarum, & falsarum in formulis potentiarum reductis ad nihilum, qualis est, $x^3 - 3x^2 - 10x + 24 = 0$ quarum singulares observationes ex earundem natura, & genesi referunt cum Carthesio, Hariotus, & ceteri Recentiores, quas, quia ij, qui ad sublimiorem Algebram perdiscendam animum adjecerunt, facile ex Recentiorum Analyticorum libris petere possunt, nos (prima duntaxat principia Tyronibus tradentes) praeferre cogimur, earumque loco calculum quantitatum irrationalium capere sequenti strictim pertractabimus, propterea, quod sine huius notitia tam Recentiorum Mathematicorum, quam Philosophorum obuii calculi intelligi nequeant. Itaque.

CAPUT III.

De calculo quantitatum, & radicum irrationalium, seu surdarum, tam simplicium, quam compositarum.

DEFINITIO VI.

200. Radices heterogeneae dicuntur, quarum

cx-

exponentes radicales sunt heterogeneae, ut (§.

54.) dictum, sic heterogeneae sunt $\sqrt[n]{b^m}$ & $\sqrt[n]{a^r}$, item $\sqrt[2]{12}$ & $\sqrt[3]{18}$. Homogeneae sunt, quae eosdem habent exponentes radicales, sic $\sqrt[n]{a^m}$ & $\sqrt[n]{b^r}$ item $\sqrt[2]{12}$ & $\sqrt[2]{8}$.

PROBLEMA VIII.

201. PROP. Quantitates irrationales heterogeneas reducere ad homogeneas.

RESOLUTIO ALGEBRAICA.

Sint reducenda $\sqrt[n]{b^m}$ & $\sqrt[n]{a^r}$ erunt per (§. 196)

$\sqrt[n]{b^m} = b^{m:n}$ & $\sqrt[n]{a^r} = a^{r:n}$ cum itaque exponentes de $b^{m:n}$ & $a^{r:n}$ sint expressio fractionum habentium diversos denominatores, hos reducendo ad eandem denominatorem per (§. 129.) erunt $b^{ms:ns}$ & $a^{rn:ns}$, ergo restituendo signa radicalia erunt $b^{ms:ns}$ & $a^{rn:ns}$ sed $\sqrt[n]{b^{ms:ns}}$ & $\sqrt[n]{a^{rn:ns}} = \sqrt[n]{b^{ms} a^{rn}}$, sed $\sqrt[n]{b^{ms} a^{rn}}$ & $\sqrt[n]{a^{rn} b^{ms}}$ sunt homogeneae per (§. 200.) ergo. Q. E. F. & D.

Eadem resolutio applicata ad radices surdas numericas veritatem problematis declarat.

PROBLEMA IX.

202. PROP. Quantitates irrationales ad expressionem simplicissimam, seu ad terminos minimos reducere.

RESOLUTIO.

Videatur, an quantitates irrationales in factores suos resolutae contineant factorem unum, qui sit potentia rationalis, ejusdem potentiae, cuius est exponens radicis praefixae, ex hoc factore actualiter extracta radix rationalis ponatur ante signum $\sqrt{\quad}$, altero factore manente post signum $\sqrt{\quad}$. Q. E. F.

O3

EXEM-

ELEMENTA EXEMPLUM ALGEBRAICUM.

Sit reducenda $\sqrt[2]{aab}$, quoniam $\sqrt[2]{aab} = \sqrt[2]{b \cdot aa}$
 erit per datam resolutionem $\sqrt[2]{aab} = a \sqrt[2]{b}$, item
 $\sqrt[3]{abbb} = b \sqrt[3]{a}$, & $\sqrt[3]{48aabc} = \sqrt[3]{3 \cdot 16 \cdot aa \cdot bc}$
 $= 4a \sqrt[3]{3bc}$. idem est in compositis, & fractis.

EXEMPLUM NUMERICUM.

Sit reducenda $\sqrt[2]{12} = \sqrt[2]{3 \cdot 4}$, erit. reducta $2\sqrt[2]{3}$
 item $\sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{2 \cdot 8}$ erit $2\sqrt[3]{2}$.

SCHOLIUM.

203. Quod si quantitas irrationalis, aut in fa-
 ctore non possit, aut nullus factorum sit po-
 tentia exponentis datae radices, quantitates hae erunt

irreducibiles, sic irreducibiles sunt $\sqrt[3]{7}$ & $\sqrt[3]{5}$, item
 $\sqrt[3]{10} = \sqrt[3]{2 \cdot 5}$, aut $\sqrt[3]{ab}$, vel $\sqrt[3]{aab}$.

DEFINITIO VII.

204. Si duae, vel plures quantitates, ad ex-
 pressionem simplicissimam reductae, habentes
 eosdem exponentes radicales, habeant praeterea
 eandem quantitatem post signum $\sqrt[2]{}$ positam,
 quantitates hae dicuntur communicantes Ex. gr. 3.

$\sqrt[2]{2}$, & $5\sqrt[2]{2}$, item $a\sqrt[3]{b}$ & $c\sqrt[3]{b}$ &c. in aliis ex-
 pressionibus dicuntur incommensurabiles.

PROBLEMA X.

205. Addere quantitates irracionales.

RESOLUTIO.

Ante operationem reducantur per (§. 202.)
 ad expressionem simplicissimam.

CASUS I. Si quantitates reductae fuerint
 communicantes (§. 204) quantitates ante signum
 $\sqrt[2]{}$ positae addantur, ut (§. 74.) dictum, harum
 sum-

ALGEBRAE

Summa uni quantitati radicali praefixa, erit sum-
 ma quaesita. Q. E. F. Vide exempl. I. & II. cas. I.

CASUS II. Si quantitates irracionales sunt
 irreducibiles, aut incommensurabiles, addendae
 sunt, ut quantitates heterogeneae per cas. II.
 (§. 74.) Vide exempl. I. & II. cas. II.

CASUS I. EXEMP. I. ALGEBRAI.

Sint $\sqrt[2]{4aab} - \sqrt[2]{9aabc}$ erunt $2a\sqrt[2]{b} - 3a\sqrt[2]{bc}$ per
 Add. $\sqrt[2]{16aab} - \sqrt[2]{36aabc}$ reducta $4a\sqrt[2]{b} - 6a\sqrt[2]{bc}$ (§.
 202.)

Summa $6a\sqrt[2]{b} - 4a\sqrt[2]{bc}$

EXEMPLUM II. NUMERICUM.

Sint $\sqrt[2]{48} - \sqrt[2]{50}$ seu $\sqrt[2]{3 \cdot 16} - \sqrt[2]{2 \cdot 25}$ erunt
 $4\sqrt[2]{3} - 5\sqrt[2]{2}$.

Add. $\sqrt[2]{12} + \sqrt[2]{16}$ seu $\sqrt[2]{3 \cdot 4} + \sqrt[2]{2 \cdot 8}$ reducta
 $2\sqrt[2]{3} + 2\sqrt[2]{2}$.

Summa $6\sqrt[2]{3} + 4\sqrt[2]{2}$.

CASUS II. EXEMP. I. ALGEBRAI.

$\sqrt[3]{ab} + a\sqrt[3]{b}$

$\sqrt[3]{cd} - a\sqrt[3]{c}$

Summa $\sqrt[3]{ab} + a\sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{cd} - a\sqrt[3]{c}$

EXEMPLUM II. NUMERICUM.

$\sqrt[3]{7} + 2\sqrt[3]{3}$

$\sqrt[3]{5} - 2\sqrt[3]{6}$

Summa $\sqrt[3]{7} + 2\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{5} - 2\sqrt[3]{6}$.

PROBLEMA XI.

206. PROP: Subtrahere quantitates irra-
 tionales.

RESOLUTIO.

CASUS I. Si quantitates irracionales per
 (§. 202.) reductae fuerint communicantes, quan-
 titates ante $\sqrt[2]{}$ positae subtrahantur, ut homoge-
 neae per (§. 78.) Vide exempl. I. & II. cas. I.

CASUS II. Si fuerint incommensurabiles,

EXEMPLUM I. ALGEBRAICUM.

Divisor Dividendus Quotus

$$\begin{array}{r} (ac \sqrt{bm} - cc \sqrt{dm}) \\ c\sqrt{m} \overline{) ac \sqrt{bm} - cc \sqrt{dm}} : a\sqrt{b} - c\sqrt{d} \end{array}$$

EXEMPLUM II. NUMERICUM.

$$\begin{array}{r} -4 \sqrt[3]{5} \left(-8 \sqrt[3]{20} + 12 \sqrt[3]{10} \right) : \\ \left(-8 \sqrt[3]{20} + 12 \sqrt[3]{10} \right) \sqrt[3]{4} - 3 \sqrt[3]{2} \end{array}$$

EXEMPLUM III. ALGEBRAICUM.

Sic dividendus reductus per (§. 201.) $\sqrt[n]{b^m a^n}$ di-
 visor $\sqrt[n]{a^n}$, erit $\sqrt[n]{b^m a^n} : \sqrt[n]{a^n} = \sqrt[n]{b^m}$
 $= b^m : n = \sqrt[n]{b^m}$.

SCHOLION.

209. Eodem modo tractantur radices radicum,
 seu quantitates sub duplici signo radicali, Ex. gr.
 $3\sqrt[3]{\sqrt{2}}$, aut $(3\sqrt[3]{\sqrt{5}}) \sqrt[3]{6}$, modo observetur, quod
 quantitates aut duplici signo radicali anteposita, aut
 parenthesi inclusae, tractari debeant ut rationales;
 quarum calculus videri poterit apud auctores infra
 referendos.

SCHOLION.

210. Calculus radicum imaginariarum eodem
 modo peragitur, quo realium, modo notetur in mul-
 tiplicatione, & divisione signa negativa post radicale
 signum posita non mutari in positiva, alias ex quan-
 titate imaginaria, & impossibili fieri posset realis, &
 possibilis, quod est absurdum; hinc regula de signis
 (§. 86. & 96.) tradita tantum respectu signorum
 ante $\sqrt{\quad}$ positorum locum habent. Sic

Si $\sqrt{-50}$ addenda sit ad $\sqrt{-8}$, erit $\sqrt{-50} =$
 $\sqrt{-2} \cdot 5 = 5\sqrt{-2}$, & $\sqrt{-8} = \sqrt{-2} \cdot 2 = 2\sqrt{-2}$
 2 per (§. 202) & hinc summa $5\sqrt{-2} + 2\sqrt{-2} =$
 $7\sqrt{-2}$ id est $\sqrt{-2} \cdot 49 = \sqrt{-98}$.

Item

Ex $\sqrt{-98}$ subtrahendo $\sqrt{-8}$, erunt reducta,
 $\sqrt{-98} = 7\sqrt{-2}$, & $\sqrt{-8} = 2\sqrt{-2}$, & hinc differ-
 rentia $7\sqrt{-2} - 2\sqrt{-2} = 5\sqrt{-2}$.

Pariter multiplicando $\sqrt{-6}$ per $\sqrt{-3}$ dat summa
 $\sqrt{-18}$, & dividendo $\sqrt{-18}$ per $\sqrt{-3}$ dat quotum
 $\sqrt{-6}$. Sed & de his, cum nobis prolixioribus esse
 non liceat, plura ex infra citandis auctoribus peten-
 da erunt.

SCHOLION III.

211. Non ignoro celeberrimos Italice Analystas
 docere multiplicando, vel dividendo radices imagina-
 rias per imaginarias, signa — mutari debere in +,
 quod ipsum Cl. D. Martine pluribus ostendere co-
 natur. Sed enim adverte, radicem imaginariam non
 esse negativam, uti nec est positiva, nam propterea im-
 possibilis asseritur, quod nec sit positiva, nec negati-
 va; nunquam itaque intelligere poteram, ut ex
 quantitatibus, quae nec positiva, nec negativa forent,
 quantitas produci queat positiva, uti assequi non pos-
 sum, quo modo ex duobus entibus involventibus
 contradictionem, componi possit ens u-
 num possibile.

FINIS PATRIS II.



ELEMENTORUM ALGEBRÆ PARS III.

*De Analyſi ſpecioſa, ſeu arte reſolvendi
problemata, & quaſtiones quantumvis reconditas.*

CAPUT I.

*Axiomata, Præcepta, & Præſes univerſales totius
artis Analytica.*

DEFINITIO I.

212. *Æquatio*, dicitur formula algebraica
exprimens per interpoſitionem ſi-
gni = certas quantitates quomo-
docunque affectas eſſe ſibi invicem æquales,
vel etiam æquales nihilo: Ex. gr. $ax + c = ab - d$, vel $3 + 5 - 2 = 6$, aut $ax - ab = 0$.

SCHOLION I.

213. *Æquationis* itaque formula exprimis
quantitates omnes ſimul acceptas, & ante ſignum =
poſitas, æquales eſſe quoad valorem omnibus quantita-
tibus ſimul ſumptis, & poſt ſignum = poſitis, ſeu
quod idem eſt, quantitates ad latus ſiniſtrum ſigni
= poſitas æquivalere quantitatibus ad latus dex-
trum ſigni = collocatis, ut ex hæcenus dictis conſtat.

SCHOLION II.

214. Cum unicum medium, qua utitur Algebra
ad reſolvendas quaſtiones etiam abſtruſiſſimas, ſit
Æquatio, ſeu Æqualitatis expreſſio, totius artis
Analyſeos artiſcium fundatur in inventione *Æqua-
tionis*, & arte reducendi (per axiomata de *Æqua-
lizare*

lizate quantitarum,) datam *Æquationem* ad unum
terminum incognitum, ita, ut ex una *Æquationis*
parte obtineatur unus ſolus terminus incognitus li-
ber ab omnibus aliis tam cognitis, quam incognitis
terminis, ex alia verò *Æquationis* parte meri ter-
mini noti habeantur; quod, qua ratione riſe fieri
debeat, in quinque operationes artem univerſam re-
ſolvendi quaſtiones diſtinguo, in quibus, ſi Tyro A-
nalyſta rectè exercitatus fuerit, nihil tam recondi-
tum proponi eidem poterit, cujus ſolutionem; harum
operationum ope, daturus non eſſet. Prima itaque
operatio Analyſtica erit: I. Quaſtionis propoſitæ
accurata omnium circumſtantiarum diſcuſſio, &
perfecta, perſpectaque propoſiti ſtatus quaſtio-
nis intelligentia. II. Aptæ & debita quantita-
tum, tam cognitarum, quam incognitarum per
litteras alphabeti denominatio. III. Inventio,
& expreſſio Æqualitatis. IV. Reductio *Æqua-
tionis*. V. *Æquationis* reductæ in numeros
reſolutio, vel figuræ conſtructio de quibus in com-
pendio jam ſpecialius.

OPERATIO I. ANALYSEOS.

215. Quaſtionis reſolvendæ accurata omni-
um conditionum, & circumſtantiarum diſcuſ-
ſio.

I. Analyſta reſolutorus problema aliquod, conſi-
derabit primùm accuratè, quis ſit ſtatus quaſtio-
nis, ſeu quid petatur inveniendum? quo cognito.

II. Conditiones, & circumſtantias in quaſtione
reſolvenda appoſitas ſedulo evolvat.

III. Inquiret in quantitates notas; & ignotas,
quænam dentur cognitæ; quæ incognitæ lateant.

IV. Intelligere adlaboret, quænam ſit illa quanti-
tas incognita, à cujus notitia dependet ſolutio pro-
blematis, & quænam relationem quantitates cætera
ad hanc habeant.

V. Que.

V. Quanam quantitates (seu ea sint cognita, seu incognita) ex ipsis conditionibus in problemate appofitis, dicantur vel inter se, vel cum tertia aliqua quantitate aequales, aut saltem proportionales. His rite intellectis procedat Analysta ad operationem II.

OPERATIO II.

216. Aptæ & debita quantitatum tam cognitarum, quam incognitarum per literas alphabeti denominatio.

I. Quantitates notas per primas, ignotas per ultimas Alphabeti literas denominet, ut (§. 4. & 5. item 41. 42. & 43) dictum:

II. Quando occurrunt plures quantitates (seu ea sint cognita, seu incognita) quæ ob certam relationem ex discussione questionis notam, paucioribus literis exprimi possunt, id præstat faciendum, ad faciendam operationem Reductionis, ut si dentur duæ incognitæ Ex gr: x & y , constet autem y esse duplum de x , loco y , scribo $2x$, item si esset y subduplum seu una dimidia pars de x , eam per $\frac{x}{2}$ melius.

denominabit Analysta, quam per y , & ita de aliis.

III. Denominationem factam ad latus solis ali-quod seorsim & distinctè, (adscriptis etiam eorum nominibus in questione adductis, interposito signo $=$) sibi adnotet Analysta, tum ne à memoria elabatur quantitates, pro quibus substituta literarum facta est, tum ut Resolutio Equationis reducta ordinatè peragatur.

OPERATIO III.

217. Quantitatum tam cognitarum, quam incognitarum in formulam Equationis collocatio, seu inventa æqualitatis expressio.

I. Discussis rite conditionibus questionis præ-

positæ, denominatisque terminis, videatur, quæ quantitates (vel simul, vel seorsim acceptæ) dicantur æquales, aut saltem proportionales, nihil respiciendo notantè sint, an ignotæ, sed ignotas tanquam notas juxta conditiones questionis promiscuè in æquationem ordinabit; seu quod idem est; questionem ex idiomate latino, vel alio quocunque, in algebræcum per signa, & hypotheses exprimendam transe-
ret, & eloquetur Analysta; erit hæc elocutio desiderata Æquatio, prima ad solutionem ope Reductionis aptanda.

II. Tot Æquationes formabit, ex conditionibus questionis, quot termini inveniuntur incogniti diversi, excepto casu questionum indeterminatarum, de quibus infra.

SCHOLION.

218. Quemadmodum prima Æquationis inventio, & expressio acce, ac subtile ingenium Analystæ desiderat, quæ (utpote maximi laboris lapis est) Idius, in quo sincerum periculum Analysta facere poterit suimet ingenii, ita habita prima Æquatione (quam tamen perspicax ingenium Analystæ ex conditionibus questionis propositæ haud difficile formabit) nihil facilius, quam (ope Reductionis) questionis solutionem reperire, repertamque exhibere.

OPERATIO IV.

219. Æquationum primarum ad unum terminum incognitum, & solitarium Reductio.

Animadvertant Tyrones Analystæ, scopum, & finem unicum hujus operationis esse, ut servato semper utriusque partis Æquationis, valore equali, Æquatio ita transformetur per operationes contrarias, ut ex una parte terminus ignotus separatus ab omnibus aliis tam notis, quam incognitis compareat, ex altera verò parte omni termini noti, nullis ignotis permixti habeant.

habeantur; quod ut rectè tractent *Analysta* per axiomatica, & regulas paulò post referendas, sequentem regulam universalem cautè velim observent, & menti imprimant: videlicet.

Quæcunque operatio cum una *Æquationis* parte suscipitur, eadem, & in alia *Æquationis* parte peragatur, excepta *Metathesi*, ut infra declarabitur. Itaque sequentia *Axiomata*, in quibus *Reductionis* regula fundantur, memoria cumprimis mander *Analysta*.

AXIOMATA QUANTITATUM,

nam *Æqualium*, quam *inæqualium*,

220. I. Idem sibi metipsum, & simile, & æquale est ut $a = a$, & $3 + 2 = 5$.

221. II. Quæ sunt æqualia uni tertio, sunt etiam æqualia inter se, ut si $a = x$, & $b = x$, erit quoque $a = b$, item si $3 + 2 = 5$, & $7 - 2 = 5$, erit etiam $3 + 2 = 7 - 2$. Et hinc

222. III. *Æquale* pro æquali, aut æqualia pro æqualibus substitui, & surrogari possunt, ut si $x = y$, & $y = a$, erit quoque $x = a$.

223. IV. Si *Æqualibus* addatur æquale, vel æqualia, manent æqualia, ut si $a = x$, & parti utriusque addatur b , erit $a + b = x + b$, item si $a = x$, & $c = d$, erit etiam $a + c = x + d$.

224. V. Si ab æqualibus auferantur, aut subtrahantur æqualia, vel æquale, manent æqualia, ut si $a = x$, & ab utraque parte auferatur c , erit $a - c = x - c$, item si $a = x$, & $c = d$, erit quoque $a - c = x - d$.

225. VI. Si æqualia per æquale multiplicentur facta manent æqualia, ut si $a = x$, & utraque pars multiplicetur per b , erit $ab = xb$.

226. VII. Si æqualia dividantur per æquale, quoti erunt æquales, ut si $a = x$, & utraque pars dividatur per c , erit $\frac{a}{c} = \frac{x}{c}$.

227. VIII. Si æqualia per alia æqualia multiplicentur, facta erunt æqualia, ut si $a = x$, & $c = d$, erit $ac = xd$, nam $ac = cx$, & $cx = xd$ per (§. 225.) ergo $ac = xd$ per (§. 222.). Eodem modo, si æqualia per æqualia dividantur quoti erunt æquales, ut si $a = x$, & $c = d$, erit quoque

$$\frac{a}{c} = \frac{x}{d}$$

228. IX. Quantitates æquales elevatae ad eundem gradum potentiae, manent æquales, ut si $a = x$, erit $a^2 = x^2$, aut $a^3 = x^3$.

229. X. Ex quantitatibus æqualibus elevatis ad eundem gradum potentiae extractæ radices ejusdem gradus, manent æquales, ut si $aa = xx$, erit $\sqrt{aa} = \sqrt{xx}$, id est, $a = x$.

230. XI. Si inæqualibus addantur æqualia, aut ab inæqualibus subtrahantur æqualia, item si inæqualia multiplicentur, dividanturve per æqualia *Summa*, *Residua*, *Facta*, & *Quoti* manebunt inæqualia.

THEOREMATA ÆQUATIONUM.

231. I. Si duarum quantitarum inæqualium differentia, seu residuum addatur ad eandem summam, erit aggregatum æquale duplo quantitatis majoris, ut si $a > b$,

In Numeris sic $2 > 4$

Erit summa $= a + b$

Erit summa $12 + 4 = 16$

Differentia $= a - b$

Differentia $12 - 4 = 8$

Aggregatum $= 2a$

Aggregatum $12 + 12 = 24$

232. II. Si verò 2 summa duarum quantitarum inæqualium, subtrahatur differentia, erit residuum æquale duplo minoris, ut si $a > b$.

In numeris sit $12 > 4$

Erit summa $= a + b$ Erit summa $= 12 + 4 = 16$

Differentia $= a - b$ Differentia $= 12 - 4$

Subtrahendo $= +$ Subtrah. $= + = -8$

Residuum $= 2b$ Residuum $= 4 + 4 = 8$

233. III. Si ad semisumma duarum quantitatum inæqualium addatur semidifferentia, erit aggregatum æquale quantitati majori, ut si $a > b$ erit.

$$\begin{array}{l} \text{Addend.} \left(\begin{array}{l} \text{semisumma} = \frac{a+b}{2} \\ \text{semidifferentia} = \frac{a-b}{2} \end{array} \right. \text{ & binc aggregatum.} \end{array}$$

$$\text{per (§. 136.) } \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2} = \frac{2a}{2} = a \text{ per (§. 36.)}$$

In Numeris sit $12 > 4$

erit semisumma $= \frac{12+4}{2} = \frac{16}{2} = 8$

semidifferentia $= \frac{12-4}{2} = \frac{8}{2} = 4$ sed $8 + 4 = 12$

seu $\frac{12+4}{2} + \frac{12-4}{2} = \frac{24}{2} = 12$ per (§. 125.)

234. IV. Si à semisumma duarum quantitatum inæqualium subtrahatur earundem semidifferentia, erit residuum æquale quantitati minori, ut si $a > b$

erit semisumma $= \frac{a+b}{2}$

semidifferentia $= \frac{a-b}{2}$

$$\text{seu subtrahendo } = \frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2} = \frac{2b}{2} = b$$

Idem patet in numeris, si pro literis numeri substituantur, ut in priori Exemplo $12 > 4$.

Ultima quatuor axiomata magnum habent usum in formanda prima Equatione, de qua (§. 217.) dictum.

SCHOLION.

235: Axiomatibus his rite intellectis, & memoria retentis, sequentes Reductionum reglas fundatas in axiomatibus, familiares sibi reddat Tyro Analysta, id universaliter notando: quod quemadmodum M dici calida frigidis frigida calidis, id est contrariis tollere in more habent, ita Analysta, ut terminum in equatione incognitum, seu quæsitum reddant notum ope Reductionis, quicquid eidem, & ex illius parte in Equatione adhæreat, per contrarias operationes in utraque parte Equationis instituendas, tollunt. Sane autem operationes contrariæ. Additio & Subtractio per (§. 19.) aut eorum loco Metathesis, item contrariæ sunt Multiplicatio & Divisio per (§. 34) item inter contrarias sunt, elevatio radice ad potestatem, & ex potestate radice extractio; atque per ejusmodi contrarias operationes (quæ in regulis reductionum continentur) Equationem tandem reducitur Analysta, donec ex una Equationis parte solus terminus ignotus, ex altera verò meri cogniti quomodo-cunque affecti habeantur.

REGULÆ

REDUCTIONUM ANALYTICARUM

Equationis solitariae.

236. Equationem solitariam voco, in qua incognitus unus est, vel si plures, ii sint homogenei, ut si sit $8x + a = ad - c$.

Reg. I. Si ex parte termini ignoti compareant termini noti per additionem seu signum + conjuncti, ii tollendi sunt per Subtractionem, &

Q²

qui-

quidem in utraque parte æquationis faciendam per (§. 224.) ut si sit $4x + b = a$, subtrahendo ab utraque parte b erit $4x + b - b = a - b$, hoc est $4x = a - b$ per (§. 20.)

Reg: II. Si ex parte termini ignoti inveniatur terminus notus per *Subtractionem*, seu signum — connexus, is tollendus est per *Additionem* ejusdem termini in utraque parte æquationis instituendam, ut si sit $3x - c = ab$, addendo utrique parti $+c$, erit $3x - c + c = ab + c$, hoc est $3x = ab + c$.

Reg: III. Loco reductionis per binas nunc traditas regulas instituendæ, ab exercitatis Analystis adhibetur figura *Metatheseos*, quæ est translatio terminorum quorumvis ex una Æquationis parte in alteram mutatis signis in contraria; est hic Modus per *Metathesim* operandi admodum compendiosus, utpote vicein binarum antecedentium regularum sæpius repetendarum unica terminorum translatione supplens. Sic si detur $4x + b = a$, erit per *Metathesim* $4x = a - b$, item $3x - c = ab$, per *Metathesim* $3x = ab + c$, aut $5x - c + b + d = ac$ per *Metathesim* erit $5x = ac + c - b - d$.

Hac figura *Metatheseos* nos semper utemur, quæ nesciuntque terminos per additionis, aut subtractionis signa affectos ex una parte Æquationis sublatos voluerimus.

Reg: IV. Si termino ignoto adhæreat aliquis terminus notus per hypothesein *multiplicationis* expressus, is tollendus est per *divisionem*, dividendo scilicet per terminum notum, adhærentem ignoto, omnes terminos utriusque partis Æquationis, qui per hunc divisi non sunt, ut

fi

si sit $ax = bc$ erit $\frac{ax}{a} = \frac{bc}{a}$ hoc est $x = \frac{bc}{a}$ per (§. 36.) item si sit $ax + bx = ad + c$, erit $ax + bx - ad + c = ad + c - ad + c$ hoc est $x = \frac{ad + c}{a+b}$ per (§. 103).

Reg: V. Si termino ignoto adhæreat terminus notus per hypothesein *divisionis* expressus, is tollendus est per *multiplicationem*, multiplicando videlicet per terminum notum adhærentem, omnes terminos utriusque partis Æquationis, qui per illam terminum divisi non sunt, ut

si sit $\frac{x}{a} = \frac{b}{c}$ erit $\frac{x}{a} \cdot ac = \frac{b}{c} \cdot ac$, hoc est $x = \frac{ab}{c}$ per (§. 36.) & per *Metathesim* $x = ac - ab$.

Reg: VI. Quod si occurrat Æquatio, in qua omnes termini per eandem aliquam quantitatem multiplicati, vel divisi sunt, ea quantitas simpliciter deleri potest; ut si sit $ax + c = ad$, erit $x + c = d$; item si sit $\frac{x}{a} = \frac{b}{c}$, erit $x = \frac{ab}{c}$ per Axioma (§. 226.)

Noëne Tyron: Analystis in more esse, in casu, quo per multiplicationem, aut divisionem eorum ab ignoto tollitur, compendii gratia delendo simpliciter per (§. 104.) terminum notum ignoto adhærentem, reliquos vero per illum multiplicatos, aut divisos indicare, ut si Æquatio sit $ax - bx = dc$ statim eam ita

$x = dc$ $x = c$
exprimunt —, item hanc —, ita $x = ac$.

Reg: VII. Si terminus ignotus sit elevatus ad

ad potentiam, ex illo, & cæteris terminis in utraque parte Equationis repertis, extrahenda est radix ejusdem gradus, cujus est potentia, ut si sit $xx = ab$, erit $\sqrt{xx} = \sqrt{ab}$, hoc est, $x = \sqrt{ab}$, verum de hujusmodi reductione alibi fusi.

Reg. VIII. Si terminus ignotus sit affectus signo $\sqrt{}$, is, & cæteri utriusque partis in Equatione termini elevandi sunt ad gradum ejus potentia, quem indicat exponens radice, & tum signum $\sqrt{}$ termino ignoto præfixum omititur, ut si sit $\sqrt{x} = ab$, erit $x = a^2 b^2$, sed, & de his suo loco prolixius.

Reg. IX. Si in utraque parte Equationis compareat idem terminus ignotus quomodo-cunque affectus, tum minor ignotus ad partem majoris (si major sit positivus) per Metathesim transferendus est, ut si sit $5x = ab + 2x$, erit per Metathesim $5x - 2x = ab$, seu $3x = ab$: e contra, si major ignotus sit negativus, ad partem minoris per Metathesim transferatur, ut si sit $2x = ad - 4x$, erit $2x + 4x = ad$, seu $6x = ad$.

Reg. X. Tyrones Analystas sæpe multum juvat reductio Equationis ad *nihilum*. Fit hæc reductio (ope Metathesis) transferendo omnes terminos tam notos, quam ignotos ad partem illam Equationis, in qua habetur major terminus ignotus positivus, & aut contra, ad partem minoris, si major sit negativus, ut si sit.

$10x - c = b + a + 4x - cx$,
erit $10x - c - b - a - 4x + cx = 0$,
hoc est $6x - c - b - a + cx = 0$, dein iterum (per Metathesim) omnes notos transferendo, erit $6x + cx = a + b + c$, & dividendo per $6 + c$ erit $x = \frac{a + b + c}{6 + c}$ per Reg. IV.

Reg.

Reg. XI. Si qui termini sint, qui se invicem destruere, vel per additionem, aut subtractionem coalescere possunt, termini perinde minuendi sunt, ut si sit

$x + x + b + x + c = a$, erit $3x + b + c = a$, & per Metathesim $3x = a - b - c$, & dividendo per 3, erit $x = \frac{a - b - c}{3}$ per Reg. IV.

Item si sit $5a + 3x = 5b - 3a + 2x$, erit reducendo ad nihilum (per Regul. X.)

$5a + 3x - 2x + 3a - 5b = 0$,
seu $x + 8a - 5b = 0$,
& per Metathesim $x = 5b - 8a$.

Reg. XII. Si occurrant termini (seu noti sint, seu ignoti) expressi per fractiones diversæ denominationis, reducendi sunt illico ad

eandem denominationem, ut si sit $\frac{x}{1} + \frac{x}{2} + \frac{x}{3} = c$, erunt reductæ per (§. 129.)

$\frac{12x}{24} + \frac{8x}{24} + \frac{6x}{24} = c$ seu $\frac{26x}{24} = c$, &

multiplicando per 24 erit $26x - 24c = 24x$, & per Metathesim $26x - 24x = 24c$, seu $2x = 24c$, & dividendo per 2, erit $x = \frac{24c}{2} = 12c$.

Cætera suis locis, & oretenus plura.

OPERATIO V.

§ 37. Equationis ad unum incognitam, & ab omnibus notis liberum reductæ, in numeros Resolutio, vel figuræ Constructio.

I. Cum solutio questionis per ipsam Equationem

mem obtineatur, in qua terminis ignotis ex una Equationis parte omnino solus, & liber ab omnibus aliis comparet, ex alia verò parte meri termini noti habeantur, nihil amplius laboris Analystæ superest, quam (si questio per numeros solvi debet) ut littera in valores suos numericos; pro quibus in Operatione II. substituta sunt, juxta expressionem Equationis reducta solvantur, ut si foret Equatio reducta,

$$x = a - b - c$$

& littera substituta fuissent. (per Ope

rationem II.) loco numerorum, Ex. gr. si fuisset $a = 485$, $b = 10$, & $c = 25$, eris Resolutio $x = 485 - 10 - 25$. hoc est $x = 450$ seu $x = 150$.

S

Si verò Equatio resolvenda sit in lineas, facienda est figura constructio, ut in Geometria docebitur.

II. Invenio valore termini ignoti, videat Analysta, an substitutio loco termini ignoti valore invento, conditionibus proposita questionis satisfiat; si ita, quod semper rite operantibus evenit, non sine voluptate animi virtutem Analysis admirabitur; si cū (si questio non fuit impossibilis) errorem se admisisse, deprehendens.

SCHOLION.

238. His Regulis universalibus, & in abstracto declaratis, cum Tyro Analysta aliquandiu exercitatus fuerit, ordo exigat, ut ingenii vires in questionibus primum quidem simplicioribus, dein magis reconditis, & subtilioribus ad Equationem redigendis, reducendisque tenet, quibus rite applicandis (insequentibus capitibus) quaerit brevitate, exemplis praelecebo, ac praemissis adhuc quibusdam scitu necessariis, veluti manu ducam, identidem commoneundo, si cetera mathematica frequentem exercitationem desiderant.

Acron, eam certò in questionum, & problematum resolutionibus cumprimis sedulam esse oportere, propterea, quod Ars Analytica non tam verbis, quam ipsamet praxi quotidiana, & formularum contemplatione seria, mentisque ad operationes acriter adversione condiscatur, nec laboris unquam penitebit, cum novis inventis (veluti totidem ingenii parvulus felix) eruditum orbem, non sine sincera animi voluptate, ad DEI Gloriam, læcupletabit.

CAPUT II.

Analysis Problematum simplicium, & determinationum, uno incognito affectorum.

DEFINITIO II.

239. Omne Problema, aut Questio est vel possibilis, vel impossibilis; Possibilis dicitur, cujus conditiones inter se non pugnant, adeoque solutionem admittunt, ut, si quaeratur dimidium de numero 6? est enim numerus 3. Impossibilis est, cujus conditiones aut sibi opponuntur contradictoriæ, aut unam impossibilem involvunt, ut, si quaeratur dimidium de numero 6, hæc adjecta conditione, ut id dimidium sit numerus par; cum dimidium de numero 6, tantum sit numerus 3, qui par esse nequit, conditio adjecta questionem reddit impossibilem.

SCHOLION.

240. Questionis impossibilitas, si ea ex conditionibus in questione appositis non illico reducat, per Reductionis regulas manifesta redditur, si enim terminus incognitus in Equatione reducta evadat negativus, hoc est, si sit æqualis meris cognitis negativis, aut, si sit æqualis radici imaginaria, problema propositum Analysta pronunciabit esse practicè impossibile, ut si foret $x = -4$, aut $x = \sqrt{-22}$.

R

DEFL.

DEFINITIO III.

241. Problema possibile aliud est *determinatum*, aliud *indeterminatum*; *Determinatum* dicitur, in quo tot habentur conditiones, quot quantitates ignotæ, seu quando (discussis conditionibus) tot formari possunt *Æquationes primariæ*, quot sunt incogniti diversi. *Indeterminatum* appellatur, cujus pauciores reperiuntur conditiones, quam quantitates diversæ incognitæ. His accedit problema *plusquam determinatum*, quando plures conditiones apponuntur, quam sint incognitæ, quod ultimum plerumque evadit impossibile, si adjectæ conditiones superflue sint inter se pugnantibus.

COROLLARIUM I.

242. Determinata problemata, determinatum etiam numerum solutionum admittunt; Indeterminata, quam plurimos solvendi modos habent, ut patebit inferius.

COROLLARIUM II.

243. Quando problema est determinatum, plures incognitæ ad unum reduci possunt, in Indeterminatis plures ignotas remanere est necesse, quarum una, aut altera (arbitrio Analystæ) determinanda est, per quam cæteræ determinantur, ut suo loco dicetur.

DEFINITIO IV.

244. Problemata tam determinata, quam indeterminata, alia sunt *simplicia*, *composita* alia. *Simplicia* sunt, cujus incognitus est *unius dimensionis*, id est, ad nullam potentiam elevatus, ut si sit $x = ab$. *Composita* dicuntur, quorum incognitus est duarum, vel trium, aut plurium dimensionum, id est, ad potentiam secundam, tertiam, &c. elevatus, ut si sit $xx = ab$, aut $x^3 = ac$.

SCHO-

SCHOLIUM.

245. Problemata tam simplicia, quam composita quandoque affecta sunt incognitis homogeneis tantum quandoque verò pluribus ignotis heterogeneis permiscetur de quibus suo loco specialius; hoc capite problematibus simplicibus determinatis, & uno, vel pluribus incognitis homogeneis affectis, ad praxim Analysis Tyrone manus ducam. Sic igitur Resolvendum.

PROBLEMA I.

Sempronius Parens conditò testamentò legavit ternis filiis *Mathia*, *Stephano* & *Alexio* summam aureorum 485, his conditionibus partientdam, ut *Stephano* natu medio, tot aurei obvenirent, quot *Mathia* natu maximo, & præter hos, 10 aureos plures censeret *Stephanus*, quam *Mathias*. *Alexius* quoque totidem, quot *Mathias*, & insuper adhuc 25 aureos obtineret.

Quæritur Legatum singulorum?

OPERATIO I.

Juxta regulas (215.) discutiendo statum questionis, & conditiones appostas intelligo. Primo: *Quæstio* n. hujus esse, ut singulorum filiorum legata summa reperiatur. Secundo: Clarum fit, si summam particularem *Mathiæ* legatam, notam haberem, jam quoque reliquorum legata in aperto essent, cum tam *Alexius*, quam *Stephanus* (demptis 10, & 25 aureis sup. rogatoriis) eundem cum *Mathia* aureorum numerum percipere debeant. Tertio: Video, præter 485 aureos, dari notos terminos 10, & 25 aureos.

His rite intellectis procedatur ad denominationem:

OPERATIO II. DENOMINATIO.

Sit summa Legata 485 = a, aurei 10 = b, aurei 25 = c, erit juxta conditiones problematis,

R2

Legā-

Legatum natu. maximi, seu Mathiæ = x

- - - natu. medii, seu Stephani = $x + b$

- - - natu. minimi, seu Alexii = $x + c$

Factâ rite hâc denominatione progrediendum est ad elocutionem quæstionis Algebraicam, seu ad formandam Equationem, quam condiciones ipsiusmet quæstionis suppeditant. Intellego enim singulorum filiorum legata particularia, in unam summam collecta, adæquare debere totam summam legatam, id est, legatum x Mathiæ, plus legato $(x + b)$ Stephani, plus legato $(x + c)$ Alexii, adæquat summam totalem a . Quam Equationem inventam eloquendo algebraicè. Sic ex primo:

OPERATIO III. EQUATIO: EXPRES:

$$x + x + b + x + c = a$$

Hanc Equationem juxta regulas Operat. IV. (§. 236.) de Reductione datas, tractando, reducere tantum debeo, donec obineatur Equatio, seu formula, in qua ex una parte Equationis terminus ignotus x omnino solus, ex altera verò parte meri cogniti habeantur. Itaque.

OPERATIO IV. REDUCTIO.

Per Reg. XI. (§. 236) reducitur ad hanc; $3x + b + c = a$

Et per Metathesim juxta Reg. III. erit $3x = a - b - c$
 dein per Reg. IV. dividendo erit $3x = a - b - c$
 utramque partem per 3
 hoc est per (§. 104.)

$$\begin{array}{r} 3 \quad 3 \\ x = a - b - c \end{array}$$

Cum habeatur x reductum, & solitarius ex una, ex altera verò parte meri cogniti, solutio quæstionis æ aperto est; si termini noti Equationis ultima juxta expressionem datam in numeros (pro quibus sit re substituta sunt) resolvantur. Erit itaque.

OPE.

OPERATIO V. EQUATIONIS REDUCTÆ RESOLUTIO.

$$x = 485 - 10 - 25 \text{ hoc est } x = 450, \text{ seu } x = 150.$$

3. Sunt ergo Legata Particularia:

Legatum natu. maximi, seu Mat: $x = 150$ hoc est $= 150$

- - natu. medii, seu Steph: $x + b = 150 + 10 = 160$

- - natu. min: seu Alexii $x + c = 150 + 25 = 175$

Summa omnium $3x + b + c = 450 + 35 = 485$

Quæ summa cum adæquet totam à Sempronio Parente legatam summam 485 aureorum, quæstionem recte solutam esse demonstrant.

SCHOLIUM.

246. Præluxi Tyronibus exemplo facillimo fusè deducto, quo viam demonstrarem, quæ deinceps intellegendum circa artem Analyticam, in quæstionibus difficilioribus ratiocinando exercere valeant; reliqua enim exempla (supponendo ratiocinium Analyticum) via brevissima resolvemus; Id interea velim nocere Tyrones, me iisdem fidelem suasorem esse, ut, tametsi hujusmodi quæstiones resolutionum numericarum, per Algebrae numerosam (id est, non substituendo literas pro numeris) tractari possint, & à plerisque tractentur Analytici; Præxim eorum minimè sequantur, verum semper literas pro numeris substituendas suas propterea, quod ultima resolutionum formula literis expressæ, utpote universales, modicum, & instrumentum sint Theorematum, & regularum repериundarum ut potebit alibi; dein, id commodi præterea habent literæ, quod harum ope molestissima cæteroquin numerorum reductiones evitentur, viæque brevissima scopum obineamus; accedit quod aptos reddant Tyrones Geometriam ope Algebrae tractandi, veramque scientiam, quæ idem universalibus comparatur; adipiscendi.

R3

PRO-

PROBLEMA II.

Cum aliquando in Macedonum colloquio mentio de singulorum ætate incidisset; Ego, inquit Alexander, Ephestionem meum antecedo annis 4; at Cyrus, ego vero amborum vestrorum ætatem vivo; Tum Calysthener: jucunda est mihi, ô Rex! isthæc ætatum commemoratio, Patris enim memoriam renovavit, qui cum annos vixisset 72, trium vestrum ætates compleverat.

Quæstio hac priori simillima, & eodem modo resolvenda, proponit querendas singulorum ætates. Fiat itaque discussis conditionibus apta denominatio.

Sint anni $4 = b$; anni $72 = a$

sicque ætas Ephestionis $= x$.

erit ætas Alexandri $= x + b$

ætas Clyti $= 2x + b$

Itaque quæstionem algebraicè eloquendo, ex conditionibus appostitis habebitur Equatio:

$$x + x + b + 2x + b = a$$

hoc est per Reg: XI. $4x + 2b = a$

& per Metathesim $4x = a - 2b$

& per Reg: IV. divid: per 4. erit $x = \frac{a - 2b}{4}$

RESOLUTIO IN NUMEROS

$x = \frac{72 - 8}{4}$, hoc est $x = \frac{64}{4}$, seu $x = 16$

Est igitur ætas Ephestionis $x = 16$ hoc est $= 16$

ætas Alexandri $x + b = 16 + 4 = 20$

ætas Clyti $2x + b = 32 + 4 = 36$

Summa ætatum $4x + 2b = 64 + 8 = 72$

Rectè igitur soluta quæstio.

PROBLEMA III.

Pythagoras Philosophus interrogatus, quotnam haberet discipulos? Respondit: Dimidia pars

pars meorum discipulorum Philosophiæ operam navat, pars quarta Mathesim audit, septima silentium tenet, adfunt præter hos 3 novitii sacris nostris mox initiandi.

Queritur numerus omnium Discipulorum, quo reperto innotescit quoque numerus Philosophorum, Mathematicorum, & silentium tenentium. Itaque Sint novitii 3 $= a$, summa omnium discipulorum $= x$ habebuntur ex conditionibus quæstionis-

$$\begin{array}{rcl} \text{Philosophi} & = & \frac{x}{2} \\ \text{Mathematici} & = & \frac{x}{4} \\ \text{Silentes} & = & \frac{x}{7} \end{array}$$

Hos terminos juxta conditionem quæstionis in Equationem ordinando.

$$\text{Erit Equatio prima: } \frac{x}{2} + \frac{x}{4} + \frac{x}{7} + a = x$$

Et reducendo fractiones ad eundem denominatorem.

$$\text{Erit per Reg: XII. } (8 \cdot 236) \frac{28x + 14x + 8x + a}{56} = x$$

$$\text{hoc est per Reg: XI. } \frac{50x + a}{56} = x$$

$$\text{Multi: per 56 erit per Reg: V. } 50x + a = 56x$$

$$\text{\& per Metathesim } 56a = 56x - 50x$$

$$\text{hoc est } 56a = 6x$$

$$\text{\& divid: per 6, erit per Reg: IV. } \frac{56a}{6} = x$$

RESOLUTIO:

$$\frac{56a}{6} = \frac{56}{6}, 3 = \frac{168}{6} = 28 \text{ hoc est } 28 = x$$

Fuerunt itaque Discipuli Pythagoræ universim 28

$$\text{Et hinc Philosophi } \frac{x}{2} = \frac{28}{2} = 14,$$

Mathe-

$$\text{Mathematici} \quad \begin{array}{r} x \\ 4 \end{array} \begin{array}{r} 28 \\ 4 \end{array} = 7.$$

$$\text{Silentes} \quad \begin{array}{r} x \\ 7 \end{array} \begin{array}{r} 28 \\ 7 \end{array} = 4.$$

$$\text{Novi} \quad \begin{array}{r} x \\ 7 \end{array} \begin{array}{r} 28 \\ 7 \end{array} = 3.$$

$$\text{Summa omnium} = 28.$$

Eodem modo tractantur quaecunque quaestiones, in quibus fracti habentur; noverit Tyrones, primam omnium operationum esse debere reductionem ad eundem denominatorem.

CAPUT III.

Resolutio Problematum in quibus plures occurrunt incogniti heterogenei.

Præter cætera hucusque dicta, noverint Tyrones artem totam huiusmodi Problemata solvendi (si determinati sint) in eo versari, ut incogniti, præter unum, eliminantur, & exterminentur omnes, in determinatis verò tot, quot possunt eliminari.

Obtinetur autem hæc eliminatio duobus modis:

247. I. Eliminatio obtinetur per substitutionem Aequalis pro Aequali, juxta Axioma III. (§. 222.), ut si dentur Aequationes: Prima, $y + 1 = 2x - 2$, & altera $y - 1 = x + 1$, velimus autem eliminatum y , reducantur ambæ Aequationes ad y solitarium juxta regulas reductionum.

Erit prima per Metathesin: $y = 2x - 3$

secunda per Metathesin: $y = x + 2$, & bine per Axioma III. (222.) substituendo loco y alter utram erit $x + 2 = 2x - 3$, in quo eliminatus habetur terminus y .

248. II. Eliminari potest per Additionem, aut Subtractionem totius Aequationis unius à tota A-

ta Aequatione altera, sed prius per Reductionem ad destructionem unius termini ignoti rite præparata, ut sit Prima, $x + y = a$ secunda $8x + 4y = b$ cupimus autem eliminatum y , quod cum in secunda multiplicatum per 4 compareat, primam per numerum 4 multiplicando aptare necesse erit.

$$\text{Eritque Prima} \quad 4x + 4y = 4a,$$

quæ jam sic aptata si subtrahatur

$$\text{nempe à secunda} \quad 8x + 4y = b$$

$$\text{Primam subtrahendo} \quad 4x + 4y = 4a$$

$$\text{erit Residuum} \quad 4x = b - 4a$$

in qua y eliminatum habetur.

SCHOLIUM.

Utra Methodus alteri præferenda sit, definire non licet, sed exercitatio Analytice jam hæc, jam alteram circumstantiæ quaestions usurpandam suadebunt, Itaque

PROBLEMA I.

Euclidis Geometrarum Principis Aenigma, quod Geometris olim proposuisse fertur, sic habet: Ibant, inquit Miles, & Asina vinum portantes, Asina ex dolore ponderis ingemiscebat, quod auditò, Miles: chara mater, inquit, quid ita lamentaris? mensuram mihi unam si dederis, duplo tuæ plus, quam tu sustulero; sin tu à me unam acceperis, idem, quod ego, pondus feres. Unus igitur utriusque, peritissime Geometra edicas volo. Itaque.

Discussis rite conditionibus, ac probe intellectis verbis M. li, fiat denominatio, sitque numerus mensurarum vini, quas gestat Miles = x

Numerus mensurarum Asina = y

jam ex conditione prima M. li; si Asina der Milo

RP. HOLL ELEM: MATH: TOM: I.

unam mensuram, habebit Mulus $y + 1$, & Asina habebit $x - 1$, cumque $y + 1$ dicatur esse duplum de $x - 1$, ut Aequatio habeatur, multiplicetur $x - 1$ per 2, erit $2x - 2$ duplum de $x - 1$, adeoque $2x - 2$ aequale $y + 1$

hoc est $y + 1 = 2x - 2$

Seu per Metathesim $y = 2x - 3$ A

Item ex secunda conditione; si Mulus det Asina unam mensuram, habebit Mulus $y - 1$, & Asina $x + 1$, sed tunc dicuntur habere uterque Aequales numero mensuras, ergo $y - 1 = x + 1$

per Metathesim $y = x + 2$ B

sed etiam Aequat. A erat $y = 2x - 3$ A

Ergo per Axioma III. (§. 222.) $x + 2 = 2x - 3$,

in qua eliminatum est y

itaque per Metathesim $3 + 2 = 2x - x$ hoc est $5 = x$

RESOLUTIO.

Inventus est valor $x = 5$, sed in Aequatione B est $y = x + 2$, ergo $y = 5 + 2$. Igitur Mulus habuit mensuras $y = 7$, Asina $x = 5$.

Nam Primo: si Asina portans 5 mensuras det unam Mulis portanti 7, habebit Mulus $7 + 1$, hoc est 8, & Asina habebit $5 - 1$, hoc est 4, sed 8 est duplum de 4, ergo prima conditio impleta habetur.

Secundo: Si Mulus habens 7 mensuras det Asinae 5 portanti, unam, habebit Mulus $7 - 1$, hoc est 6, & Asina $5 + 1$, hoc est etiam 6, seu numero Aequales, quae erat secunda conditio.

PROBLEMA II.

Caupona Praefectus, vini partim generosi, partim debilioris urnas complures cellario suo intulit, lucrum iustum facturum, si urnas singulas vini generosi pretio 42 grossorum, urnam vero debilioris 27 grossi: venumdaret; at enim vinum generosius, quia pretii majoris; debilius, quia gustui minus gratum, suis pretiis distrahere nequit,

quit, cupit itaque vina hae commiscendo vas 100 urnarum implere, hac conditione, ut urnam vini mixti grossis 30 (pretio nempe inter 42 & 27 grossi: medio) venumdando, idem lucrum reportaret, quod obtineret, si purum distrahere potuisset; Idcirco, ne vel se, vel emptores falleret, scire desiderat, quot urnae vini generosi, quorque debilioris accipiendae sint, ut vini misti emergant urnae 100, quarum singulae 30 grossis distrahantur.

Discussis rite conditionibus, fiat Denominatio.

Sit pretium urnae vini generosi 42 grossi: $= a$

pretium debilioris 27 grossi: $= b$

Pretium medium vini misti 30 grossi: $= c$

Vas vini mixti urnarum 100 $= d$

Urnæ accipiendae ex vino generoso $= x$

ex vino debiliore $= y$

Ergo ratione numeri urnarum juxta conditionem.

Problematis primam.

Erit Aequatio prima haec. $x + y = d$

& per Metathesim. $x = d - y$ A

Nam vero ratione pretii per conditionem secundam.

Erit Aequatio secunda. $ax + by = dc$

& per Metathesim. $ax = dc - by$

& dividendo per a erit $x = \frac{dc - by}{a}$ B

sed etiam in Aequat. Prima A est $x = d - y$

Ergo in Aequat. B. substituendo loco x. valorem aequalem $d - y$

Erit per Axioma III. (§. 222.) $d - y = \frac{dc - by}{a}$

& multiplicando per a, erit $ad - ay = dc - by$

per Metathesim $ad - dc = ay - by$

$ad - dc$

denique dividendo per $a - b$, erit $\frac{ad - dc}{a - b} = y$

ELEMENTA
RESOLUTIO IN NUMEROS.

$y = (42.160) - (100.30)$ hoc est $y = 4230 - 3000 = 80$

42 — 27 15
Itaque $y = 80$ urnæ, (Ni in Æquat. A est $x = d - y$
& $x = 20$ (seu $x = 100 - 80 = 20$.)

Summa $x + y = 100$ urnæ

Fam. 100 urnæ vini mixti (curvantur p r 30 grossi vendendo) faciunt 3000 grossos.

Sed etiam 80 urnæ per 27, faciunt 2160 grossi:

& 20 urnæ per 42, faciunt 840 grossi.

seu simul addend: 3000 grossi.

Ergo habetur adimpleta secunda conditio.

SCHOLION I.

253. Huiusmodi Problema, vocatur Mixtionis, vel Alligationis, habetque usum, & utilitatem amplissimam in Oeconomicis, Physicis, Pharmaceuticis, Chymicis &c. & universim in casu omni, quo duo miscibilia diversæ valoris, aut ponderis commiscenda sunt ita, ut emergat mixtum desiderati valoris, pretii, virtutis, probitatis, aut ponderis medii; ut Ex. gr. Si misceri debeat frumentum, vina, medicina, merces, diversa liquida chymica, item metalla &c. ad obtinendum mixtum valoris medii. Hinc Tyro Analysta ultimam Æquationem ——— = y memoria retinens, a — b

invenit huiusmodi questionem (duorum nempe miscibilium) facile solvet, si in proposita quavis questione, eandem nostram denominationem retineat, id est si rem datam maioris pretii vocet a, viliores = b, medianas = c, quantitatem datam mixti componendi = d, quantitatem denique ex viliori accipiendam = y

ad — dc
quibus denominatis, hanc formulam ——— = y, in a — b

numeros propositæ questionis resolvendo, solutione cuiusvis questionis illico reperiet, ut tentanti patebit.

SCHOLION II.

ad — dc

251. Hæc formulæ ——— = y est celebris illa a — b

Regula Arithmeticorum, quam Mixtionis, sive Alligationis nomine compellantes, licet jussu declarare contentur, nunquam satis ad caput demonstrant. Ceterum notent Tyrones, hoc & pleraque problemata, quæ vulgo per duos incognitos diversas (causa exercitii) resolvuntur, unico incognito ab exercitatis Analystis plerumque solvi. Sic in priori Problemate, si numerus urnarum vini debitoris vocetur y, loco x (numeri nempe urnarum generosioris) poni potest d — y, quod ipsam Æquatio prima A, attentum Analystam edocet. Reliqua mixtionum problemata, ad quæ plura, quam duo miscibilia ingrediuntur: ad problemata indeterminata pertinent, de quibus jam breviter.

CAPUT IV.

Resolutio Problematum Indeterminatorum.

252. Cognoscitur Problema aliquod propositum, esse ex genere indeterminatorum per (§. 241.)

In his Problematibus, ultima Æquatio duos plerumque, aut etiam plures complectitur incognitos, et si ab exercitato Analysta, quocunque denteur incogniti, semper ad duos saltem incognitos per substitutionem (æqualis pro æquali) juxta Axioma III. (§. 222.) reduci possint.

PROBLEMA I.

Sint distribuendi 240 fl. in Studiosos pauperes 50, hac conditione, ut singuli Theologi percipiant fl. 8, Philosophi singuli fl. 6. singuli Humanistæ fl. 2.

Quæritur quotnam esse debeant Theologi,
quot Philosophi, & Humanistæ?

Problema hoc indeterminatum, claritatis gratia
solvemus per algebram numerosam.

Fiat itaque denominatio.

Sint Theologi = x , Philosophi = y , Humanistæ = z .

Erit per conditionem primâ, Aequatio Prima hæc:

$$x + y + z = 50$$

Et per Metathesim $x = 50 - y - z$ A

Deinde per conditionem secundâ, Aequatio Secunda B.

$$\text{erit } 8x + 6y + 2z = 240$$

Per Metathesim $8x = 240 - 6y - 2z$ B.

Et multi: Aequat. A per 8, erit $8x = 400 - 8y - 8z$ A.

ergo per Axi. III. (222) $240 - 6y - 2z = 400$

$$-8y - 8z$$

Et per Metathesim $8z - 2z = 400 - 240 + 6y - 8x$

hæc est

$$6z = 160 - 2y$$

dividendo per 6 erit:

$$z = \frac{160 - 2y}{6}$$

Cum sit Indeterminatum, assumatur arbitrariè pro-
lisera y numerus 32, hoc est, sine Philosophi $y = 32$,
erunt (vult: formula) Humanistæ $z = \frac{160 - 64}{6} = 16$

Et consequenter Theologi $x = 2$; nam $32 + 16 + 2 = 50$, quæ est conditio prima.

Et præterea per conditionem secundam,

$$2 \cdot 8 + 32 \cdot 6 + 16 \cdot 2 = 240 \text{ ita ergo}$$

SCHOLION I.

Dixi (§. 242.) omne indeterminatum Problemæ
plures solutiones admittere, hinc in nostro Problema-
te, substituendo pro y diversos numeros (quos se-
quens Tabula exhibet) solutio invenietur, quæ iis-
dem conditionibus satisfacit.

TABU-

TABULA

Decem variarum solutionum Problematis antecedentis.

I. II. III. IV. V. VI. VII. VIII. IX. X.

$x = 2$	4	6	8	10	14	16	18	20	22
$y = 22$	29	26	23	20	14	11	8	5	2
$z = 16$	17	18	19	20	22	23	24	25	26
50	50	50	50	50	50	50	50	50	50

Ex singulis classibus hujus Tabulæ patet, quod o-
mnino indeterminatum Problema reduci possit ad deter-
minatum Problema complura; Sic si in nostro Proble-
mate præter conditiones jam positas, adjiciatur Ex-
gr: etiam hæc, ut Philosophi sint duplo plures, quàm
Theologi, & iidem Humanistæ tot, quot Philosophi,
patet ex contemplatione hujus Tab: nullam classem sa-
tisfacere his conditionibus, præter classem V. Unde
colligitur, Docentibus Analysim magno subsidio esse
Resolutionem Probl: indeterminatorum, cum ope ho-
rum, unica solutione campus formandi varia Proble-
mata determinata aperiat, quæ exercendis Tyroni-
bus suis deserviant, Tyrnibus verò via ostenditur
facillima sibi metipsis fabricandi Probl. mata determi-
nata, quibus se se exercent in Analysisi. Sed hæc de
indeterminatis sufficiant.

SCHOLION II.

253. Hæc revocantur omnia Problemata miscibi-
lium, quando plura dantur in seibilia, quàm duo.

CAPUT V.

De Resolutione Aequationum Quadraticarum.

DEFINITIO V.

254. Aequatio Quadratica, seu duarum di-
mensionum. aut secundi ordinis, dicitur, si in-
cognitus terminus sit Quadratus, ut si sit, $xx =$
 ab , vel $xx + ax = ac$.

SCHOLION.

255. Si exponent incogniti est 3, dicitur Aequa-

zio Cubica, aut tria dimensionis; si exponens incogniti est 4, quarti ordinis &c. Prætermittis Equationibus altiorum ordinum, quarum Resolutionem Analysis sublimior pluribus pertractat, nos præfixi temporis angustis limitibus conclusi, Regulas solvendi Equationes duntaxat Quadraticas strictim exponemus, Analystæ itaque Equationes $\square$ in binas distinguendo classes, quasdam dicunt Completas, Incompletas alias, aut Deficientes. Completae dicuntur, in quibus nullus deficit terminus ad expressionem Quadraticam requisitus, ut si sit $xx = ab$, aut $xx + 2ax + aa = bc$. Incompletae vocantur, si terminus tertius, (id est, quadratum partis unius radicalis) deficiat, ut si sit $xx + 2ax = ab$, in qua deficit terminus aa , ut constat ex (§. 182.) De utraque classe nunc brevibus.

REGULÆ

Discernendi an data quævis Aequatio quadratica sit completa, an incompleta.

256. Reg: I. Si in Aequatione incognitus quadratus solus habeatur. (seu is affectus sit cognito, seu non sit) neque præterea idem incognitus simplex in Aequatione reperiatur, huiusmodi Aequatio completa est; ut si sit $xx + ac = bd$, quia quadratum huiusmodi est monomium.

Reg: II. Si in data Aequatione præter quadratum incogniti termini, inveniantur idem incognitus simplex, affectus cognito, & præterea quadratum illius dimidii cogniti, quo incognitus simplex affectus est, Aequatio quoque completa erit; ut si sit $xx + 2ax + aa = bd$, in qua

habetur quadratum aa factum, de $\frac{—}{2}$ seu de $\frac{a}{2}$ quo affectus est secundus terminus $2ax$. Ratio hujus

hujus est, quia tale quadratum est factum ex $\sqrt{\text{binomia}}$, $x + a$, vel $x - a$, ut constat ex (§. 182.)

Reg: III. Si verò in Aequatione deficiat hoc quadratum, de dimidio factore secundi termini, seu si deficiat tertius terminus quadrati binomii, Aequatio incompleta, erit, & deficiens, ut si sit $xx + 2ax = dh$, aut $xx + ax = cd$, item $xx - 6x$

$= ac$, vel $xx + x = ab$, aut $xx + \frac{x}{3} = bc$, vel denique $xx + \frac{x}{c} = bb$. In Prima enim deficit $\square$

aa , in Secunda deest $\square$ ex $\frac{—}{6}$ hoc est $\frac{—}{4}$ in Tertia non habetur $\square$ ex $\frac{—}{2}$ seu de 3, quod est 9, in

Quarta deficit $\square$ ex $\frac{—}{2}$, hoc est $\square$ in Quinta deest $\square$ de dimidia $\frac{—}{3}$ seu de $\frac{—}{6}$, quod est $\square$ in

Sexta deficit $\square$ de dimidio $\frac{—}{c}$ seu de $\frac{—}{2c}$ id est $\square$ —

$\square$ —
4cc.

SCHOLIUM I.

257. Ut verò Tyro Analysta indicium certum habeat, an deficiat terminus; Reducat sibi datam Aequationem (prius tamen per Regulas Reductionis ad expressionem simpliciorum transformaram) ad Aequationem Nulli per Reg: X. (§. 236.) id est, omnes terminos tam cognitos, quam incognitos per Metathesin ita ad unam partem Aequationis transferat, ut inco-

T

gnisur

gnitus quadratus evadat positivus, quo facto contem-
plando terminos, videat, an ex dimidio factore co-
gniri, quo incognitus simplex afficitur, adsit $\square$, vel
absit? ut si foret $2ax = bc - xx - aa$, erit reducta ad
nihilum $xx + 2x + aa - bc = 0$, quæ completa com-
paret; item si sit $xx = aa + cx$, erit ad nihilum re-
ducta $xx - cx - aa = 0$, in qua deficit $\square$ ex — seu —
2 4

& ita de aliis.

SCHOLION II.

258. Notent Tyrones, quod si reducta ad Nihilum Æquatio sit huiusmodi; $xx - 2ax - aa + bd = 0$, hæc Æquatio non sit completa, cum $\square - aa$,
— 2a

utporè Imaginarium, produci non possit ex — seu
2

ex — a, ut constat ex (§. 175.) adeoque universaliter, si tertium membrum adsit, sed affectum signo—, id non pertinere cognoscitur ad expressionem quadraticam; adeoque illam deficientem esse; Nam si pertinere, tum quidem effici poterit positivum per translationem Metatheseos, sed tum iterum incognitus quadratus evadit imaginarius, quotiescunque autem incognitus evadit imaginarius, aut ejus Radix negativa, indicat, aut quæstionem, ex qua emerfit huiusmodi Æquatio, esse impossibilem, aut ab Analysta non rectè conceptam, & denominatam, aut etiam errorem in Reductione admissum, intelligendo, si quæstio in numeros resolvenda sit.

REGULÆ

Reducendi Æquationem Quadraticam incompletam, item affectam signo $\sqrt{}$.

259. Reg: I. Reducta Æquatione ad nihilum, transferantur iterum termini per Metathese-
sim

sim ad alteram partem Æquationis, remanentibus duobus terminis affectis incognito; ut si sit $xx + ax - b = 0$, erit $xx + ax = b$, quo facto, addatur utrique parti $\square$ de dimidio factore termini ax , qui est —, seu $\square -$, erit Æquatio completa

$xx + ax + \frac{a^2}{4} = b + \frac{a^2}{4}$, deinde extrahatur $\sqrt{}$
ex parte utraque, erit $x + \frac{a}{2} = (\sqrt{b + \frac{a^2}{4}})$ &
per Metatheseos transferendo $+$ —, erit $x =$
 $(\sqrt{b + \frac{a^2}{4}}) - \frac{a}{2}$, quæ est Æquatio Resolutoria. Idem est de aliis in Reg: III. (§. 256.) adductis.

SCHOLION I.

260. Meminisse velim Tyrones, dum ex $\square$ in-

cognito jam per supra datas Regulas completo, $\sqrt{}$
extrahitur, toties partem radicis cognitæ esse negativam, quoties secundus terminus negativus est, ut si

extrahatur $\sqrt{}$ ex hac Æquatione jam completa
 $xx - ax + \frac{a^2}{4} = bd + \frac{a^2}{4}$, erit $x - \frac{a}{2} = (\sqrt{bd + \frac{a^2}{4}})$
& non $x + \frac{a}{2} = (\sqrt{bd + \frac{a^2}{4}})$

SCHOLION II.

261. Si sit Æquatio completa; Reductio immediate per extractionem radicis abstrahitur, ut si sit

T 2

xx

$xx = ab$, erit Reducta $x = \sqrt{ab}$; item sit $xx = 2ax$
 $+ aa = bc$, erit extracta radice $x - a = \sqrt{bc}$, & per
 Metathesim $x = (\sqrt{bc}) + a$. Notent Tyrones,
 quantitates notas ex altera parte Equationis compa-
 rentes, quibus signum $\sqrt{}$ præfigitur, includendas esse
 parenthesi prius, antequam translatio termini cogni-
 ti ex parte termini incogniti fiat ad alteram partem,
 ne terminus cognitus hoc modo, post extractionem ra-
 dicis translatus, officiatur signo $\sqrt{}$.

262. Reg. II. Quemadmodum ad resolen-
 da Problemata $\square$, utimur extractione $\sqrt{}$, ita si
 occurrat Aequatio, cujus incognitus affectus est
 $\sqrt{}$, tota Aequatio elevari debet, ad potentiam se-
 cundam, seu ad $\square$, ut si foret $\sqrt{x} = a + b$, ele-
 vando utramque partem ad $\square$. erit $x = aa + 2ab$
 $+ bb$. Item si sit $\sqrt{ax} = b$, erit $ax = bb$, & divi-
 dendo per a , erit $x = \frac{bb}{a}$.

Sed enim hæc praxes jugis Resolutionum exerci-
 tatio facilius reddet. Itaque

PROBLEMA I.

Manlius miles cum sociis quibusdam è pugna
 redux, interrogatus à Marco Pisone, quotnam ho-
 stium sua stravisset manu? mea inquit, meo-
 rumque sociorum manu fortissima, cæsa hosti-
 um capita jacent 1296, id vero memoria dignis-
 simum, quod singuli nostrum tot straverimus
 hostes, quot tunc socii sumus. Quæritur quot fue-
 rint una cum Manlio milites? & quoniam hostes sin-
 guli straverint?

Discussis rite conditionibus fiat denominatio:
 Sit summa caesorum hostium $1296 = a$.
 Socii milites una cum Manlio $= x$

Igi-

Igitur cum singuli tot straverint hostes, quot
 fuerint socii, erit quoque numerus hostium à singulis
 seorsim caesorum $= x$

Ergo simul omnes straverunt ex hostibus summam xx .
 itaque Aequatio $xx = a$

& extrahendo $\sqrt{}$ erit $x = \sqrt{a} = \sqrt{1296} = 36$.
 fuerunt ergo cum Manlio socii 36, & singuli strave-
 runt ex hostibus etiam 36.

PROBLEMA II.

Isidorus Colonus Medienfis à designatis fun-
 dorum conscribendorum Quæstoribus interro-
 gatus, quotnam tritici metretas annis singulis
 suo in agro seminaret? respondit: Ego sex me-
 tretas plures ad conferendum agellum meum
 in sementem annis singulis spargo, quam An-
 dreas germanus meus Colonus Marburgensis,
 quæ mea metreta, si ita DEO largiente multi-
 plicarentur, ut singulæ tot producerent metretas,
 quot Andreas singulis annis in sementem spargit,
 inferrem annis singulis horreo meo metretas
 tritici 720.

Quæritur quot Andreas, quotque Isidorus metre-
 tas annis singulis in sementem spargant.

Discussis rite conditionibus, fiat denominatio:
 Sint itaque metreta $6 = a$, metreta $720 = b$
 sint metreta quas seminat Andreas $= x$
 ergo Isidorus seminat annis singul. $= x + a$

Fam. per conditionem Problematis

erit $(x + a) \cdot x = b$

hoc est $xx + ax = b$.

Igitur complendo quadratum per Reg. I. (§ 259.)

hoc est

Add. utrique parti $\square$, erit $xx + ax + \frac{aa}{4} = b + \frac{aa}{4}$

Et extrahendo $\sqrt[4]{x + \frac{a}{4}} = (\sqrt[4]{b + \frac{aa}{4}})$

& per Metathesim: $x = (\sqrt[4]{b + \frac{aa}{4}})^4 - \frac{a}{2}$

RESOLUTIO IN NUMEROS.

$$x = (\sqrt[4]{720 + \frac{36}{4}})^4 - \frac{6}{2}$$

hoc est $x = (\sqrt[4]{729})^4 - 3 = 27 - 3 = 24$

Itaque

metretæ, quas seminat Andreas $x = 24$ hoc est 24

quas seminat Isidorus $x + a = 24 + 6 = 30$

Jam si multiplicentur 30 per 24. habebitur productum 720 Metretæ.

Rectè igitur soluta quæstio.

SCHOLION

265. Hæc erant, quæ de Resolutionibus Problematum, tanquam prima Rudimenta summarim duntaxat adducere poteram; supersunt multa, eaque singularia, quæ ad sublimiorem Analysim viam sternerent, quibus præscripta brevitate compulsus supersedere cogor, ne tamen utilitati meorum Tyronum deforem, quorum nunquam non studiosus existi, idcirco binis quinquagenis selectissimorum Problematum Analyticorum in numeros solvendorum, singularibus paginis, sub nomine: Exercitationum Analyticarum typo cedendis; si DEO O. M. visum fuerit, Tyronum sciendi cupiditatem accendam; & Quæstionibus partim applicatis, usque tum in Physicis, tum Oeconomicis per quàm utilissimis, partim Abstractis Arithmetica, & Geometriæ inservientibus, non injucundum campum aperiam se se privatis in hæc exercendi, certo enim consilio; Problemata quæ

quædam asseram, quæ primas Aequationes (denominatione factâ) contineant, atque una ultimam duntaxat reductam exhibeant, ut nempe Reductionem maxime proprio tractantes, praxim Regularum (§. 236) imbibant. Quædam verò sola Quæstione proposita fi-
nientur ut in reperiendis primis quoque Aequationibus dexteritatem, ingeniumque suum Tyro periclitari valeat. Ordo jam postulat, ut parte ultima, utilissimam, summèque necessariam proportionum doctrinam complectente, opusculum concludamus; de qua jam brevissimè.

FINIS PARTIS III.



ELEMENTORUM ALGEBRÆ PARS IV.

*De Proportionibus, Progressionibus, Uſu
Regule auræ, Inventione Theorematum, ac
Problematum.*

Nihil per universam Mathesim, & eidem fororior nexu junctissimam Philosophiam naturalem, cæterasque liberalium artium scientias magis necessarium, nihil in omni vitæ humanæ commercio magis esse utile, atque *Proportionum scientiam*, nemo, (nisi ignarus) inficiabitur. Cum enim DEUS O. M. quidquid omnipotente suo decreto ex abyſſo nihili produxit, omnia in *Pondere, Numero, & Mensura* creaverit, nihil in creatis recte cogitaveris, nihil recte egeris, si in sacras proportionum leges pecces; cogita *Pulchrum* cogita *Solidum, Scabile, Fecundum, Utile, Mirum, commodum, &c.* & curiosus quære rationem, cur hæc ita potius sint, quam secus; profecto, duce natura, fatebere dicendo: *Quæ recta sunt, habere proportionem ad invicem, quæ secus, hæc carere.* Verum ais, at quid dicas, nescis, si doctrinam ignoras proportionis; Hæc nempe est (ut metaphora utar) medulla illa, atque anima mathematica stupendarum effectrix rerum. Hæc illa methodus ratiocinandi, argumentandique ratio planè subtilissima, solidissima, certissima, brevissimaque e proportionem Geometrica petita, qua, tanquam

quam *Logica*, cæteræ fere omnes, circa res naturales versantes disciplina perficiuntur, atque consistunt, quam si sustuleris, scientias, artesque existinxiſti, pulchrumque vitæ humanæ commercium in monstrum chaoticum horrendum, atque terribile deformasti; de hac itaque summè necessaria doctrina hac quidem parte in compendio-

CAPUT I.

De Ratione tam Arithmetica, quam Geometrica.

DEFINITIO I.

264. *Ratio*, dicitur duarum quantitatum homogenearum comparatio, vel relatio, aut respectus ad invicem. Hujusmodi comparatio, sive *Ratio duplex est, Ratio nempe Arithmetica, & Ratio Geometrica.*

DEFINITIO II.

265. *Ratio Arithmetica*, dicitur comparatio duarum quantitatum homogenearum, quoad excessum, vel defectum; ut si comparentur inter se numeri, 4 & 12, quot nempe unitatibus minor sit numerus 4, quam 12, aut numerus 12 major, quam 4. *Excessus* hic, vel *defectus*, vocatur *Differentia*; sic excessus numeri 12 supra 4, qui est 8, vocatur *Differentia*; innotescit hæc differentia per subtractionem.

HYPOTHESIS I.

266. *Ratio Arithmetica designatur, vel exprimitur ita: a, b, vel 4, 12, id est inter quantitates comparatas ponendo (,) & differentiam locando supra comma, vel etiam a — b.*

DEFINITIO III.

267. *Ratio Geometrica*, est comparatio duarum

rum quantitatum homogenearum, quoad quotitatem; ut si consideremus duos numeros, *Ex. gr.* 12 & 4, quoties nempe 12 contineat numerum 4; vel quoties numerus 4 contineatur in 12, quæ quotitas per divisionem innotescit; Quotus vero, qui indicat quoties una quantitas alteram continet: vel in ea continetur, appellatur *Exponens*, vel *Nomen Rationis*, ut in dato Exemplo foret numerus 3.

HYPOTHESIS II

268. Ratio Geometrica rectè exprimitur per *Hypothefim* Divisionis (§. 30.) traditam, ut

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} \text{ aut } 12 : 4, \text{ in qua exponens Rationis, seu quotus m loatur super duo puncta.}$$

SCHOLION.

269. Rationem Geometricam rectè exprimi per banc *Hypothefim*, patet ex definitione Rationis Geometricæ (§. 267.) unde liquet eam etiam rectè sic

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} \text{ exprimi } \frac{a}{b} \text{ vel } \frac{c}{d}, \text{ Sed modo priore usitatius.}$$

DEFINITIO IV.

270. Quantitates, quæ comparantur, (tam in Ratione Arithm: quam Geometr.) vocantur *Termini*; & quidem terminus primus, qui comparatur, seu sinistram tenens, vocatur *Antecedens*; secundus, vocatur *Consequens*; sic in hac Ratione $a : b$, *Antecedens* est *a*, *Consequens* verò *b*.

DEFINITIO V.

271. Ratio Geometrica *Majoritatis*, vel *Multipla*, dicitur, quando *Antecedens* est major

suo *consequente*, ut si sit $12 : 4$ & in specie *Dupla*, si exponens est 2, *Tripla*, si exponens 3 &c.

Ra-

Ratio verò *Minoritatis*, vel *Submultipla* appellatur, dum *Antecedens* est minor suo *consequente*, ut si sit $4 : 12$, in hac exponens semper est fractus. Ratio denique *Æqualitatis* est, quando *Antecedens* est æqualis suo *consequenti*, ut $4 : 4$, hæc postrema peculiarem considerationem non habet in doctrina proportionum.

COROLLARIUM.

272. Quoniam Ratio Geometrica est comparatio quoad quotitatem, (§. 267.) sequitur in omni Ratione Geometrica *Antecedens* esse *dividendum*, *consequens* *divisorem*, & *exponentem* Rationis. Quorum: unde consequitur (cum expressio fractionum sit expressio divisionis, & hæc sit expressio Rationis Geometricæ) quod omnis fractio verè sit Ratio Geometrica *Minoritatis*, in qua *Numerator* est *Antecedens*, & *De-*

nominator *consequens*, Nam $\frac{a}{b}$, idem est ac $\frac{a}{b}$

$4 : 12$. Præterea quod omnis fractio spuria sit Ratio Geometrica *Majoritatis*, aut saltem *Æqualitatis*, ut si sit $\frac{12}{4}$, quod idem est ac $12 : 4$.

SCHOLION.

273. Pro diversitate Exponentium Rationes Geometricæ varias sortiuntur denominationes, &

quidem in Ratione Majoritatis, l. si exponens est 1—

2
1
dicitur: Sesqui altera, ut $3 : 2$. Si exponens est 1—

3
dicitur sesqui tertia, ut $4 : 3$ &c. quæ denominationes

U₂ nes

nes naturam denominatorum sequuntur, cum addito

¹
sesqui. Ut sesqui quarta, s¹ $1 - \frac{1}{4}$, sesqui quinta s¹
⁴
 $1 - \frac{1}{5}$ &c. II. Si exponens sit unitas, cum fractione habente

⁵
numeratorem majorem unitate, dicitur super-

²
partiens; ut si sit exponens $1 - \frac{1}{2}$, erit superbipar-

³
tiens tertias, ut in hac $5:3$. Si exponens sit $1 - \frac{1}{3}$

⁴
supertripartiens quartas &c. Eadem denominationes manent in Ratione Minoritatis respectu exponen-

¹
tium, presigendo particulam Sub, ut $4:8$, cujus
⁸
exponens est $1 - \frac{1}{8}$, seu dicitur Subsesqui altera. Sed

²
hac, ut ad doctrinam proportionum nihil faciunt, iam
salus notitia causa adnotasse sufficiat.

DEFINITIO VI.

274. Rationes Geometricæ Equales dicuntur, si eosdem habeant exponentes, & vicissim.

^m ^m ⁴ ⁴
Sic $a:b$, & $c:d$, item $8:2$, & $12:3$ Equales sunt
ē contra Major dicitur Ratio, quæ exponentem
habet majorem, ut $6:2 > 8:4$, Minor verò cu-
jus exponens minor est; ut $8:4 < 6:2$.

SCHOLIUM.

275. Eodem modo Rationes Arithmetica Equales, vel Majores, aut Minores dicuntur relatè ad differentiam rationum, sic $3, 7 = 2, 6$, item $3, 8 > 4, 7$ &

$$4, 7 < 3, 8.$$

THE-

THEOREMA I. FUNDAMENTALE.

276. PROP: In omni Ratione Geometrica Productum ex termino consequente in exponentem, æquale est termino antecedenti, ut si sit
^m
 $a:b$, dico; $mb = a$.

DEMONSTRATIO.

In omni Ratione Geometrica Antecedens est dividendus, consequens divisor, & exponens est Quotus, per (§. 272.) sed factum ex divisore in Quotum æquatur dividendo per (§. 61. Arith.) ergo. Q. E. D.

COROLLARIUM.

277. Hinc per Axioma III. (§. 222.) loco Antecedentis, semper substitui potest Consequens multiplicatus per Exponentem. Sic loco $a:b$,
^m
scribi potest $mb:b$. Nam — dat quorum m , quod ipsum numeri pro literis substituti declarant, sic $6:3$, idem est ac $3.2:3$, nam $3.2 = 6$.

THEOREMA II. FUNDAMENTALE.

278. PROP: In Ratione Arithmetica Summa ex termino Minore, & Differentia est æqualis termino Majori, ut si sit a, b vel $4, 7$, erit $b + d = a$, aut $4 + 3 = 7$.

Demonstratio petitur ex (§. 43. Arith.)

THEOREMA III.

179. PROP: Duæ Quantitates, habentes eandem Rationem ad unam tertiam, æquales sunt, & vicissim.

DEMONSTRATIO.

Sint quantitates a , & d , quæ ad eandem b , dicant eandem Rationem, erunt itaque $a:b$, &

$d : b$, dico esse, $a = d$. Nam $a = mb$, & $d = mb$ per (§. 276.) ergo per (§. 222.) $a = d$. Q. E. D.

CAPUT II.

De Proportione Geometrica.

DEFINITIO VII.

280. Proportio est duarum Rationum *Æqualitas*; & in specie, Proportio Geometrica est duarum Rationum eodem exponentes habentium

Æqualitas, ut si sit $a : b$, & $c : d$, item $8 : 4$, & $6 : 3$. Proportio Arithmetica est duarum Rationum eandem *differentiam* habentium *Æqualitas*, ut si sit a, b , & c, f , aut $5, 3$, & $7, 9$.

COROLLARIUM.

Omnis itaque Proportio quatuor terminis constat. Et hinc recte exprimitur per sequentem hypothesein.

HYPOTHESIS III.

281. Proportio Geometrica sic exprimitur, $a : b = c : d$; vel $8 : 4 :: 6 : 3$, & enunciat; a est ad b , sicut c est ad d , aut sicut a se habet ad b , ita c se habet ad d ; Arithmetica sic exprimitur; $a, b = c, f$, aut $3, 5 = 7, 9$.

SCHOLIUM.

283. Dilata tantisper doctrina Proportionis Arithmetice, quæ habita scientia Proportionis Geometricæ facilius intelligitur, hoc capite solius Proportionis Geometricæ doctrinam proponemus.

DEFINITIO VII.

284. Proportio continua dicitur, dum terminus Consequens Rationis primæ est terminus Antecedens secundæ; ut $a : b = b : c$, vel $8 : 4 = 4 : 2$. Discreta appellatur, dum Rationum Antecedentes diversi sunt, ut $a : b = c : d$, vel $8 : 4 = 6 : 3$.

HY-

HYPOTHESIS IV.

285. Proportio continua exprimitur ita, a, b, c , vel etiam præfixo signo $::$ (§. 38.) ut $:: a, b, c, d$. &c. enunciat; a est ad b , sicut b est ad c , sicut c est ad d &c.

THEOREMA IV. FUNDAMENTALE.

286. PROP. In omni Proportione Geometrica, factum Extremorum (id est termini primi cum ultimo) est æquale facto Mediorum (seu secundi cum tertio.) Nempe si sit, $a : b = c : d$, erit $ad = bc$.

DEMONSTRATIO.

Exprimatur cum exponentibus, ut sit

$a : b = c : d$, & per (§. 277.) substituendo mb loco a , & md loco c , erit eadem proportio, $mb : b = md : d$, sed in hac factum extremorum est mb, d , & factum mediorum est b, md , hoc est $mbd = bmd$, Ergo etiam $ad = bc$ per (§. 221.) Q. E. D. Aliter; cum sit $a = mb$, & $c = md$ per (§. 276.) substituuntur hi valores in Equatione $ad = bc$, & habebitur $mbd = mdh$. Q. E. D. Declaratur sit $8 : 4 = 6 : 3$, erit $8 \cdot 3 = 4 \cdot 6$, id est $24 = 24$.

SCHOLIUM.

287. Hoc Theorema esse basim reliquorum fere omnium Theorematum, ac Problematum Proportionis, præcipuumque fundamentum inveniendarum primarum Equationum Analyticarum Tyrones nosse volo. Ex hoc enim præter cetera (ope Analysis) sequentia tria utilissima, Problemata reperta sunt. Primum est celeberrima illa Regula Trium, quæ etiam ob summam utilitatem, maximumque in scientiis, vitæ quæ humane commercio usam, merito nomen obtinuit Regule Aureæ; de qua Cap. V. Secundum Problema non minus est; datis duobus terminis invenire Tertium. Et denique III. Problema est, datis duobus invenire medium. Itaque

ELEMENTA PROBLEMA I.

288. PROP: Datis tribus terminis invenire quartum proportionalem; seu invenire Regulam auream.

RESOLUTIO.

Sit Primus = 2, Secundus = b, Tertius = c, Quartus quaesitus = x, erit proportio a:b = c:x, & per Theor: Anteced: ax = bc, & per Reg: IV. (§. 236.) dividendo utramque partem per a, habebitur $x = \frac{bc}{a}$, quae ultima Aequatio, utpote Resolutoria

hoc Problema eloquitur. Quartus x, est aequalis facto ex termino secundo b, in Tertium c, & diviso per Primum a; id est: Si vis invenire quartum Proportionalem, multiplica secundum cum tertio, & factum divide per Primum, Quotus erit quartus Proportionalis; quae verba sunt ipsissima, quibus Arithmetici regulam auream edocent, à quibus, si quaeras, cur non Primus cum Tertio multiplicari debeat, & dividi per Secundum; hanc rationem rogando actum ages, ni Analysis edocti sint, cui regulas suas Arithmetica repertas, demonstratasque

debet. Notandum: Cum sit quartus $x = \frac{bc}{a}$ semper

loco termini quarti substitui potest per (§. 222.) tertius multiplicatus per secundum, & divisus per

primum, eritque proportio a:b = c:—

PROBLEMA II.

289. PROP: Datis duobus terminis invenire Tertium continue proportionalem.

RESOLUTIO.

Sit Primus = a, Secundus = b, & Tertius quaesitus

ficus = x, erit proportio; a:b = b:x, & per Theor: (§. 286.) ax = bb, & per Reg: IV. (§. 236.) $x = \frac{bb}{a}$

hoc est:

Quadratum termini Secundi dividatur per Primum, quotus erit Tertius quaesitus, ut si sit 2:4 = 4:x, erit 2x = 16, & $x = \frac{16}{2} = 8$: id est 2:4 = 4:8.

PROBLEMA III.

290. PROP: Datis terminis duobus invenire medium continue proportionalem.

RESOLUTIO.

Sit Primus = a, Tertius = b, Medium = x, erit proportio, a:x = x:b, & per Theor: (§. 286.) xx = ab, & extr: ab:ndo $\sqrt{\quad}$ per Reg: VII. (§. 236.) erit $x = \sqrt{ab}$

$\sqrt{ab}$, hoc est: ex facto termini Primi in Tertium extrahatur radix quadrata, erit haec medium proportionale, ut si sit, querendus inter numerum 2 & 8, medius, erit 2:x = x:8, hoc est xx = 16, & $x = \sqrt{16} = 4$, est ergo 2:4 = 4:8.

THEOREMA V. FUNDAMENTALE.

291. PROP: Si factum extremorum est aequale facto mediorum, factores erunt reciproce proportionales; ut si sit ad = bc, erit a:b = c:d, hoc est, si in producto ad, assumatur factor a, (arbitrarie) pro primo termino proportionis, tunc ejusdem producti ad, alter factor d poni debet pro quarto; factores vero alterius producti bc, nempe b & c poni debent loco medio.

Hac propositio (utpote conversa Theorematis IV) nova Demonstratione non eger.

COROLLARIUM I.

292. Duorum itaque productorum aequalium

RP. HOLL ELEM. MATH. TOM. I.

factores solvi possunt in proportionem reciprocam, eamque variam, ut si detur $abc = dgf$, erit proportio reciproca, $a:f = dg:bc$, vel $a:g = df:bc$, aut $a:df = g:bc$ &c. quæ resolutio insignem usum habet in Analyſi ad inveniendâ Theoremata.

COROLLARIUM II.

293. Quoniam factores in proportionem reciprocam variè disponi possunt, sequitur variâ inde enasci terminorum transpositiones manente proportionē; manent autem termini proportionales, si eorum factum extremorum sit æquale facto mediorum per (§. 286.) hinc, ut in subiecta Tabula (exhibente variâ terminorum transpositionem proportionalem) demonstretur factum extremorum esse æquale facto mediorum, nullo alio medio opus est, quam ut (per Theorema I. §. 276.) loco literæ a , ponatur mb , & loco literæ c substituatur md . Sit itaque

	Algebraicè.	Numericè.
	$ad = bc$	$8.3 = 6.4$
erit $a:b = c:d$		$8:4 = 6:3$
Alternando	$a:c = b:d$ seu permutando	$8:6 = 4:3$
Invertendo	$c:a = d:b$	$6:8 = 3:4$
Iterum Altern.	$c:d = a:b$	$6:3 = 8:4$
Item Algebraicè.		
Sit	$a:b = c:d$	
Dividendo	$a-b:b = c-d:d$	
Componendo	$a+b:b = c+d:d$	
Convertendo	$a:a-b = c:c-d$	
Mixtim	$a+b:b = a-b=c+d:d = c-d$	
Item	$a+b:c = b+d = a:b$	
Aut	$a-e:b-d = a:b$	

Item

Item, Numericè.

Sit	$8:4 = 6:3$
Dividendo	$8-4:4 = 6-3:3$
Componendo	$8+4:4 = 6+3:3$
Convertendo	$8:8-4 = 6:6-3$
Mixtim	$8+4:8-4 = 6+3:6-3$
Item	$8+6:4+3 = 8:4$
Aut	$8-6:4-3 = 8:4$

Quæ omnes proportionēs iterum *Alternando*, & *Invertendo* &c. variè permutari possunt, adeo ut hæc exigua Tabella octo insignia Theoremata complectatur.

SCHOLION.

294. Quemadmodum Theorema IV. unicum fere est fundamentum omnium proportionum, harumque ope rependiendarum primarum Equationum per Synthesin, ita Theorema V. locus communis habetur inveniendarum Theorematum, ac Problematum per Analysisin, ut oretenus, & suo loco plura dicentur.

THEOREMA VI.

295. PROP: Quæ sunt proportionalia uni Tertio, sunt etiam proportionalia inter se, ut si sit $a:b = c:d$,

& $e:f = c:d$, erit etiam $a:b = e:f$.

Demonstratio patet ex (§. 286.) & numericis substitutis demonstratur.

THEOREMA VII.

296. PROP: Si quatuor termini proportionales, multiplicentur per alios quatuor ipsis correspondentes proportionales, facta erunt proportionalia.

DEMONSTRATIO.

Sit $a:b = c:d$

& $e:f = g:h$, dico fore $ae:bf = cg:dh$, nam sub-

X 2

stitu-

fituendo per (§. 277.) loco antecedentium, consequentes per exponentes multiplicatos, erit: $mbnf:bf = m\bar{a}nb:db$, in qua factum extremorum æquale facto mediorum per (§. 286.) ergo. Idem in numeris patet.

COROLLARIUM.

297. Hinc si Radices sunt proportionales, erunt etiam proportionales, earundem Quadrata Cubi, &c. seu universaliter, earundem potestates quæcunque similes.

THEOREMA VIII.

298. PROP: Si quatuor Termini proportionales dividantur per alios ipsis correspondentes proportionales, quoti erunt proportionales.

DEMONSTRATIO.

Sit $ae:bf = cg:db$

& divis. $e:f = g:b$, erit $a:b = c:d$, ut patet.

COROLLARIUM.

299. Quadratorum, Cuborum, & universim potestatum similium radices similes, sunt proportionales.

THEOREMA IX.

300. PROP: Rationes *Æquemultiplex*, (hoc est per eandem quantitatem multiplicatæ) item Rationes *Submultiplex* (seu per eandem quantitatem divisæ) sunt, ut simplæ, hoc est, simplis proportionales.

DEMONSTRATIO.

I. Sit $a:b$, cujus tam antecedens, quam consequens multiplicetur per d , dico fore $ad:bd = a:b$. Nam per (§. 286.) $abd = abd$. Quod erat primum.

II. Sit $ad:bd$, & dividatur uterque terminus per d , erit $\frac{ad}{d}:\frac{bd}{d} = a:b$, ut patet ex (§. 35.) idem est in numeris.

Nam

Nam sit $6:3$, & multiplicentur per 4, erit $24:12 = 6:3$, item dividantur $24:12$, per 3, erit $8:4 = 6:3$.

THEOREMA X.

301. PROP: Si sint duæ proportionēs, in quibus (sibi invicem subscriptis) lineæ ad inæquales quantitates ductæ; sunt *Æquedistantes* seu parallelæ, erunt hæ quantitates proportionales ex *Æquo*.

DEMONSTRATIO.

Sit Prima $a:b = c:d$

Secunda $b:f = d:g$, dico fore $a:f = c:g$ nam alternando utramque.

erit Prima $a:c = b:d$

Secunda $b:d = f:g$, ergo per (§. 295.) $a:c = f:g$, seu altern: $a:f = c:g$ Q.E.D.

IN NUMERIS.

Sic $12:6 = 8:4$

$6:3 = 4:2$, erit $12:3 = 8:2$, ut patet ex (§. 286.)

THEOREMA XI.

302. PROP: Si in duabus proportionibus sibi invicem subscriptis, lineæ ad inæquales quantitates ductæ; sint *Convergentes*, erunt hæ quantitates proportionales ex *Æquo perturbato*.

DEMONSTRATIO.

Sit Prima $a:b = c:d$

& Secunda $b:f = g:c$, dico fore $a:f = g:d$, nam in Prima $ad = bc$, & in Secunda $bc = fg$, per (§. 286.) ergo per (§. 221.) $ad = fg$, sed hæc resolvitur in hanc $a:f = g:d$ per (§. 291.) ergo. Q.E.D.

X 3

IN

ELEMENTA
IN NUMERIS.Sit $12:6 = 8:4$

& $6:3 = 16:8$, erit $12:3 = 16:4$, ut patet
ex (§. 286.)

THEOREMA XII.

303. PROP. Si in duabus proportionibus
Primi Antecedentes, & Ultimi Consequentes, vel
vicissim, æquales sunt, erunt reliqui termini re-
ciprocè proportionales.

DEMONSTRATIO.

Sit $a:b = c:d$

$a:f = g:d$, dico fore $b:f = g:c$. Demon-
stratio eadem, quæ Theorematis prioris.

IN NUMERIS.

Sit $12:6 = 8:4$

$12:3 = 16:4$, erit $6:3 = 16:8$, ut patet
ex (§. 286.)

THEOREMA XIII.

304. PROP. Si in duabus proportionibus
bini antecedentes, vel bini consequentes, æquales
sunt, erunt reliqui termini proportionales.

DEMONSTRATIO.

Sit $a:b = c:d$ erunt $a:c = b:d$
 $a:f = c:g$ altern. $a:c = f:g$

ergo per (§. 295.) $b:d = f:g$. Q.E.D.

IN NUMERIS.

Sit $12:6 = 16:8$

$12:3 = 16:4$, erit $6:8 = 3:4$, ut patet
ex (§. 286.)

THE-

THEOREMA XIV.

305. PROP. Si sint quotcunque termini
proportionales, erit summa omnium Antecedenti-
um, ad summam omnium consequentium, ut quisvis
antecedens ad suum consequentem.

DEMONSTRATIO.

Sit $a:b$

erit $a + c + f : b + d + g = a : b$,
& $c : d$ substituendo loco $a + c + f$, eorum-
dem valores per (§. 277.) erit mb
& $f : g$ $+ md + mg : b + d + g = mb : b$, sed
in hac per (§. 286.) est

$mbb + mdb + mgb = mbb + mbd + mbg$. er-
go. Q.E.D.

IN NUMERIS.

Sit $12:6$

$16:8$ erit $12 + 16 + 4 : 6 + 8 + 2 = 12:6$
 $4:2$ hoc est, $32:16 = 12:6$, ut patet
ex (§. 286.)

SCHOLIUM.

306. Quæ hucusque dicta sunt, pertinent ad pro-
portiones ortas ex rationibus simplicibus, supersunt
quædam in compendio referenda de Rationibus com-
positis, & harum proportionibus, ac progressionibus,
de quibus tamen pluribus in Geometria tractabitur.
Itaque.

CAPUT III.

De Ratione Composita, & Progressione Geome-
trica continua.

DEFINITIO VII.

307. Ratio Composita dicitur comparatio Pro-
ducti ex antecedentibus duarum, vel plurium
Rationum simplicium orti, cum Producto ex
consequentibus earundem Rationum facto; ut
fi

sint duæ Rationes simplices $a:b$ & $f:g$, erit productum ex antecedentibus af , productum ex consequentibus bg , & hinc Ratio Composita $af:bg$. Idem est in numeris.

THEOREMA XV.

308. PROP. Exponens Rationis Compositæ est Productum omnium exponentium, quæ datam rationem compositam constituunt.

DEMONSTRATIO.

Sit Prima $a:b$ erit ratio composita $af:bg$ cujus
& Secunda $f:g$ exponens mn .

Nam substituendo per (§. 277.) mb loco a & ng loco f , erit Ratio composita eadem $mnbg:bg$, sed hujus exponens est mn , utpote quotus per (§. 267.) ergo. Q. E. D.

IN NUMERIS.

Sit $8:2$ erit Composita $8:10:5:2$, hoc
 2 est $80:10$, cujus exponens est
 $10:5$ $8=4.2$.

COROLLARIUM I.

309. Hinc I. In Ratione composita, orta ex duabus Rationibus simplicibus æqualibus (hoc est, habentibus eundem exponentem) Exponens semper est quadratum exponentis simpli-

cis, ut si sit composita $ac:bd$ orta ex duabus Rationibus $a:b$ & $c:d$, habentibus eundem exponentem m , erit mm , vel m^2 , exponens compositæ $ac:bd$; qui exponens mm , est Quadratus de m

rationis simplicis $a:b$; & hinc hujusmodi Ratio composita, vocatur Ratio Quadratica, & au-
Dupli-

Duplicata (NB. non dupla) diciturque Antecedens Rationis hujusmodi. Ex. gr. Antecedens ac , dicere ad consequentem suam bd rationem duplicatam, aut quadraticam, Antecedentis simplicis a , ad consequentem suam b , hoc est, ut $aa:bb$. II. Eodem modo Exponens rationis compositæ, orta ex tribus Rationibus simplicibus æqualibus, est Cubus exponentis simplicis; diciturque Ratio Triplicata, (non Tripla) & Antecedens rationis hujus compositæ ad suam consequentem dicitur esse in Ratione Triplicata Antecedentis simplicis ad suam Consequentem. Eodem modo intelligenda est Ratio quadruplicata &c.

COROLLARIUM II.

310. Quoniam in proportionem Geometricam continua idem omnium Rationum exponens est, per (§. 284.) sequitur, quod primus sit ad tertium in Ratione duplicata seu quadratica primi ad secundum, seu, ut quadratum Primi, ad quadrat. Secundi.

Sic si sit $a.b.c$ &c. erit $a:c = aa:bb$, nam $a:c = ab:bc$ per (§. 300.) sed in hac substituendo per (§. 277.) mb loco a , & mc loco b , erit $mmc:c = mmcb:bc$, in qua exponens est mm , sed etiam $aa:bb$ habet exponentem mm , nam substituendo mb loco a , erit $mmbb:bb$. ergo. II. Ex eodem rationio clarum est, quod primus sit ad quartum in ratione triplicata primi ad secundum, sit $a.b.c.d$. &c. erit $a:d = aaa:bbb$. seu, ut cubus primi ad cubum secundi. Idem clarum fit in Numeris, sit e-

$2.4.8.16$. &c. erit terminus primus 2 ad tertium 8: hoc est 2:8 in ratione duplicata primi ad secundum 4. seu 2:4. hoc est 2:4. 4:16 id est 4:16 nam 2:8 = 4:16, ut patet per (§. 286.) & hinc universaliter: Potentia sunt in ratio-

multiplata ratione radices, seu laterum, quot unitas habet exponens datæ potentie. Sed hæc viva voce docentis clariora reddentur.

SCHOLION.

311. Tyrones Theorema hoc cum suis corollariis probe velim memoriâ retineant, utpote quæ per omnem Geometriam, & Philosophiam naturalem eandem usurpanda veniunt.

DEFINITIO IX.

312. Progressio dicitur certa series quantitatum continue proportionalium, ut $\therefore 1. 3. 9. 27. 81. 243$ &c.

SCHOLION I.

313. In specie, si serie continuâ sint termini arithmetice proportionales (§. 280.) dicitur Progressio Arithmetica, ut $1. 3. 5. 7. 9. 11$ &c. ad hanc revocantur I. Progressio numerorum naturalium,

$1. 2. 3. 4. 5. 6.$ &c. Item Progressio figurarum $1. 4. 9. 16. 25. 36.$ &c.

quorundam, ut $3. 6. 10. 15. 21.$ quorum differentia sunt numeri naturales. II. Progressio dicitur Geometrica, si termini sint continue Geometricè proportionales, ut $\therefore 1. 2. 4. 8. 16. 32.$ &c. Progressiones cum primis Arithmetica, & Geometrica sunt vel crescentes, vel decrescetes. Crescentes dicuntur si termini crescant; ut $1. 2. 4. 8. 16$ &c. decrescetes, si termini decrescant, ut $\therefore 32. 16. 8.$

$4. 2. 1.$ &c. $\therefore 1. 2. 4. 8. 16. 32.$ &c. Progressiones cum primis Arithmetica, & Geometrica sunt vel crescentes, vel decrescetes. Crescentes dicuntur si termini crescant; ut $1. 2. 4. 8. 16$ &c. decrescetes, si termini decrescant, ut $\therefore 32. 16. 8.$

$4. 2. 1.$ &c. $\therefore 1. 2. 4. 8. 16. 32.$ &c.

SCHOLION II.

314. Quoniam nobis hæc de Progressione Geometrica agendum, multum juvabit, Tyronibus expressionem universalem per litteras ob oculos ponere, quam

rum formularum contemplatione solâ condiscimus, quæ sunt ceteroquin in demonstranda forent. Sine itaque termini Progressionis Geometrica crescentis sub

exponente m , Ex. gr. $\therefore a. b. c. d. e. f. g.$ &c. patet eam per substitutionem exponentium juxta (§. 277) rectè sic exprimi $\therefore a. m^1 a. m^2 a. m^3 a. m^4 a. m^5 a. m^6 a.$ &c. nam cum sit crescens erit $b = ma$, & $c = mb = mma$, seu $m^2 a$, & $d = mc = mma$, seu $m^3 a$, & $e = md = m^4 a$, & $f = me = m^5 a$ &c. idempares in decrescete. Hinc omnes Progressiones Geometrica per sequentes binas classes rectè designantur.

TABULA PROGRESSIONUM GEOMETRICARUM.

Nam termini I. II. III. IV. V. VI. VII.
Crescens $\therefore a. m^1 a. m^2 a. m^3 a. m^4 a. m^5 a. m^6 a.$ &c.

Decrescens $\therefore a. \frac{a}{m^1} \frac{a}{m^2} \frac{a}{m^3} \frac{a}{m^4} \frac{a}{m^5} \frac{a}{m^6}$ &c.

IN NUMERIS.

I. II. III. IV. V. VI. VII.
Crescens $\therefore 1. 2. 4. 8. 16. 32. 64.$ &c.
per Expon: $\therefore 1. 2^1 2^2 2^3 2^4 2^5 2^6$ &c.

Decrescens $\therefore \frac{64}{1} \frac{64}{2^1} \frac{64}{2^2} \frac{64}{2^3} \frac{64}{2^4} \frac{64}{2^5} \frac{64}{2^6}$ &c.

hoc est $\therefore 64. 32. 16. 8. 4. 2. 1.$ &c.

id est $\therefore 64. 32. 16. 8. 4. 2. 1.$ &c.

NB. Puncta inter terminos posita non indicant multiplicationem, sed tantum separationem terminorum. Jam contemplando imprimis seriem crescentem $a. m^1 a. m^2 a.$ &c. sequentia Theoremata, & Problemata deducuntur.

315. THEOREMA. Factum extremorum est æquale facto terminorum quorumvis ab extremis æquedistantium, aut si termini sint impari, quadrato medii. Sic factum ex termino primo a , & termino septimo $m^6 a$ est $m^6 a^2$, quod est æquale facto ex termino secundo ma , & sexto $m^5 a$, quod etiam est $m^6 a^2$; sic factum tertii $m^2 a$, & quinti $m^4 a$ est $m^6 a^2$ & quadratum quarti est $m^6 a^2$. Idem patet in numeris, nam factum primi 1, & septimi 64, est 64. $1=64$, sed etiam factum secundi, & sexti est 2. $32=64$, factum tertii, & quinti est 4. $16=64$; quadratum medii 8 est 8. $8=64$.

316. THEOREMA. Omnis terminus, est productum ex termino primo, & ex exponente elevato ad potestatem uno gradu inferiorem, quam sit numerus localis termini. Sic terminus Ex. gr. septimus $m^6 a$; est factum ex exponente m , elevato ad sextam potestatem, hoc est m^6 , & multiplicato per primum a , $=m^6 a$. Idem est in numeris; sic quartus 8, est factum ex exponente 2, elevato ad tertiam potestatem nempe 2. $2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3$, & multiplicato per primum 1. Hinc eruntur sequentia Problemata.

317. PROBLEMA. Dato termino primo, & exponente rationis, invenire terminum quemvis. Resolutio, datus Exponens elevetur ad potestatem uno gradu inferiorem, quam sit numerus localis termini, factum multiplicetur per Primum, sic si datur exponent 2, & primus 1, & queratur sextus terminus, erit 2. $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$, qui est terminus sextus, ut patet ex Tabula.

318. COROLLARIUM. Nunc si queratur terminus maximus, invenitur is eodem modo, ut quivis alter. Terminus vero minimus habebitur; si terminus maximus (per prius dicta inventus) dividatur per exponentem elevatum uno gradu inferiorem, quam

quam sit numerus localis termini maximi. Sic datur terminus maximus 32, qui sexto loco consistit, & exponens datur 2, erit 2. $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$, per quem divido 32, erit quotus $=1$, hoc est minimus. Et universaliter formula termini Maximi est $m^{n-1} a$, & termini Minimi $m^{n-1} a$: m^{n-1} , in qua m denotat exponentem datæ rationis, $n-1$ denotat exponentem potestatis, vel potestatis de m elevato ad gradum unum inferiorem, quam numerus localis termini cujuscunque, a vero denotat primum terminum. Porro ex contemplatione serie crescentis a . ma . $m^2 a$ &c.. habetur sequens.

319. THEOREMA. Exponens rationis m^{n-1}

est æqualis $\sqrt[n-1]{m^{n-1} a}$: hoc est $\sqrt[n-1]{m^{n-1} a} = m^{n-1} a$ hoc est Terminus datus quivis (seu maximus) divisus per terminum primum, & ex quo extracta radix, potentia uno gradu inferioris, quam sit numerus localis termini, est exponens datæ rationis. Hinc habetur resolutio sequentis problematis.

320. PROBLEMA. Dato termino primo, termino ultimo (seu maximo) & dato numero terminorum, (seu quorum locum terminus ultimus occupat) invenire exponentem rationis. Ex. gr. Datur terminus primus $=1$, terminus ultimus $=8$, datus numerus terminorum $=4$ (hoc est, numerus 8 consistit quarto loco in data serie) invenire exponentem. Vocetur is $=x$ aut erit is per formulam

generalem $\sqrt[n-1]{m^{n-1} a}$: $a = \sqrt[n-1]{x^{n-1} a}$ $1:1 = \sqrt[3]{x^3 - x}$ hoc est $\sqrt[3]{8:1} = \sqrt[3]{8} = 2$ hoc est: Terminus datus ultimus dividatur per primum, &

ex quot extrahatur radix potentiae uno gradu inferioris, quam sit terminorum numerus, erit radix hæc, quæsitus exponens rationis. Hinc porro sequitur.

321. Theorema: Si primus terminus subtrahatur ab ultimo, & residuum dividatur per exponentem rationis una unitate multiplicatum, & hunc quot addatur terminus ultimus, habetur summa omnium terminorum. Scilicet, cum ultimus sit $= m^{n-1}a$, primus $= a$ exponens rationis $= m$, erit residuum, si primus ab ultimo subtrahatur $= m^{n-1}a - a$, & dividendo per $m - 1$, erit quotus $(m^{n-1}a - a) : (m - 1)$. & huic addendo ultimum $m^{n-1}a$, habebitur summa $= m^{n-1}a + (m^{n-1}a - a) : (m - 1)$, quæ est formula universalis reperienda summa. Hinc resolvitur sequens.

322. PROBLEMA: Dato termino primo, dato termino ultimo, & dato exponente rationis, invenire summam omnium terminorum. Ut si datur terminus primus $= 1$, terminus ultimus $= 64$, exponens rationis $= 2$, erit vi formulæ, terminus primus $a = 1$, ultimus $m^{n-1}a = 64$, & exponens $m = 2$, & hinc vi formulæ (§. 321.) erit summa $m^{n-1}a + (m^{n-1}a - a) : m - 1 = 64 + (64 - 1) : (2 - 1)$ hoc est $64 + (63 : 1) = 64 + 63 = 127$, ut patet ex Tabula: (§. 314.) man

$$1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 = 127$$

323. COROLLARIUM: Quotiescunque itaque queritur summa, nota esse debent hæc tria. I. terminus primus. II. terminus ultimus, & III. exponens rationis. Hinc quotiescunque datur hujusmodi problema resolvendum, & ex his tribus desciat unum, id prius, per superiora problema invenire

dum.

dum est. Ex. gr. Si daretur terminus primus, & exponens, & non daretur ultimus, in hunc ultimum prius inquirendum est per (§. 317.) aut si daretur terminus primus, & ultimus, & non daretur exponens, hic exponens prius inveniri debet per (§. 320.) dantque ex his liquet.

324. PROBLEMA. Datis duobus terminis invenire quotcunque medios proportionales. Nam cum semper datur terminus primus, terminus ultimus, & numerus terminorum, invenietur ex his per (§. 320.) exponens rationis, quo invento formari possunt quotcunque termini per (§. 317.)

SCHOLION II.

325. Exemplis hæc quidem pluribus illustrari debent, quæ, ne in molem excrescat liber ad Exercitationes Analyticas reservamus. Porro quæ de progressionem crescente dicta sunt, eodem modo de decresciente vera esse applicanti patebit, maxime si Tyro animadvertat, omnem decrescientem, fore crescentem, & vicissim crescentem mutari in decrescientem, modo seriem consideret progredientem à dextris sinistram versus, & contra.

SCHOLION II.

326. De proportionem, & progressionem jam Arithmetica brevibus; nam universaliter, quæ de proportionem, & progressionem Geometrica demonstrantur adhibendo multiplicationem, & divisionem, item elevationem ad potestatem, vel extrahendo $\sqrt{\quad}$, hæc de proportionem, & progressionem Arithmetica intelligenda sunt adhibendo loco multiplicationis, Additionem, & loco divisionis, Subtractionem, loco quadrati, multiplicationem per 2, loco cubi, multiplicationem per 3, &c. loco extractionis $\sqrt{\quad}$, divisionem

per 2, & loco extractionis $\sqrt[3]{\quad}$, divisionem per 3, &c.

CA-

De Proportione, & Progressione Arithmetica.

THEOREMA XVI.

327. PROP. In Proportione Arithmetica (§. 280.) summa extremorum est equalis summa mediorum.

DEMONSTRATIO.

Sit Majoritatis $a, b = c, f$, erit $a + f = b + c$ nam substituendo per (§. 278.) erit $a = d + b$, & $c = f + d$, & hinc proportio $d + b, b = f + d, f$ summa extremorum $d + b + f = b + f + d$ summa mediorum. In Numeris sit 3, 5 = 7, 9 erit $3 + 9 = 5 + 7$ hoc est 12 = 12.

328. COROLLARIUM I. In continua $a, b = b, c$ summa extremorum $a + c = 2b$, hoc est, duplo medii; ut sit 3, 5 = 5, 7 erit $3 + 7 = 5 + 5$, seu $3 + 7 = 10$.

329. COROLLARIUM II. Quartus Arithmetice proportionalis invenitur, si à summa mediorum (hoc est secundi & tertii) subtrahatur Primus. Nam $a, b = c, x$ erit $a + x = b + c$, & per Metathesim $x = b + c - a$. Sic si datur 3, 5 & 7, & queratur quartus x , erit 3, 5 = 7, x , hoc est $3 + x = 5 + 7$, & per Metathesim: $x = 5 + 7 - 3 = 12 - 3 = 9$.

330. COROLLARIUM III. Tertius continue Proportionalis obtinetur, si à duplo secundi subtrahatur primus, ut si dentur 3 & 5, & queratur tertius x , erit 3, 5 = 5, x hoc est $3 + x = 5 + 5$ hoc est $3 + x = 10$, & per Metathesim: $x = 10 - 3 = 7$, universaliter. $a, b = b, x$ erit $a + x = 2b$, & $x = 2b - a$.

331. COROLLARIUM IV. Medius proportionalis invenitur, si summa Primi & Tertii dividatur.

vidatur per 2, nam $a, x = x, c$, hoc est $2 + c = x + x$, seu $a + c = 2x$ & dividendo $\frac{a+c}{2} = x$, sic si datur

3 & 7, & queratur medius x , erit 3, $x = x, 7$, hoc est $3 + 7 = 2x$, seu $\frac{3+7}{2} = x = \frac{10}{2} = 5$.

SCHOLIUM.

332. Liqueat itaque ex his, quæ (§. 326.) monui, eodem quoque modo ratiocinandum esse de progressionibus Arithmeticis, quemadmodum de Geometricis dictum, adhibendo videlicet, locò multiplicationis, Additionem, & in locum divisionis subtractionem, &c.

d d d d d
igitur sit series Arithmetica crescens a, b, c, f, g, h &c. exprimitur hæc recte per substitutionem differentiarum, juxta doctrinam (§. 278.) declaratam.

Sit I. II. III. IV. V. VI. VII.
ares: $a, a + d, a + 2d, a + 3d, a + 4d, a + 5d, a + 6d$ &c.
In 2 2 2 2 2 2
Nr: 1. 3, 5, 7, 9, 11, 13 &c.
Ex cujus contemplatione sequentia innotescunt Theoremata, ac Problemata.

333. THEOREMA. Summa extremorum, est equalis summa quorumvis æquedistantium ab extremis, aut (si termini sint impares) duplo medii. Sic summa primi, & septimi est:

$a + a + 6d = 2a + 6d$.
Summa secundi & sexti $a + d, a + 5d = 2a + 6d$.
Summa tertii & quinti $a + 2d, a + 4d = 2a + 6d$,
duplum medii $a + 3d$, seu $(a + 3d) \cdot 2 = 2a + 6d$,
idem patet in numeris.

334. THEOREMA. Quivis terminus componitur ex termino primo, & tot differentiis, quot

quot sunt numeri terminorum dempto uno, seu est aggregatum ex termino primo & tot differentis, quot sunt termini antecedentes. Sic Ex. gr. terminus sextus a + 5d, constat termino primo a plus quinque differentis; quot nempe termini hunc antecedunt. Idem patet in Numeris. Ex his deducuntur sequentia Problemata.

335. PROBLEMA I. Dato termino primo, & differentiâ rationis, invenire terminum quemvis. Sit primus = a, differentia = d, numerus terminorum = n, terminus quæsitus sit = x Resolutio: multiplicetur differentia per numerum terminorum una unitate multatum, & facto huic addatur primus, erit aggregatum, terminus quæsitus, id est (d.n-1) + a, hoc est dn-d + a = x, quæ est formula universalis pro quocunque termino, excepto primo: sit in numeris primus a = 1, differentia d = 2, & queratur sextus, erit numerus terminorum 6 = n, adeoque a + nd - d = 1 + 12 - 2 = 11.

336. COROLLARIUM I. Cum in data progressionis ad libitum poni possit terminus quicunque pro ultimo, & is vocetur = u. erit generalis formula pro ultimo, seu maximo termino u = a + nd - d. Hinc terminus ultimus seu maximus eodem modò reperitur, quo quovis alius.

337. COROLLARIUM II. Quod si detur differentia = d, numerus terminorum = n, & terminus ultimus = u, & queritur primus x, erit u = x + dn - d, & per Metathesim u - dn + d = x, hoc est, ad ultimum addatur differentia, & à summa subtrahatur factum ex differentia, & numero terminorum, erit residuum æquale primo. Sit u = 13, & d = 2, & n = 7, erit primus 13 - 14 + 2 = 1.

338. PROBLEMA II. Dato termino primo = a, dato ultimo = u, & dato numero terminorum

TUNA A

rum = n. invenire differentiam; sit quæsitâ differentia = x, erit u = a + xn - x, & per Metathesim u - a = xn - x, & dividendo per n - 1, erit $\frac{u-a}{n-1} = x$

hoc est; Ab ultimo subtrahatur primus, Residuum dividatur per numerum terminorum unitate multatum, erit quotus differentia. Ex. gr. Sit primus a = 1, u = 13, numerus terminorum n = 7, u - a = 13 - 1, $\frac{12}{7-1} = 2$, erit formula; $\frac{u-a}{n-1} = \frac{13-1}{7-1} = 2$. hoc est = 2.

339. PROBLEMA III. Dato termino primo = a, dato termino ultimo = u, & data differentia = d, invenire numerum terminorum; Sit numerus terminorum quæsitus = x, erit u = a + dx - d, & per Metathesim u + d - a = dx, & dividendo per d, erit $\frac{u+d-a}{d} = x$ hoc est, ad ultimum addatur

differentia, & subtrahatur primus, residuum dividatur per differentiam, erit quotus numerus terminorum. Sic sit a = 1, u = 13, d = 2, erit vi formula $\frac{u+d-a}{d} = \frac{13+2-1}{2} = 7$.

340. PROBLEMA IV. Dato termino primo = a & ultimo = u, & numero terminorum = n, invenire summam omnium terminorum; erit Resolutoria formula $(u+a) \cdot \frac{n}{2}$ seu $\frac{nu + na}{2}$

hoc est, ad ultimum addatur primus, & summa multiplicetur per dimidium numerum terminorum.

341. PROBLEMA ULTIMUM. Dato termino primo = a, data summa omnium terminorum = S, & dato numero terminorum = n, invenire differentiam. Sit hæc = x, itaque termi-

Z 2

nus

us ultimus $= a + nx - x$, per (§. 336.) adeoque
 summa omnium per (§. 340.) $S = (2a + nx - x) \cdot$
 $\frac{n}{2}$, hac est $\frac{2an + nnx - nx}{2} = S$ & multiplicando per
 2 , erit $2an + nnx - nx = 2S$, & per Metathesim
 $nnx - nx = 2S - 2an$, dividendo per $nn - n$, erit
 $x = \frac{2S - 2an}{nn - n}$, quæ est formula resolutoria. Ut si

fit $S = 49$, $a = 1$, $n = 7$, erit vi formulæ $\frac{98 - 14}{49 - 7} =$

$\frac{84}{42} = 2$, quæ est differentia terminorum,

SCHOLION I.

342. Doctrina progressionum a §. 312. hucusque
 tradita, procedit de omnibus etiam fractis. In his ta-
 men, cum varia esse possint, considerandi veniunt tam
 numeratores, quam denominatores; sunt enim
 quedam, in quibus manente eodem numeratore, deno-
 minatores progrediuntur in ratione vel Geometrica,
 vel Arithmetica, & sunt quedam, quarum tam nu-
 meratores, quam denominatores, vel tantum Geome-
 tricè, vel solum Arithmeticè procedunt; sunt item
 aliæ, in quibus numeratores progrediuntur Arithme-
 ticè, denominatores verò Geometricè, aut vicissim
 &c. eæque omnes vel sunt crescentes, vel decrecentes,
 huiusmodi tamen progressionem, si series numerato-
 rum, remque denominatorum seorsim considerentur,
 iisdem gaudent regulis, quibus integri.

SCHOLION II.

343. Superest, ut de proportionem Harmonica in-
 nuamus, quam multi, existimantes eam duntaxat Mu-
 sicis famulari, tanquam cæteris scientiis parum uti-
 lem negligunt, non animadvertentes summum ejusdem
 usum in enodandis miris naturæ arcanis, quem satis
 qui-

quidem intelligo amplissimum. Tyronibus interea in-
 nuisse sufficiat. proportionem Harmonicam appellari,
 & quidem discretam, si differentia termini primi à
 secundo, ita se habeat Geometricè, ad differentiam
 Terti à quarto, ut primus ad quartum, aut in con-
 tinua, differentia primi à secundo ad differentiam
 secundi à tertio, ut primus ad tertium. & quidem in
 ratione Geometrica. Sic harmonicè proportionales sunt
 $12, 14 = 20, 24$, nam $2 : 4 = 12 : 24$, quæ est di-

scerta. Item continua $10, 16 = 16, 40$, nam $6 : 24 = 10 : 40$ quæ si generaliter exprimitur per lite-
 ras $a, b = c, d$, erit $b - a = d - c = a, d$ quæ est
 Geometricæ legibusque Geometricis tractanda; cujus
 ope, quartus, tertius; aut medius harmonicè pro-
 portionalis inveniri potest, plura oremus.

CAPUT V.

De usu Regulæ Aureæ directæ, Inversæ, Simplicis,
 & compositæ, itemque de Regulæ Societatis.

344. Regula Aurea; vel Trium est proportio
 Geometrica, ut (§. 288.) dictum; eaque, vel sim-
 plex, vel composita, simplex appellatur quando da-
 tis tribus terminis quæritur quartus. Composita
 dicitur, quando datis terminis quinque, quæritur
 sextus, vel datis septem; quæritur octavus. Utra-
 que hæc dividitur in Directam, & Inversam; di-
 recta appellatur, quando, ut primus est ad secun-
 dum, ita tertius ad quartum: Inversa, quando,
 ut tertius est ad primum, ita secundus ad quar-
 tum.

SCHOLION.

345. Cum ea, quæ in commercio, usumque com-
 mune veniunt, sint pretiis, temporibus, labori-
 bus &c. proportionalia, (qui enim duas ulnas emit,
 necesse est, ut unius ulnæ pretium duplam persolvat,
 qui

qui tres, triplum &c. item, qui laborat duobus diebus, duplam mercedem, qui tribus triplam mereatur, & qui fodit duobus diebus, duplum laborem unius diei perficit, qui tribus, triplum &c.) sequitur, per regulam auream (§. 288.) seu per proportionem, recte quaesita inveniri, unde consequitur, ea, quae per regulam auream indagantur, debere esse homogenea; male enim quis ratiocinaretur: urna vini constat 40 grossi: ergo 6 metreta tritici, quanti erunt? cum urna vini, & metreta non sint homogenea. Itaque ad praxim.

Usus Regulae Aureae simplicis, & directae.

346. Regula I. Termini ordine in quaestione proposito in proportionem ordinantur. II. Multiplicetur tertius per secundum, factum dividatur per primum (§. 288.) quotus erit terminus quartus quaesitus. III. Si occurrant ordinandi termini mixti heterogenei reducibiles, reducantur ante ad speciem minimam omnes termini homologi. Vide Exempl. II. IV. Si fractiones immisceantur, reducantur ante ad eandem denominationem, aut tractentur per (§. 148.)

EXEMPLUM I.

3. Ulmæ panni constant fl. 7, ergo 9 ulmæ, quanti veniunt?

ulm. fl. ulm.

erunt ordinari 3: 7 = 9: x, adeoque per Regul. II.

ul. fl. ul. fl.

$$x = \frac{7 \cdot 9}{3} = \frac{63}{3} = 21, \text{ ergo } 3: 7 = 9: 21 \text{ examen fit per (§. 286.)}$$

EXEMPLUM II.

2. librae, & 12 loth aromatum (ponderis civilis) constant fl. germ: 15, & 24 xr. quanti erunt 5 librae cum 30 loth ejusdem speciei aromatum?

Itaque terminos hos Reducendo juxta Reductionum Tabulas III. & IX. (§. 141. Ari.)

$$\text{erunt } 2 \text{ librae } \& 12 \text{ loth} = 76 \text{ loth.}$$

$$15 \text{ fl. } \& 24 \text{ xr.} = 924 \text{ xr.}$$

$$5 \text{ librae } \& 30 \text{ loth} = 190 \text{ loth.}$$

$$\text{loth xr. loth.}$$

$$\text{Unde } 76: 924 = 190: x, \& \text{ hinc } x = \frac{924 \cdot 190}{76} =$$

$$175560 = 2310 \text{ xr. id est } 38 \text{ fl. } \& 30 \text{ xr. } 76.$$

76

Regula aurea simplex Inversa.

347. Cognoscitur esse inversa per (§. 344.) & plerumque ratione temporis occurrit, quo opus aliquod citius, tardiusve perficiendum est; ut si queras, 4 Murarii exstruunt domum 10 mensibus, ergo 8 murarii, quot mensibus construunt eandem domum? video itaque inversam, cum 8 murarii longe breviorē (quā 10 mensium) tempore opus absolvere debeant, sunt nempe menses in ratione inversa murariorum, hoc est, ut 8 murarii ad 4 murarios, ita 10 menses ad menses quaesitos. Itaque

348. Regula unica: Ordinantur termini ita, ut tertius in quaestione terminus fiat primus, & primus fiat secundus; cætera fiant, ut in regula directa. Vel (secundum vulgus Arithmeticorum) ordinantur termini ordine in quaestione proposito; tunc multiplicetur primus per secundum, & factum dividatur per tertium.

EXEMPLUM I.

Opera 100 intra 8 dies excolunt vineam, ergo 50 opera, quot diebus:

$$\text{Erit, ut } 50: 100 = 8: x \text{ hoc est } x = \frac{100 \cdot 8}{50} = 800 = 16 \text{ dies.}$$

EXEMP. II. VULGARI METHODO.

Militibus 125 pro diebus 10 sufficiunt centum metreta, ergo 625 Militibus, quot diebus sufficiens erit

erit vulgo, $125:10=625:x$, hoc est $10.125=$
 $1250=2.$

625

625

Usus Regulae compositae Directae

349. Regula composita juxta (§. 344.) tunc usuratur, quando datis 5, vel 7 terminis quaeritur sexus, vel octavus, quae (si omnes termini sint in ratione directa) appellatur Directa. Ad hujus rectum usum, cum primis videndum, qui sit terminus solitarius? terminum autem solitarium voco, cui homogeneus est terminus quaesitus. Itaque

350. Regula I. Termini omnes, qui ad solitarium spectant, multiplicentur inter se, (excepto solitario) & factum ponatur primo loco, in secundo loco ponatur terminus solitarius, tertio loco ponatur productum ex terminis, qui pertinent ad quaesitum. Reg: II. Sic reducti termini, & hoc ordine positi tractentur, ut in Regula aurea simplici directa. (§. 346.)

EXEMPLUM.

1000 fl. per annos 4 dant censum 200 florenos? ergo 3500 floreni per annos 6 quantum censum dabunt? In hac quaestione census 200 fl. est solitarius, cum quaeratur census.

fl. an. cens. fl. an. cens.

Itaque $(1000.4):200=(3500.6):x$

hoc est $4000:200=21000:x$

unde per (§. 346.) $x=21000.200=1050$ fl. cens.

4000.

Regula composita Inversa.

351. Regula Unica: Videatur, qui termini sint in ratione inversa aliorum, hi ante reductionem transponantur ita, ut terminus pertinens ad solitarium, transferatur ad terminos per-

pertinentes ad quaesitum, & vicissim terminus pertinens ad quaesitum, transferatur ad terminos solitarios, quo facto per Reg: I. (§. 350.) educantur, reducti in proportionem ordinentur, & tractentur, per regulam compositam directam.

EXEMPLUM

8. Messores demerunt 50 jugera intra dies 10 igitur 16 messores. jugera 150 quot diebus demerunt. In hac solitarius est 10 dies, cum quaesitus, sint dies. Itaque video dies quaesitos esse in ratione inversa messorum, & hinc.

mess: jug: dies mess: jug.

ut $(16.50):10=(8.150):x$

hoc est $800:10=1200:x$, seu $x=\frac{12000}{800}=15$ die,

800

SCHOLION.

Habetur quoque methodus resolvendi quaestiones compositas per repetitas regulas simplices, sed haec docentis viva voce, aut lectione auctorum facile intelligitur.

Usus Regulae societatis simplicis.

352. Regula Societatis (quae etiam proportio est) appellatur, quando bini, vel plures societatem inveniunt lucri causa, conferendo ad faciendum lucrum pecunias particulares, dein elapso certo tempore factum lucrum partiendum est inter socios pro rata collatae cujusvis pecuniae.

353. REGULA. Primo loco semper ponatur tota summa collatorum omnium; secundo loco semper lucrum totale, tertio cujusvis collatorum particulare, pro quo quaeritur. Hinc quot sunt socii, toties dicto modo regula repetenda est. Itaque

EXEMPLUM,

Tres Mercatores Pterilis, Ponticus, & Cosmophilus in una societate constarunt summam 1000 fl. Pterilis

Aa

rilus

vilus contulit 240 fl. Ponticus 300, Cosmophilus 460, hac summa lucrati sunt uno anno omnes simul 2000 fl. quaritur quid singuli? Itaque Proportiones pro singulis sic ordinantur.

Pro Perilo ut. 1000:2000=240:x prodit lucr. 480

Pro Pontico ut. 1000:2000=300:x fit lucr. 600.

Pro Cosmophilo 1000:2000=460:x habetur 920.

lucrum omnium = 2000.

Regula societatis composita.

354. In hac præter collatum singulorum occurrat etiam tempus, pro quo singuli contulerunt. Hinc antequam termini ad proportionem ordinentur, singulorum collatum per suum tempus multiplicetur, & factum ponatur loco tertio, cætera fiant, ut in regula societatis simplice.

EXEMPLUM.

Idem Mercatores alio pacto iniierunt societatem, ita ut Perilus contulerit fl. 100 pro mensi: 19.

Ponticus fl. 130 pro mensi: 10.

Cosmophilus fl. 300 pro mensi: 6.

Exacto hoc tempore lucrati sunt simul fl. 10000 fl. quantum singuli? ut habeatur collatum singulorum, & summa rotalis collata.

Fiat 100. 19 hoc est 1900 Perili collatum.

130. 10 - - 1300 Pontici.

300. 6 - - 1800 Cosmophili.

Summa collat. 5000.

Itaque pro Perilo 5000:10000=1900:x fit 3800.

Pontico 5000:10000=1300:x fit 2600.

Cosmoph. 5000:10000=1800:x fit 3600.

totum lucrum = 10000.

SCHOLION.

355. Cum usus Regularum frequenti exercitio perficiatur, nobis quæ proprioribus esse non liceat, adire.

addeico selectissima ad usum exempla, & quæstiones, Exercitationibus Arithmeticis in gratiam nostrorum discipulorum edendis, reservamus, quibus Methodum Italicam, & cætera compendia, ac praxes adiungemus.

CAPUT ULTIMUM.

De Inventione Theorematum, ac Problematum.

356. Inventio Theorematum, ac Problematum adeo propria est Algebræ, ut nullam fere Equationem reperias, quæ vel Theorema insigne, aut utile aliquod Problema non eloqueretur, modo mentem advertamus. Itaque tribus (ut ajunt) verbis doctrinam hanc complectiar: Tracta quantitates componendo, æqualia pro æqualibus substituendo, & composita in analogiam, seu proportionem resolvendo, & artem reperisti. Quapropter.

357. Ad Compositionem pertinent Additio, cuius ope reperta habentur Theoremata (§. 231, 233. &c.) Subtractio per quam detecta habentur Theor: (232, 234. &c.) Multiplicatio, & Divisio innotuerunt Theor: (§. 182.), & reliqua potentiarum doctrina, item omnia Partis IV. de proportionem.

358. Virtutem Substitutionis æqualis pro æquali declarant (§. 247, 248.) & demonstrationes proportionum à (§. 276.) ad Caput. V.

359. Infinitum prope Problematum numerum à formularum in analogiam seu proportionem Resolutione emanare, nemo est Mathematicorum, qui ignoret; quarum quidem resolutionum artificium in eo consistit, ut ita termini resolvantur, & in proportionem ordinentur, ut factum extremorum, semper sit æquale facto mediolorum, quemadmodum à (§. 291.) ad Cap. V. ostensum est. Hic animadvertendam præterea, quod si formula per Hypothesin divisionis expressa in analogiam solvenda, totus divisus pro primo, reliqui factores Numeratoris, seu dividendi, secun-

do, & tertio loco constituantur. Sic hæc Ex. gr.
Æquatio $x = \frac{ad-dc}{a-b}$ ita resolvetur; $a-b : a-c$
 $= d : x$, aut $a-b : d = a-c : x$, item hæc $x = \frac{a}{3ab}$,
 ita $b : a = 1 : x$, item $\frac{a}{2c}$, ita $2c : 3a = b : x$, vel

$2c : 3b = a : x$, vel $2c : 3 = ab : x$: ut patet. Sed hæc
 & cætera docentium industria una cum reflexionibus,
 relinquo.

359. Ut fidem (§. 84.) datam exsolvam, sint
 ope Analysis demonstranda Theoremata.

360. THEOREMA: Quantitas positiva per
 negativam, vel vicissim multiplicata, dat nega-
 tivum productum, hoc est $(a-b) \cdot +c$, dat produ-
 ctum $+ac - bc$; cum cuicunque quantitati æqualis
 assignari possit aliqua quantitas sit illa d , erit $a-b$
 $= d$, & per Metathesim $a = d + b$, & per $+c$ multi-
 plicando utramque partem, erit $ac = dc + bc$, & per
 Metathesim $ac - bc = dc$, unde cum inter $a-b$, &
 d fuerit æqualitas, & iterum inter $ac - bc$, & dc
 sit æqualitas, sequitur multiplicanda $a-b$ per c , fie-
 ri debere $ac - bc$, & non $ac + bc$.

361. THEOREMA. Quantitas negativa
 per negativam multiplicata, dat positivam: hoc est
 $(a-b) \cdot -c$ dat $-ac + bc$. Sit $a-b = d$, erit per
 Metathesim $a = d + b$, multiplicetur pars utraque
 per $-c$, erit per prius demonstrata $-ac = -dc -$
 bc , & per Metathesim $-ac + bc = -dc$, sed $-ac$
 $+ bc$, est factum ex $a-b$ in $-c$, ergo.

362. THEOREMA. Factum duarum fra-
 ctionum $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}$, esse debet $\frac{ac}{bc}$, ut (§. 140. & 141.)
 dictum.

DEMONSTRATIO. Omnis fractio est Ratio
 Geometrica per (§. 272.) Ratio verò Geometrica est
 divisio per (§. 272.) sed in divisione divisor est ad di-
 videndum, sicut unitas ad quorum, per (§. 60. Aris.)

unde, fractio $\frac{a}{b}$ resolvitur in hanc $b : a = 1 : \frac{a}{b}$ per

(§. 288.) & $\frac{c}{d}$ resolvitur in hanc $d : c = 1 : \frac{c}{d}$ per

(§. 288.) ergo per (§. 296.) $(b.d) : (a.c)$

$$= (1.1) : \frac{a}{b} \times \frac{c}{d}$$

hoc est $bd : ac = 1 : \frac{a}{b} \times \frac{c}{d}$

seu $\frac{ac}{bd} = \frac{a}{b} \times \frac{c}{d}$ quod erat Demonstr.

SCHOLION.

362. Ex his, & cæteris hucusque declaratis, satis
 liquet Arithmeticā numericam omne suum pretium
 Algebra debere, quanta verò incrementa cætera di-
 sciplina ab Analysis sumpserint, erudita Recentiorum
 volumina his formulis locupletata, loquuntur. Postre-
 mum Tyronibus proficere volentibus tam in Arithme-
 tica numerica, quam literali non inutile censui quos-
 dam Auctores indicare, à quibus, quæ à me ob tempo-
 ris angustias, necessario, aut prættermittenda, aut cer-
 te strictim pertractanda fuere, petere valeant. Itaque
 Arithmetica ad captum Tyronum præclare concin-
 nant, P. Christophorus Clavius, & Soc. JESU,
 cujus Epitome Arithmetice practicæ, sapissimè
 recusa, Authorem à facilitate doctrinæ commendat;
 Theoriam præxi junxit, R. P. Andreas Tacquet,
 S. J.

S. J. in sua Theoria, & praxi Arithmetices. *Arithmetica, & Algebra in usum Tyronum de bere*
 R. P. Erasmus Frölich, e Soc. J. sub Tit. do. Introductio facilis in Mathesim Viennæ 1746. in 8vo, opusculum singulare, Crivellii Elementa Arithmetica numerica, & literalis latinè, & auctiora reddita Viennæ 1745. in 8vo. R. P. Lechi e S. J. Arithmetica universalis Neutoni. His accedunt Tabulæ Mnemonica ex Primis universæ Matheseos Elementis concinnata à R. P. Philippo Steinmeyer, S. J. Augustæ Vindob. 1750. in 8vo. Item R. P. Josephi Liesganigg, e S. J. Tabulæ Memoriales Recolendis Matheseos Elementis Servientes, Viennæ 1753. in 4to.

Cursus Mathematici commendantur: R. P. Gaspari Schotti, e S. J. & R. P. Claudii Milliet Dechales, e S. J. *Notissima sunt* Illust. Christiani Wolffii Elementa Mathematica, & eorundem Compendium; item Ozanam Cours de Mathematique; Institutiones Matheseos Weidleri, & Wiedenburgii; item Poëtii Introductio in Arithmetica Idiomate Germanico quibus singulis prima Matheseos Elementa, si quando Tyrones petant, meminisse una mecum velim, moniti D. Pauli: Omnia in Gloriam DEI facite. I. ad

Cor. 4. v. 31.

FINIS ELEMENTORUM ALGEBRÆ.

E T.

PRIMI TOMULI.

IN

IN ELEMENTA ALGEBRÆ INDEX PROBLEMATUM

PARTIS I.

*De Algebra tam speciosa, quam numerosa
integrorum cum fractis.*

N. fol. N. 6.

Tab: Compendiaria exhibens Hypotheses seg:	16—38
Quantitates quasvis Algebraicas Addere.	30—74
- - - - - Subtrahere.	34—78
- - - - - Multiplicare.	40—89
- - - - - Dividere.	46—98

*Ex numeris quocumq; dato integro efficere
fractionem vulgo spuriam data denomina:*

62—123

Numerum integrum reducere ad data fractionis denominatorem

63—124

Fractionem vulgo spuriam ad integra reducere.

ibi—125

Invenire quid data fractio valeat in data quavis certa specie

64—126

Duas vel plures fractiones heterogeneas reducere ad eundem denominatorem.

66—129

Invenire quamquam duarum, vel plurium fractionum heterogenearum valore major sit: altera, vel æqualis.

70—133

Fractiones quasvis addere.

71—135

Fractionem minorem à maiore subtrahere

73—138

Examen additionis & Subtractionis fract:

75—139

Fractiones per fractiones multiplicare.

75—140

Fractionem per fractionem dividere

76—143

Examen multiplicationis & divisionis fractionum.

77—144

Algoritmos omnes fractionum cum integris tractare, id est: Addere, Subtrahere, Multiplicare, & Dividere integra cum fractis.

79—148

Inve-

Invenire communem mensuram maximam per quam fractio reducatur ad terminos minimos.	83—154
Methodus tentativa reducendi fractiones ad terminos minimos.	86—155
Fractiorem fractionis ad fractionem sim- plicem reducere.	87—158

P A R T I S II.

De Quantitatum Potentiis, & earundem
Radicibus.

Radice quadratam extrahere ex qua- drato Algebraico.	96—184
Tabula Radicum, Quadratorum, & Cubor.	96—185
Extrahere radicem quadratam numericam.	97—186
Construere formulam universalem pro ex- trahenda radice quavis.	100—189
Datum cujusvis potentia Radicem nume- ricam extrahere.	ibi.—191
Paradigma extractionis radice cubica.	102—ibi.
Approximare ad radices veras per fra- ctiones decimales.	103—193
Extrahere radicem quamvis ex fractione.	104—194
Potentiam quamvis per exponentes ex- pressam elevare ad aliam potentiam per exponentes indicandam.	105—195
Ex data potentia per exponentes expressa indicare per exponentes extractam esse ra- dicem quamvis.	105—196
Quantitates irrationales heterogeneas re- ducere ad expressionem homogeneam	108—201
Quantitates irrationales ad expressio- nem simplicissimam seu ad terminos minimos reducere.	ibid—203
Addere quantitates irrationales.	109—205
Subtrahere quantitates irrationales	100—206
Multi-	

Multiplicare quantitates irrationales per irrationales.	111—207
Dividere quantitates irrationales per irrationales.	112—208
Radices radicem addere, Subtrahere &c.	113—209
Calculus radicem imaginariarum.	ibid—210

P A R T I S III.

De Analyfi speciosa seu arte Resolvendi Pro-
blemata & quaestiones quantumvis reconditas.

Operatio I. Analyseos, id est, Quaestiones resolvenda accurata omnium condi- tionum & circumstantiarum discussio.	116—215
Operatio II. Aptae & debita quantitarum tam cognitarum quam incognitarum per litteras denominatio.	117—216
Operatio III. Quantitatum tam cognita- rum quam incognitarum in formulam equationis collocatio, seu inventio & qualitatis expressio.	ibid—217
Operatio IV. Aequationum primarum ad unum termin. incognitum & solitari- um reductio.	118—219
Axiomata quantitatum tam aequalium quam inaequalium.	119—220
Theoremata Aequationum.	120—231
Regulae reductionum Analyticarum Ae- quationis solitariae.	122—236
Operatio V. Aequationis ad unum incogni- tum & ab omnibus notis liberum re- ducta in numeros Resolutio vel figu- ra constructio.	126—237
Problema I. Analyseos determinatum cum uno incognito.	130—
Problema II. Simile.	133—
Problema III. cum fractis	ibid—
Methodus prima eliminandi incognitos	135—247
Bb	Metbo-

	N. fol. N. 4.
Methodus secunda.	ibid=248
Problema I. cum duobus incognitis	136 - - -
Problema II. Mixtorum seu Alligationis	137 - - -
Problema indeterminatum.	140-252
Resolutio Equationum quadraticarum	142-254
Regule discernendi an data quavis equatio quadratica sit completa, vel incompleta.	143-256
Reducendi equationem quadraticam in completam.	145-259
Item affectum signo $\sqrt{\quad}$.	147-262
Problema I. Resolutionis quadraticae completae.	ibid - - -
Problema II. Resolutionis quadraticae incompletae.	148 - - -

PARTIS IV.

De Proportionibus, Progressionibus, usu Regulae aureae, Inventione Theorematum ac Problematum.	
Datis tribus terminis invenire quartum proportionalem, seu invenire regulam auream.	159-288
Datis duobus terminis invenire tertium continuè proportionalem.	ibid-289
Datis duobus terminis invenire medium continuè proportionalem.	160-290
Facta duo aequalia resolvere in proportionem reciprocam.	ibid-292

De Progressione Geometrica.

Dato termino primo & exponente rationis invenire terminum quemvis etiam maximum seu ultimum.	171-317
Invenire terminum primum, seu minim.	ibid-318
Dato termino primo, termino ultimo seu Maximo, & dato numero terminorum invenire exponentem rationis.	172-320
Dato termino primo, dato termino ul-	

	N. fol. N. 4.
mo & dato exponente rationis invenire summam omnium terminorum.	173-322
Datis duobus terminis invenire quatuorque medios continuè proportionales.	174-324
De Proportionibus, & Progressione Arithmetica.	
Invenire quartum Arithmetice proportionalem.	175-329
Invenire tertium continuè proportionalem.	ibid-330
Invenire medium continuè proportionalem.	ibid-331
Dato termino primo & differentia rationis invenire terminum quemvis	177-335
Item invenire ultimum seu maximum.	ibid-336
Dato differentia dato numero terminorum & dato termino ultimo invenire primum.	ibid-337
Dato termino primo, dato ultimo, & dato numero terminorum invenire differentiam.	ibid-338
Dato termino primo, & ultimo, & data differentia invenire numerum terminorum.	178-339
Dato termino primo, & ultimo & dato numero terminorum invenire summam omnium terminorum.	ibid-340
Dato termino primo, data summa omnium terminorum, datoque numero terminorum invenire differentiam.	ibid-341

De Regula Aurea.

Usus Regulae simplicis & directae.	181-346
Regula aurea simplicis inversae.	182-347
Regula compositae directae.	183-349
Regula compositae inversae.	ibi-351
Regula Societatis simplicis.	184-352
Regula Societatis compositae.	186-354
Inventio theorematum per compositionem	191-357
Per Substitutionem.	ibi-355
Per Analogiam.	ibi-359

ERRATA

Pag: 6 v 8 pertam,

21 v 14 43

23 v 28 loco

28 v 30 §. 3

29 v 1 §. 63

33 v 22 3c

44 v 30 = dⁿ45 v 2 = 8dⁿ

45 v 20 Defin: XVI.

59 v 11 §. 115

74 v 1 §. 213

Pag: 74 v 19 ad—ba

bd

NB2 96 v 6 2a

96 v 9 2a

102 v 2 eu

102 v 12 3abb

105 v 18 ad 2. a³ pot:106 v 15 a⁶. a³108 v 11 $\sqrt{a} = a^{r:s}$ 108 v 12 b^{m:n} & a^{r:s}108 v 15 a^{gn. ns}

110 v 17 EXLMP:

110 v 24 ± 5 113 v 11 bms: ns = $\sqrt{\quad}$

120 v 28 14

126 v 18 $\frac{26x}{24} = -c$

24

139 v 13 253.

142 v 4y = 22

165 v 11 cd

170 v 15 ma

Pag: 171 v 8 m6a2

171 v 24 a=a

CORRIGE.

portam

48

loco

§. 53

§. 68

2c

—dⁿ—8dⁿ

Defin: XVII.

§. 113:

§. 113

ad—bc

bd

2a

2a

ex

3aab

ad 2. poten.

a⁶: a³a⁶: a³ $\sqrt{a^r} = a^{r:s}$ b^{m:n} & a^{r:s}a^{gn: ns}

EXEMP:

 $\pm \sqrt{5}$ bms: ns = $\sqrt{\quad}$

24

26x—c=x

24

250

y=32

c:d

m¹: 2m⁶: a²

a—a



1509

Handwritten signature or initials.

11024-

*E. Libris . S.
Whitton L. & Co.*

