Nr 780.s.

Dział A
Znak 180
Nr kat. 2568

Biblioteka Gimnazjum męsk. im. J. I. Kraszewskiego w Białej Podl.

№ 1570.

ZASADY ARYTMETYKI.

z Biblioteki szkoły Białskiej

H
120
Wolno drukować.
W Warszawie dnia 25 Maia 1827 roku.
Radca Stanu Dyrektor Jeneralny
Wychowania Publicznego
J. K. Szaniawski.

ZASADY ARYTMETYKI,

UŁOŻONE

przez

BYŁEGO PROFESSORA MATEMATYKI

I DO UŻYTKU SZKÓŁ WYDZIAŁOWYCH I WOIEWÓDZKICH ZASTOSOWANE.

Gimnazjum męsk. im. J. I. Kraszewskiego w Białej Podl.
Biblioteka
Nr 1570.
БИБЛІОТЕКА ... ГИМНАЗІИ
411

WYDANIE DRUGIE POWIĘKSZONE.

W WARSZAWIE,
W DRUKARNI XX. FILARÓW.
1827.

№ 1570.

DO CZYTELNIKA.

Gimnazjum męsk. im. J. J. Kraszewskiego w Żytomierzu Podl.

Zwyczaiem upowszechnione zostało i słusznie, aby piszący dla publicznego użytku wyłożył poprzedniczo w krótkości pobudki, zamiar i porządek, iakiego się trzymał w swém piśmie.

Abym się usprawiedliwił z tego wszystkiego, powiem iż tylko w chęci przyniesienia korzyści uczącym się, pracę moię przedsięwziąłem.

Co się tyczy zachowanego w dziele porządku, przez który rozumiem układ rzeczy i sposób ich wykładu, wypada mi nieco obszerniéy się wytłumaczyć.

Przykładaiąc się z własnéy chęci do umieiętności matematycznych, następnie pełniąc obowiązki Nauczyciela matematyki w szkole publicznéy, starałem się obeznawać z autorami nowszemi wykładaiącemi ten przedmiot. A że każdy z oddaiących się iakiéy nauce zwykł przywięzywać się do iednego autora więcéy niż do innych, a nawet zdaie się że powinien zawsze iednego szczególniéy wybrać sobie za przewodnika (wyiąwszy gdy sam sobie zupełnie nową otwiera drogę), dla tego i ia przywiązałem się szczególniéy do autora dzieła *Traité élémentaire des mathématiques pures*, którym iest *Lemoine*.

Porządek więc iaki w ninieyszém dziełku zachowałem, iest w ogóle odpowiadaiący zachowanemu w początkach arytmetyki objętych w pomienioném dziele. W szczegółach odstępowałem czasem od wspomnionego autora, rozszerzaiąc bowiem teoryie przez niego podane, wypadała mi konieczna tego potrzeba.

Sposób wykładu w początkowych xiążkach naukowych iest nader wielkiéy wagi. Nie tylko bowiem w nich rzecz, ale i sam sposób iéy wykładania powinien być pożyteczny. Jeżeli zaś która z naypotrzebniéyszych umieiętności zdolna iest więcéy niż inne połączać w sobie te korzyści, to zapewne arytmetyka.

Wszakże sławni w starożytności mędrcy oddawali iuż téy nauce szczególne zalety. W rzeczy saméy iako pierwsza z części matematyki, pierwszy ma wpływ na wczesne rozwijanie i kształcenie władz umysłowych. Więcéy powiem, iest nauką przekonywaiącą naynocniéy o sile rozumu i iego sposobach. Sam układ liczenia naszego nie iestże dostatecznym iego dowodem (1)? W arytmetyce z danych wiadomych dochodząc niewiadomych poznaiemy drogę postępowania rozumu ludzkiego. *Kondyllak* pisząc *ięzyk rachunków (La langue des calculs)* właśnie pokazanie téy prawdy miał na celu, a *Pestalocy* wydaiąc *rachunki stosunków* zapewne nie chciał, aby praca iego była iedynie uważana, iako nauka rachunków. Sposoby, których ci uczeni użyli w swoich dzieł wykładzie, każdemu szczególną zapewniaią wartość.

Przeięty prawdą, że sposoby są istotnemi narzędziami umieiętności, że dla samych uczących są tém, czém są ci dla uczniów, pilnuiąc moiego wzoru, starałem się, ażeby praca moia i z téy strony była użyteczną.

A iako był czas w którym niedokładną naukę arytmetyki źle wykładano i nadszedł późniéyszy w którym ią lepiéy wykładać zaczęto, poprawiwszy sposoby iéy uczenia; tak i teraz spodziewać się ieszcze należy czasu w którym te sposoby więcéy prostowane i do wyższéy coraz doskonałości doprowadzane będą. Słusznie napisał ieden z uczonych zeszłego wieku; że umieiętności doskonalić się będą w miarę doskonalenia się sposobów ich wykładania (2).

Niezaprzeczenie korzystna iest, gdy uczący się sam wiele rzeczy dochodzi, i gdy sama nauka nastręcza mu rozmaite w téymierze ćwiczenia. Z tychto względów szczególniéy umieiętności matematyczne maią nad innemi pierwszeństwo.

Gdy iednak wszelkie prawidła nauki powinny być iasne i dokładne, starałem się i ia takowe zachować, zostawiaiąc uczącemu się wprawę i przyiemność rozwiązywania stosownych zagadnień umieszczanych po każdéy teoryi dla łączenia iéy z praktyką.

Podawane zagadnienia stosowałem do różnych przypadków zachodzić mogących w właściwych rachunkach, zachowuiąc potrzebne stopniowanie od łatwiéyszych do trudniéyszych. Nie mogą przecież i zawikłańsze mieć żadnéy trudności dla tych, którzy dobrze zrozumieią poprzedzaiące zasady i mieć będą przytomnym w umyśle stan podanego zagadnienia czyli wszystkie dane iego warunki.

Na końcu dzieła umieściłem wypadki z rozwiązania wykonywaiąc w niektórych całą robotę, a w innych wskazuiąc tylko drogę postępowania.

(1) Teraźniéysze urządzenia edukacyyne w Prusach słusznie zalecaią, aby Nauczyciele w początkowych klassach, tak zwanych szkół uczonych, wykładali różne systemata liczenia.

(2) *Kondyllak* myśl tę wyrażoną na wielu mieyscach w swych dziełach, rozwinął szczególniéy w xiążce ostatniéy dzieła: *Cours d'Etudes* gdzie mówi o początku i wzroście wielu nauk. Są tam w rozdziale VI słowa iego. *Les sciences doivent leurs progrès aux methodes rendues plus simples, et si elles en ont fait de si lents pendant plusieurs siècles, c'est que rien n'est si difficile que de simplifier.* Lecz mianowicie co do Arytmetyki okazał nader iasno tę prawdę w dziele *La langue des calculs.*

Przyłączyłem także wiadomość o układzie nowych miar francuzkich, tablice metrologiczne miar, wag i monet niektórych kraiów i miast Europeyskich, tudzież tablice podziału nowych miar polskich i stosunki zbliżone tychże miar z dawnemi miarami polskiemi.

Jeżeli użyłem niektórych wyrazów nowszych, to iedynie z tych powodów dla których iuż gdzie indziéy ich użyto. Nie masz tu bowiem żadnego któryby się iuż nie znaydował w iakiéy arytmetyce polskiéy. Takiemi są szczególniéy nazwiska *stosunków różnicowych i ilorazowych* zamiast dawniéyszych i nawet dosyć upowszechnionych nazwisk *stosunków arytmetycznych i ieometrycznych.* Lecz skoro nowsze wyrazy oddaią rzecz właściwiéy, wypada ich używać; a skoro będą używane, wkrótce przestaną razić nowością. Z resztą szedłem za przykładem nayznakomitszych matematyków teraźniéyszych (3).

W ogólności wyłożyłem obszerniéy między innemi teoryią wspomnionych stosunków i proporcyy. Jest ona bowiem zasadą nayważniéyszych reguł arytmetycznych iako i wszystkich znaiomości potrzebnych tym, którzy chcą zgłębiać umieiętności matematyczne.

Jeżeli praca moia, przydatna mi dawniéy w obowiązkach powołania Nauczycielskiego, choć w części i teraz odpowie swoiemu celowi będzie to dla mnie zupełną nagrodą.

(3) Obacz: *Traité élementaire d'Arithmetique à l'usage de l'école des quatre-Nation par Lacroix. Paris* 1813 *karta* 105; tudzież *Arithmetique d'Emile par Em. Develey, Ouvrage que le Conseil d'Instruction publique, établi près le Ministre de l'Interieur à Paris, a mis dans la liste des livres Elementaires* Paris, 1802 karta 468 Nota XIV.

REJESTR RZECZY.

O Liczeniu . . . . . karta 1
Zagadnienia . . . . . — 11
O Rachunku liczebnym . . . . . — 11

O działaniach głównych arytmetyki na liczbach całych i dziesiętnych.

O dodawaniu liczb całych i dziesiętnych . — 13
Zagadnienia . . . . . — 15
O odeymowaniu liczb całych i dziesiętnych . — 16
Zagadnienia . . . . . — 21
O mnożeniu liczb całych i dziesiętnych . . . — 22
Zagadnienia . . . . . — 30
O dzieleniu liczb całych i dziesiętnych . . . — 30
Zagadnienia . . . . . — 43
Zagadnienia w które wchodzą poprzedzaiące działania połączone . . . . . — 43

O działaniach głównych arytmetyki z ułomkami zwyczaynemi.

Wiadomości poprzednicze . . . . . — 45
Zagadnienia . . . . . — 53
O dodawaniu ułomków . . . . . — 54
Zagadnienią . . . . . — 53
O odeymowaniu ułomków . . . . . — 55
Zagadnienia . . . . . — 56
O mnożeniu ułomków . . . . . — 57
Zagadnienia . . . . . — 60
O dzieleniu ułomków . . . . . — 61
Zagadnienia . . . . . — 65
Zagadnienią w które wchodzą poprzedzaiące działania ułomków połączone . . . . — 65
O ułomkach ciągłych . . . . . — 67
Zagadnienia . . . . . — 70

O zamianie ułomków zwyczaynych na dziesiętne i przeciwnie. O ułomkach peryiodycznych — karta 71
Zagadnienia . . . . . — 77

O działaniach głównych z liczbami wielorakiemi czyli różnogatunkowemi — 78

O dodawaniu liczb wielorakich . . . . . — 80
Zagadnienia . . . . . — 81
O odeymowaniu liczb wielorakich . . . . — 82
Zagadnienia . . . . . — 83
O mnożeniu liczb wielorakich . . . . . — 83
Zagadnienia . . . . . — 88
O dzieleniu liczb wielorakich . . . . . — 88
Zagadnienia . . . . . — 91

O podnoszeniu do potęg i wyciąganiu pierwiastków . . . . . — 92

O wyciąganiu pierwiastków kwadratowych . — 94
Zagadnienia . . . . . — 100
O wyciąganiu pierwiastków sześciennych . . — 101
Zagadnienia . . . . . — 108

O stosunkach proporcyiach i postępach . . . . . — 108

O własnościach proporcyy i postępów różnicowych 112
Zagadnienia . . . . . — 119
O własnościach proporcyy i postępów ilorazowych 121
Zagadnienia . . . . . — 130
O regule trzech . . . . . — 130
— łańcuchowéy . . . . . — 139
— procentu . . . . . — 147
— odtrącania . . . . . — 155
— spółki . . . . . — 161
— połączenia czyli mieszania . — 168
— fałszywego założenia . . — 177

Do każdéy z tych reguł dodane są osobne zagadnienia:

O logarytmach . . . . . karta 182

Zagadnienia . . . . . — 201

O układzie nowych miar francuzkich . . — 203
Uwagi z powodu tego układu . . . . . — 207
Przypisy do czterech głównych działań arytmetycznych, czyli sposoby niektórych ułatwień i skróceń w pomienionych działaniach . . . . . — 208
Rozwiązania zagadnień w ciągu dzieła podawanych . . . . . — 215

Tablice Metrologiczne . . . . . —

I. Miary długości.
II. Miary powierzchni.
III. Miary objętości.
IV. Wagi.
V. Monety.
VI. Podziały miar polskich i stosunki zbliżone polskich miar nowych z dawnemi wyrażone w liczbach całkowitych.

REJESTR

Niektórych rzeczy szczególnych poprzedzaiącym rejestrem ogólnym nie wskazanych.

Systemat naszego liczenia gruntuie się na téy zasadzie: że w ciągu cyfer położonych iednych obok drugich, ważność każdéy z nich staie się postępnie dziesięć razy większą z miéysca na miéysce idąc od prawéy ręki do lewéy, i dla tegoto arytmetyka nasza zowie się *dziesiętna* . . . . . n° 29

Użycie dziesięciu znaków liczebnych nie było rzeczą konieczną, bo można było użyć ich mniéy lub więcéy i wprowadzić iakikolwiek układ liczenia . . . . . n° 30

Systemat liczenia dwunastny byłby dogodniéyszy od systematu dziesiętnego . . . n° 31

Dodawanie i odeymowanie może się odbywać tylko na liczbach iednorodnych . . n° 36 i 37

Definicyie ilości *dodatnych* i *odiemnych*, gdzie się oraz pokazuie iż summa może być mniéysza od iednéy z liczb które ią swém połączeniem formuią, wzaiemnie różnica może być większa niż liczba od któréy się odeymowało; a stąd, iż dodawanie nie zawsze iest zwiększaniem, ani odeymowanie zawsze zmniéyszaniem . . . . . n° 60 64

Okazanie iż dwa lub więcéy czynników rozmnożonych przez siebie w iakimkolwiek porządku daią zawsze ten sam iloczyn . . n° 73 i 74

Mnożnik oznaczaiąc ile razy ma się wziąć mnożna, powinien być uważany iako liczba ogólna; a stąd iloczyn mieć będzie iedności téyże natury co mnożna . . . . . n° 80

Definicyie liczb *wielokrotnych*, *pierwotnych* . n° 87 i 89

Dla czego za każdém dzieleniem cząstkowém nie można nigdy więcéy położyć w ilorazie iak 9. . . . . n° 99

Sposób poznania wszystkich dzielników dokładnych iakiéy liczby . . . . n° 101 i 102

Sposób przybliżenia prawdziwéy ważności ilorazu gdy ten dokładnym być nie może . n° 113

Natura iedności ilorazu oznaczona iest przez zadanie . . . . . n° 114

Wszystkie sposoby sprowadzania ułomków do iednakowego mianownika gruntuią się na téy zasadzie: iż można czynić w ich wyrażeniu różne odmiany bez odmiany ich ważności . n° 132

Sposób sprowadzania ułomków do nayprostszego wyrażenia, zależy od sposobu poznania czy liczba podzielna iest przez 2, 3, 5, i t. d. a szczególniéy od sposobu znalezienia naywiększego dzielnika spólnego dwom liczbom n° 134 do 138

Sposób łatwy znalezienia ważności ułomka ułomków . . . . . n° 166

Z mnożenia przez ułomek iloczyn wypadać musi mniéyszy a z dzielenia iloraz większy niż druga liczba do działania wchodząca; stąd, wyraz *mnożyć* nie zawsze odpowiada znaczeniu *powiększać*, ani wyraz *zawierać* nie zawsze bywa użytym właściwie w dzieleniu n° 166 i 167

Zastosowanie sposobu szukania naywiększego spólnego dzielnika dwóch liczb do rozwinienia ułomku zwyczaynego na ułomek ciągły . n° 174

Przy opuszczaniu cyfer dziesiętnych iaką należy mieć ostróżność aby błąd był iak naymniéyszym . . . . . n° 187

Krótka wiadomość o niektórych iednościach miar pospolicie używanych . . . . . n° 190

W dodawaniu liczb wielorakich czas oznaczaiących zachodzić mogą szczególne względy . n° 192

W wynoszeniu liczb do potęg wyższych iak się skraca działanie . . . . . n° 217

Definicyia *wykładnika* . . . . . n° 218

Definicyia *liczb niespółmiernych* . . . n° 230

Umieiąc wyciągać pierwiastek kwadratowy i sześcienny, iak można wyciągać pierwiastek

z liczby którey wykładnik iest potęgą z 2, lub potęgą z 3, lub iloczynem potęgi z 2 przez potęgę z 3. . . . . nº 246
Jakie odmiany czynić można w proporcyi różnicowéy bez iéy zepsucia . . nº 269 do 271
Jakie odmiany czynić można w proporcyi ilorazowéy bez iéy zepsucia . . nº 289 do 295
Uwagi nad analogiią zachodzącą między własnościami stosunków proporcyy i postępów różnicowych i ilorazowych . . . nº 299
Sposoby łatwego rozwiązania zagadnień reguły trzech składanéy z ilukolwiekbądź stosunków . . . . . nº 306 do 309
Ściśle uważaiąc, iest tylko ieden gatunek reguły trzech, chociaż iest liczba prawie nieskończona zagadnień do których ią można stosować . . . . . nº 309
Sposób używania tablic metrologicznych . nº 323 do 327
Zastosowanie własności *ułomków z ułomków* do zamian miar i pieniędzy . . . nº 327
Sposób ułatwiaiący rozwiązanie zagadnień procentu składanego . . . nº 337 do 341
W zagadnieniach reguły odtrącania, gdy kwota od któréy chcą odtrącać miała być spłacana częściami przez znaczny przeciąg czasu, zachodzi wiele względów . . . nº 346
W zagadnieniach reguły spółki zachodzić mogą wątpliwości przy rozdzieleniu straty pomiędzy spólników, którzy mieli w spółce nierówne kapitały przez nierówne czasy. Rachunek w tym razie zależyć powinien od warunków umowy i zastosowanych do niéy okoliczności . nº 353 do 355
Reguły połączenia używa się do wzięcia środka między wypadkami z doświadczenia lub postrzeżeń otrzymanemi, a które nie zgadzaią się z sobą. Między tą regułą i *rachunkiem prawdopodobieństwa* zachodzi analogiia . nº 363 do 366
Jakie zagadnienia zowią się *niewyznaczone* . nº 371
Co nazywamy układem czyli systematem logarytmów. Ten będąc dowolny może być rozmaity. Jaki systemat do ułożenia zwyczaynych logarytmów przyięto . . . nº 384
Przykład okazuiący drogę szukania logarytmów liczb pierwotnych . . . . . nº 389
Sposób znalezienia logarytmu liczby która się w tablicach nie znayduie . . nº 402 do 407
Sposób uniknienia logarytmów odjemnych . nº 407
Sposób znalezienia odpowiadaiącego danéy liczbie logarytmu który się w tablicach nie znayduie . . . . . nº 408 do 414
Użycie dopełnień arytmetycznych do ułatwienia rachunków z logarytmami . . nº 414 do 418

TABLICA
NIEKTÓRYCH MIAR I SKRÓCEŃ
przez które ie wyrażamy.

DO MONET.

# znaczy . . .	dukat	1 dukat czyli czerwony złoty waży	3 tal:
tal.	talar	1 talar	6 zło:
zł.	złoty.	1 złoty	30 gr:
gr.	grosz	1 grosz	3 szl:
szl.	szeląg.		

DO WAG.

Cetn: znaczy . .	cetnar	1 cetnar waży.	4 kamienie
k.	kamień	1 kamień . .	25 funtów
lb	funt	1 funt . . .	2 grzywny
G. lub M. grzywna c.	marka	1 grzywna . .	8 uncyy
unc. lub ℥ . . .	uncya	1 uncyia	2 luty
ł.	łut	1 łut . . .	4 drachmy
dr. lub ʒ . . .	drachma	1 drachma .	3 skrupuły
skr. lub ℈ . . .	skrupuł	1 skrupuł . .	24 gran
gr.	gran	gr. . . .	5½ granikow
grk.	granik	1 granik . .	8 miligramów

DO MIAR DŁUGOŚCI.

sąż. znaczy . . .	sążeń	1 sążeń zawiera .	3 łokcie
łok.	łokieć	1 łokieć . . .	2 stopy
st.	stopa	1 stopa . . .	12 cali
c.	cal	1 cal	12 liniy
l.	linia	1 liniia . .	2 milimetry
m.mt. . . .	milimetr		

DO MIAR OBIĘTOŚCI.

kor. znaczy . .	korzec	1 korzec zawiera	4 ćwierci
ćw.	ćwierć	1 ćwierć . . .	8 garcy
gar.	garniec	1 garniec . . .	4 kwarty
kw.	kwarta	1 kwarta . .	4 kwaterki

DO CZASU.

d. znaczy	dzień	1 dzień ma .	24 godzin
god.	godzina	1 godzina . .	60 minut
'	minuta	1 minuta . .	60 sekund
''	sekunda	1 sekunda . .	60 tercyy

ZASADY
ARYTMETYKI.

O LICZENIU.

1. Człowiek ma w rozumie swoim władze za pomocą których, może otaczaiące go przedmioty rozróżniać, liczyć i porządkować. Może z mnóstwa ich ieden wybierać, i to właśnie prowadzi go do poięcia *iedności* (unitas).

2. Mnóstwo czyli wielość nazywamy w ogólności *liczbą* (numerus). Kilka lub kilkanaście groszy równie iak kilka lub kilkanaście złotych składaią liczbę. Nie mogę iednak policzyć ich razem bo są rzeczami odmiennego gatunku. Lecz gdy oba gatunki mogę uważać pod iednym względem i podciągnąć pod iedno nazwisko sztuki monety lub metalu, natenczas mogę ie razem policzyć.

3. Przez liczenie można rozumieć zbieranie iedności dla poznania liczby czyli wielości, lecz zwykle w nauce rachunków przez *liczenie* (numeratio) rozumie się sztuka wyrażania iakiéykolwiek liczby przez znaki umówione i wysłowiania każdéy liczby temi znakami wyrażonéy.

4. Ponieważ każda liczba iakkolwiekbądź wielka lub mała, złożona jest z jedności, każda więc da się powiększyć albo zmnieyszyć, dolíczaiąc do niéy albo odliczaiąc od niéy te iedności, co nazywamy *rachunkiem* (calculus).

5. Nauka o liczbach obeymuiąca naukę liczenia i rachunku nazywa się *Arytmetyką*.

6. Powiedzieliśmy wyżéy (n° 2) co rozumimy w ogólności przez liczbę. Właściwie *liczba iest zbiorem wielu iedności*

tegoż samego gatunku, a iedność iest ilość czyli *wielkość do którey przyrównywamy wielkości tegoż samego gatunku*; to iest: ilość wzięta (nayczęściey dowolnie) za wyraz porównania czyli miarę wielkości iednego gatunku. Tak gdy mówię: ten papier iest na dziesięć złotych; dziesięć iest liczbą względem złotego, który w tym przykładzie iest iednością, do którey przyrównywam wartość tego papieru, a ta liczba iest zbiorem dziesięciu iedności złotych: pewne ciało waży pięć funtów; pięć, iest liczbą, funt iednością, to iest ilością, do którey przyrównywam ciężar tego ciała.

7. O ilości uważaney bezwzględnie nie można mówić że iest wielka lub mała. Wyrazy *wielki, mały*, każą się domyślać porównania. I tak ieżeli kilka wielkości iednego gatunku np. kilka długości odnosimy do iedney dowolnie wziętey, czyli z nią porównywamy, natenczas twierdzić możemy, iż iedna z nich iest większa lub mniéysza od innych.

8. Ilość do którey przyrównywamy wielkości iednegoż gatunku, nie uważa się za podzielona, dopóki ią uważamy za iedność; lecz przecież może być podzielona, i tém samém mieć części względem których stanie się liczbą. Tak złoty wzięty za iedność, można rozdzielić na dziesięć części równych, i ten staie się natenczas liczbą uformowaną przez zbiór tych dziesięciu części z których każda iest iednością. Chcąc oznaczyć ciężar ciała ważącego pięć funtów, mógłbym wziąć za iedność wagę mniéyszą od funta, a natenczas ciężar ciała byłby oznaczony przez liczbę większą niż pięć (1).

9. Liczby zawieraiące w sobie iedność pewną liczbę razy zupełnie, zowią się *liczby całkowite* czyli prosto *całkowite* (numeri integri); liczby zawieraiące w sobie tylko iednę lub wiele części iedności, zowią się liczby *ułomkowe* czyli ułomki (numeri fracti vel fractiones). Pięć, siedm, dziesięć złotych i. t. d.

(1) Wiele na tém zależy, aby mieć zaraz w początkach i[illegible] wyobrażenie *iedności*, która umysłowo uważana iest właściwie spólną miarą liczb; uważana zaś zmysłowo we wszelkich miarach, niczém innem nie iest, tylko ilością wziętą za wyraz porównania, a zatém iest zawsze ilością do którey przyrównywamy wielkości iednegoż gatunku. Tu iest mieysce obeznania się z różnemi iednościami miar, które dla ułatwienia czynności w towarzystwie zwyczay i Rządy ustaliły. *Obacz* Tablicę niektórych miar na początku położoną.

są całkowite: pół, trzy czwarte, siedm dziesiątych części złotego i t. d. są ułomki (1).

10. Liczby całkowite i liczby ułomkowe są *mianowane* czyli *szczególne* (numeri concreti) lub *niemianowane* czyli *ogólne* (numeri abstracti). Są mianowane gdy gatunek iedności iest oznaczony; a są niemianowane gdy gatunek iedności nie iest oznaczony. Ośm złotych, sześć funtów, dziewięć dziesiątych złotego, są liczby mianowane: trzy, cztery, pięć razy, pół, trzy czwarte, są liczby niemianowane.

11. Oczywista iest rzecz iż liczb może być nieskończenie wiele, i że napróżnoby usiłowano wyrażać ie wszystkie przez tyleż odmiennych znaków; bo wielość tych znaków pociągnęłaby za sobą niemożność zatrzymania ich w pamięci. Trzeba było więc użyć innego sposobu, a ten którego użyto, iest równie prostym iak dowcipnym. Zależy on na używaniu nie wielu znaków rozmaicie kombinowanych.

12. Tych znaków które zowiemy *Cyframi* (notæ numerorum) mamy tylko dziesięć, w przyiętym sposobie liczenia. Oto ich kształt i ważności:

0. 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7.
zero, iedno, dwa, trzy, cztery, pięć, sześć, siedm,
8. 9.
ośm, dziewięć,

Zero, gdy iest samo nic nie znaczy: za pomocą zaś innych cyfer wyrażamy liczby od iednego aż do dziewięciu włącznie.

13. Liczby wyrażone przez iednę tylko z tych dziewięciu cyfer znaczenie maiących, nazywaią się *liczby poiedyncze*; wszystkie inne nazywamy *liczbami złożonemi*.

Liczby poiedyncze nazywamy także *liczbami iednocyfrowemi* lub *iednościami pierwszego rzędu*.

14. Dla wyrażania liczb złożonych zgodzono się:

1od aby z dziesięciu iedności zrobić tylko iednę *drugiego rzędu* którąby nazwano *dziesiątek*.

(1) Przez liczbę ułomkową rozumieią niektórzy zbiór iedności całkowitych i części iedney iedności tegoż gatunku, temu iednak nie sprzeciwia się powyższe określenie, obaczymy bowiem niżey, iż są ułomki, które zawieraią i całkowitości t. i. ułomki niewłaściwe.

2re, aby rachować dziesiątki iak się rachuią iedności, mówiąc: ieden dziesiątek, dwa dziesiątki, i tak następnie aż do dziewięciu dziesiątków.

3ie, ażeby użyć do wyrażania dziesiątków, tychże cyfer których używaią do wyrażania iedności; lecz żeby dla ich rozróżnienia położyć ie na drugiém mieyscu. Tak 10 oznacza ieden dziesiątek, czyli dziesięć; 20 dwa dziesiątki czyli dwadzieścia; 30 trzy dziesiątki czyli trzydzieści; 40 cztery dziesiątki czyli czterdzieści; 50 pięć dziesiątków czyli pięćdziesiąt; 60 sześć dziesiątków czyli sześćdziesiąt; 70 siedm dziesiątków czyli siedmdziesiąt; 80 ośm dziesiątków czyli ośmdziesiąt; 90 dziewięć dziesiątków czyli dziewięćdziesiąt.

Postępuiąc od dziesięciu do dwudziestu, znayduiemy iedenaście, dwanaście, i t. d. nareszcie dziewiętnaście. Nic zaś nie iest łatwieyszego, iak wyrazić te liczby pośrednie. Bo iedenaście iest to samo co dziesięć i ieden, dwanaście iest to samo co dziesięć i dwa i t. d. dziewiętnaście iest to samo co dziesięć i dziewięć. Napiszemy więc 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, gdzie widać, iż 1 położony na drugiém mieyscu, waży dziesięć.

Podług tego napiszemy bez trudności liczby zawarte między dwadzieścia i trzydzieści, między trzydzieści i czterdzieści, i tak następnie aż do dziewięćdziesiąt dziewięć, czyli dziewięć dziesiątków i dziewięć iedności, co się napisze 99.

15. Zgodzono się także, aby z dziesięciu dziesiątków zrobić iednę tylko *iedność trzeciego rzędu* którąby nazwano *sto*; i rachować sta iak rachuią dziesiątki i iedności, mówiąc iedno sto, dwa sta, i t. d. aby używać tychże cyfer, lecz żeby ie odróżnić kładąc ie na trzeciém mieyscu. Tak 100 znaczy iedno sto czyli sto; 200 dwa sta czyli dwieście; 300 trzy sta czyli trzysta; 400 cztery sta czyli czterysta; 500 pięć set czyli pięćset; 600 sześć set czyli sześćset; 700 siedm set czyli siedmset; 800 ośm set czyli ośmset; 900 dziewięć set, czyli dziewięćset.

Między sto i dwieście, iest sto ieden, sto dwa, i t. d. nareszcie sto dziewięćdziesiąt dziewięć. Dla wyrażenia tych liczb pośrednich, uważmy iż liczba np. sto dziewięćdziesiąt dziewięć, waży iedno sto, dziewięć dziesiątków i dziewięć iedności: napiszemy więc 199.

Liczba sto ieden, która oznacza iedno sto, nic dziesiątków i iednę iedność, napisze się 101. Zero znaczy iż nie ma dziesiątków, a 1 położony na trzeciém mieyscu waży sto.

Między dwieście i trzysta, między trzysta i czterysta i t. d. znayduią się też same liczby co między sto i dwieście; napiszemy ie więc podobnież. Tak dla wyrażenia dziewięćset dziewięćdziesiąt dziewięć, czyli dziewięćset, dziewięć dziesiątków, i dziewięć iedności, napiszemy 999.

16. Trzy cyfry tak położone nazywaią się *przedziałem iedności*. Trzy cyfry położone po lewéy stronie przedziału iedności, iak np. 954,729 składaią *przedział tysięcy*. Dla uformowania tego przedziału zgodzono się, aby z dziesięciu set, zrobić tylko iednę iedność tysięcy, z dziesięciu iedności tysięcy, ieden dziesiątek tysięcy, z dziesięciu dziesiątków tysięcy, iedno sto tysięcy.

W tym względzie każda cyfra znaczenie maiąca położona na pierwszém mieyscu wyraża iedności *poiedyncze*, położona zaś na innych mieyscach następuiących od prawéy ku lewéy ręce, wyraża iedności *zbiorowe*.

Przez podobne postępowanie formuią *przedział miliionów, przedział biliionów, przedział triliionów, kwadryliionów* i t. d. a w każdym przedziale cyfra z prawéy strony będąca wyraża iedności, cyfra w środku dziesiątki, a cyfra z lewéy strony sta tego rzędu od którego się przedział nazywa.

Możnaby także było składać przedziały po dwie lub po cztery cyfry; lecz w pierwszym razie byłoby więcéy przedziałów w iakiéy liczbie daney, w drugim mniéy niż podług teraźnieyszego sposobu ich składania. Zważaiąc granice liczb, iakie pospolicie w użyciu zachodzić mogą, łatwo widzieć, iż wzięto środek w téymierze przyzwoity.

Dla łatwieyszego ieszcze poznania rozmaitych rzędów i przedziałów liczb dosyć iest przypatrzyć się liczbie następuiącéy, która iest podzielona na przedziały, i pod każdą cyfrą podpisana iéy ważność ze względu na mieysce które zaymuie:

Przedział:

triliionów		*biliionów*		*miliionów*			*tysięcy*			*iedności*		
8	3	5	9	7	8	6	2	4	0	7	6	5	4
dziesiątki	iedności	sta	dziesiątki	iedności	sta	dziesiątki	iedności	sta	dziesiątki	iedności	sta	dziesiątki	iedności

(1).

17. Podług tego widzimy, iż w cyfrach naszych trzeba rozróżnić dwie ważności; iednę nadaną przez umowę, a drugą przez mieysce na którém są położone. Pierwsza nazywa się ważność *bezwzględna*, druga ważność *mieyscowa*. W tém wyrażeniu 500, ważność bezwzględna cyfry 5 iest pięć, ważność iéy mieyscowa iest pięćset, to iest 5, iedności, z których każda waży sto (2).

18. Łatwo iest teraz napisać cyframi iaką liczbę wymówioną albo napisaną głoskami, np. liczbę ośmset trzydzieści siedm miliionów, czterysta trzy tysiące, dwadzieścia trzy. W saméy rzeczy, przez proste wysłowienie widzę od razu, 1od iż mi trzeba trzech przedziałów; 2re iż w przedziale tysięcy nie ma dziesiątków; ani set, w przedziale iedności, napiszę więc 837,403,023.

19. Aby wysłowić liczbę napisaną cyframi, trzeba postępuiąc od prawéy do lewéy ręki podzielić ią na przedziały, każdy o trzech cyfrach, wyiąwszy ostatni po lewéy ręce, który ich może zawierać dwie lub tylko iednę (3); potém wymawiać każdy przedział ieden po drugim, zaczynaiąc od przedziału naywyższego, i wyrażać ważność mieyscową cyfer

(1) Autorowie niemieccy rachuią zwykle po przedziale miliionów, przedział tysięcy miliionów; po przedziale biliionów, przedział tysięcy biliionów i t. d. podług tego więc, na biliion rachuią miliion miliionów; na triliion, miliion triliionów i t. d.

(2) Nader wiele ułatwi sobie rachunki ten, który się wcześnie wprawi w szybkié na pamięć przebieganie tych przedziałów od pierwszego do wyższych i na odwrót; ztąd bowiem zaraz będzie wiedział do którego rzędu należą a tém samém na którém mieyscu od iedności zacząwszy znayduią się sta, dziesiątki lub iedności iakiegokolwiek przedziału, np. dziesiątki biliionów są na 10tém mieyscu, w 4tym przedziale zatém na 11tém mieyscu od iedności zacząwszy.

(3) Wprawiwszy się robimy te przedziały myślą.

tenże przedział składaiących, dołączaiąc nazwisko przedziału do nazwiska cyfry iedności, np. liczba następuiąca, 34|904|827|937 wysłowi się tak: trzydzieści cztery biliiony, dziewięćset cztery miliiony, ośmset dwadzieścia siedm tysięcy, dziewięćset trzydzieści siedm (1).

20. Takąto drogą postąpiono, chcąc pisać cyframi i wymówić słowami wszystkie o iakich pomyśléć można liczby naszego składu arytmetycznego rosnącego (échelle arithmétique ascendante); a zastanowiwszy się cokolwiek, postrzeżemy, iż zupełnie podobnym sposobem trzeba postąpić, chcąc pisać cyframi i wymawiać słowami wszystkie iakie być mogą liczby naszego składu arytmetycznego maleiącego, (échelle arithmétique descendante).

W saméy rzeczy, nic nie przeszkadza żebyśmy uważali iedność iako złożoną z dziesięciu cząstek równych, z których każda będąc dziesięć razy mnieysza od iedności; ważyć będzie *dziesiątą* część (*decimalis*) téy iedności, czyli krócéy *dziesiątą*.

Podobnież możemy sobie wystawić iż dziesiąta iest złożona z dziesięciu cząstek równych, z których każda, iako dziesięć razy mnieysza od dziesiątéy, będzie sto razy mnieysza od iedności, i ztąd ią nazwiemy *setną*.

Podobnież będziemy uważać setną iako złożoną z dziesięciu cząstek równych, z których każda będąc dziesięć razy mnieyszą od setnéy, będzie sto razy mnieyszą od dziesiątéy a tysiąc razy mnieyszą od iedności, i ztąd ią nazwiemy *tysięczną*.

Rozciągniemy bez trudności to rozumowanie do *dziesięciotysięcznych*, *stotysięcznych*, *miliionowych*, *dziesięciomilliionowych*, *stomiliionowych*, i t. d.

21. Więc iedność waży dziesięć dziesiątych, sto setnych, tysiąc tysiącznych, dziesięć tysięcy dziesięciotysiącznych i t. d.

Dziesiąta, waży dziesięć setnych, sto tysiącznych, tysiąc dziesięciotysiącznych i t. d.

(1) Zamiast *dwieście tysięcy, trzysta tysięcy.... dziewięćset tysięcy*, używamy w języku naszym wyrażeń *dwakroć stotysięcy, trzykroć stotysięcy.... dziewięćkroć stotysięcy*; lecz ieżeli oprocz set znayduią się dziesiątki i iedności tysięcy, wyrażenie to niepowinno się używać gdyż iest wątpliwém. I tak w naszym przykładzie, mówiąc: ośm kroć sto dwadzieścia siedm tysięcy rozumiećby można ośm razy 127 tysięcy, bo *kroć* znaczy *razy*.

Setna waży dziesięć tysiącznych, sto dziesięciotysiącznych, i t. d.

Tysiączna waży dziesięć dziesięciotysiącznych, i t. d.

22. To wszystko dobrze zrozumiawszy, mówię:

1od cyfra położona na piérwszém miéyscu po lewéy stronie iedności ma ważność miéyscową dziesięć razy większą czyli wyraża dziesiątki; więc cyfra położona na piérwszém miéyscu po prawéy stronie iedności mieć będzie ważność mieyscową dziesięć razy mniéyszą czyli wyrazi dziesiąte.

2re Cyfra położona na drugiém miéyscu po lewéy stronie iedności wyraża sta; więc cyfra położona na drugiém miéyscu po prawéy stronie iedności wyrazi setne.

3ie Cyfra położona na trzeciém miéyscu po lewéy stronie iedności wyraża tysiące; więc cyfra położona na trzeciém miéyscu po prawéy stronie iedności wyrazi tysiączne.

Znaydziemy podobnie że cyfra położona po prawéy stronie iedności wyraża na czwartém miéyscu dziesięciotysiączne, na piątém miéyscu stotysiączne, na szóstém mieyscu miliionowe na siódmém mieyscu dziesięciomiliionowe i t. d.

23. Aby wyrazić w cyfrach liczbę: sześć całkowitych, pięćset dwadzieścia cztery tysiącznych; napiszę 6,524 lub 6.524 rozróżniaiąc przez znak umówiony, to iest przecinek lub kropkę rzęd iedności. Cyfry położone po prawéy stronie przecinka lub kropki, nazywaią się *cyfry dziesiętne*, a ilości które one wystawiaią nazywaią się *części dziesiętne*, lub prosto *dziesiętne* (decimales).

Aby wyrazić cztery dziesięciotysiączne, napiszę 0,0004 kładąc zero na zastąpienie mieysca iedności, a po przecinku, zer trzy, na mieysce dziesiątych, setnych, i tysiącznych, które się w podanéy liczbie nie znaydnią.

24. Jeżeli idzie o wysłowienie w mowie liczby 7,4652 zamiast mówienia, siedm całkowitych, cztery dziesiątych, sześć setnych, pięć tysiącznych, powiem: siedm całych, czterysta sześćdziesiąt pięć tysiącznych. Mógłbym też mówić siedm tysięcy czterysta sześćdziesiąt pięć tysiącznych. (n° 21).

25. Łatwo widzieć, iż kładąc iedno lub więcéy zer po ostatniéy dziesiętnéy cyfrze liczby iakiéy, nie zmienia się wartość, lecz tylko wyrażenie téy liczby. Tak 0,24 iest toż samo co 0,240; 0,2400; 0,24000, i t. d. liczba 2 iest równa 2,0; 2,00; 2,000; 2,000000; i t. d. gdyż żera te oznaczaią iż

nie ma części dziesiętnych rzędu niższego, tak iak zera dopisane po lewéy stronie liczby całéy oznaczaiące że nie ma iedności rzędu wyższego, ważności iéy nie odmieniaią.

26. Lecz widzimy iż przeniesienie przecinka ważność liczb odmienia. Jeżeli cofasz przecinek o iedno, dwa, trzy, i t. d. miéysca ku lewéy ręce, liczba przez to staie się 10, 100, 1000, i t. d. razy mniéyszą; np. od liczby 945,8 iest dziesięć razy mniéysza liczba 94,58 a sto razy mniéysza 9,458 i t. d. bo iedności całkowite i części dziesiętne rzędów wyższych, zamieniaią się na iedności całkowite i części dziesiętne rzędów niższych.

27. Przeciwnie, ieżeli posuwasz przecinek o iedno, dwa, trzy i t. d. miéysca ku prawéy ręce, liczba przez to staie się 10, 100, 1000, i t. d. razy większą. Tak od liczby 5,4271 iest dziesięć razy większa liczba 54,271 a sto razy większa 542,71 i t. d. bo iedności całkowite i części dziesiętne rzędów niższych, zamieniaią się na iedności całkowite i części dziesiętne rzędów wyższych.

28. Jeżeli nie można posunąć lub cofnąć przecinka, dla braku cyfer ważność maiących, nagradza się to zerami, np. ażeby liczba 12,34 stała się 1000 razy większą lub mniéyszą, trzeba napisać 12340 lub 0,01234 (1).

29. Z tego wszystkiego co się dotąd powiedziało o wyrażaniu liczb w przyiętym składzie arytmetycznym bądź rosnącym, bądź maleiącym, widzimy, iż zupełny system naszego liczenia na téy się iedynie gruntuie zasadzie przyiętéy: *że w ciągu cyfer położonych iednych obok drugich, ważność każdéy z nich staie się postępnie dziesięć razy większą z mieysca na mieysce postępuiąc od prawéy ręki do lewéy, i odwrotnie.* Dla tego to nasza arytmetyka zowie się *dziesiętna* (decimalis albo denaria).

30. Możnaby było użyć mniéy lub więcéy znaków liczebnych i przypuścić inne prawo zwiększania się ważności mieyscowéy tych znaków; umówić się np. iżby idąc od prawéy ręki do lewéy, stawały się następnie za każdém mieyscem dwa razy, cztery razy, dwanaście razy większe, i natenczas arytmetyka byłaby nazwana *dwóyna*, *czwórna*, *dwunastna* (binaria, quaternaria, duodenaria).

(1) Zręczne tego przystósowania czynić można w nowych miarach dziesiętnych.

Lecz prawie wszystkie ludy znaiome przyięły arytmetykę dziesiętną, i łatwo poznaiemy iż ta zgoda nie może być skutkiem trafu. Być może iż liczba palcy u rąk była powodem do obrania liczby dziesięć, którą każdy prawie zawsze znayduie przed oczyma, tak dalece, iż lud któryby miał dwa palce, cztery palce . . . . . dwanaście palcy, byłby może przyiął arytmetykę dwóyną, czwórną . . . . . dwunastną.

Arytmetyka dziesiętna przechodzi rzeczywiście wszystkie od niéy poniższe, w tém, że wyrażanie liczb iest w niéy prostsze. Powinna więc była być przeniesioną nad wszystkie od niéy poniższe.

31. Lecz przyznać potrzeba iż arytmetyka zwyczayna, porównana z wyższemi, ustępuie z wielu względów arytmetyce dwunastnéy. Ta, z więcéy dwóma znakami któreby trzeba było wymyśléć dla wyrażania dziesięciu i iedenastu, każde przez iednę cyfrę, wyrażałaby liczby sposobem ieszcze prostszym; nadto, dwanaście może być podzielone zupełnie na dwie, na trzy, na cztery, na sześć części równych, gdy dziesięć może być tylko na dwie i na pięć; własność liczby dwunastu tak istotna do ułatwienia rachunków i miar, iż ludzie nawet po przyięciu arytmetyki dziesiętnéy nie przestali używać układu dwunastnego, rachuiąc przez tuziny, i tuziny tuzinów (1).

Jeżeli nie korzystano ze sposobu liczenia iaki się w ogólności zdziałał w układzie wag i miar, i nie poddano arytmetyki dwunastnéy w miéysce arytmetyki dziesiętnéy, to dla tego, iż pożytki które pierwsza wystawia, byłyby przewyższone niedogodnościami iakieby pociągnęło przeyście z iednéy arytmetyki do drugiéy (2).

(1) Słusznie *Newton* powiedział: iż życzyćby należało ażeby liczba 12 przyięta była za zasadę systematu liczenia. Systemat zaś arytmetyki dwóynéy (binaire) wynaleziony przez *Leibnitza* lubo ma szczególne dogodności, został przecie sławniéyszy bardziéy przez imie swego wynalazcy, niż przez iaką użyteczność rzeczywistą.

(2) Uczeni, mianowicie francuzi namyślali się nad wprowadzeniem systematu dwunastnego, lecz niepodobieństwem iuż prawie byłoby odmienić arytmetykę ustną i pisaną *Ob.* wspomnioną wyżéy: *Arithm. d'Emile par Develey*, Karta 454. nota III.

ZAGADNIENIA.

32. Napisać cyframi, 1od trzy miliiony tysiąc siedm; 2re cztery tryliiony pięćset trzynaście miliionów dziewięć tysięcy czterdzieści trzy; 3ie pięć biliionów dwadzieścia cztery tysiące całkowitych, czterysta trzy dziesięciotysiącznych; 4re czterdzieści sześć łokci, pięćset trzydzieści cztery tysiącznych?

II. Wysłowić liczbę 1) 1079088219; 2) 49703, sąż 00349; 3) 90056, 738?

III. Napisać cyframi liczbę *sto* w arytmetyce dwóynéy; toż w arytmetyce dwunastnéy?

IV. 1.) Wysłowić liczbę wyrażoną przez 7984 w systemacie dwunastnym; 2) przeciwnie, liczbę 13492 napisać w arytmetyce dwunastnéy?

V. Jakże wysłowić liczbę 497345 która iest napisaną podług systematu dwunastnego? (1)

O RACHUNKU LICZEBNYM.

33. Rachunek liczebny iest sztuka składania i rozkładania liczb przez działania prawidłom nieomylnym poddane.

34. Prawidła wspieraią słabość rozumu ludzkiego podaiąc mu sposoby do doyścia następnie i po części do wypadków których nie może znaleźć od razu.

35. Pospolicie cztery liczymy główne działania w rachunku; *dodawanie, odeymowanie, mnożenie, i dzielenie* (additio, substractio, multiplicatio, et divisio).

36. Dodawanie służy do połączenia wielu liczb w iednę, która się nazywa *summą* (summa).

Wiemy zaś iż nie można łączyć w iednę liczbę, liczb różnego gatunku np. łokci i stóp, (n° 2.) a tém bardziéy różnéy natury iako to łokci i złotych; dodawanie więc, będąc właściwie skróconém policzaniem, nie może się odby-

(1) Trzy ostatnie zagadnienia nie powinnyby tu podług ścisłości należyć, wymagaią bowiem znaiomości dalszych działań arytmetycznych. Wszakże uczący się skoro postąpili nieco w rachunkach, łatwo ie zrozumieią.

wać tylko na ilościach iednorodnych (quantitates homogeneæ) i iednogatunkowych.

37. Odeymowanie służy do znalezienia *różnicy* (differentia) między dwoma liczbami, to iest, o ile iedna przewyższa drugą (1).

Gdy zaś odeymowanie iest właściwie skróconém odliczaniem, więc liczba którą odeymuiemy i liczba od któréy odeymuiemy, powinny być koniecznie iednéyże natury i gatunku, a zatém odeymowanie nie może się odbywać na ilościach różnorodnych (quantitates heterogeneæ) i różnogatunkowych.

38. Mnożenie służy do wzięcia iakiéy liczby nazwanéy *mnożną* (multiplicandus) tyle razy, ile oznacza iedności inna liczba nazwana *mnożnikiem* (multiplicator), a wypadek z działania nazywa się *iloczyn* (productum albo factum) (2).

Jasną iest rzeczą iż iloczyn składa się z mnożnéy powtórzonéy tyle razy, ile razy iedność iest zawarta w mnożniku; więc mnożenie iest gatunkiem dodawania, przez które przydaiemy iaką liczbę do siebie saméy tyle razy, ile razy iedność iest zawarta w drugiéy.

Mnożna i mnożnik nazywaią się *czynnikami* iloczynu (factores).

39. Dzielenie służy do znalezienia ile razy iaka liczba nazwana *dzielną* (dividendus), zawiera w sobie inną nazwaną *dzielnikiem* (divisor), a wypadek z działania otrzymany nazywa się dla tego *ilorazem* (quotiens albo quotus) (3).

Widoczną iest rzeczą iż liczba iaka nie może się zawierać w drugiéy tylko tyle razy właśnie, ile razy może być od niéy odiętą; więc dzielenie iest gatunkiem odeymowania, które służy do znalezienia ile razy iaka liczba może być odiętą od drugiéy. (4)

Wyłożone dopiero 4ch działań określenia (definicyie) uczący się koniecznie dobrze pojąć i w pamięci zatrzymać powinni, to im albowiem posłuży do rozpoznawania w podawanych zadaniach, gdzie i iak którego działania użyć mają, a naczém szczególniéy nauka rachunków polega. Zastósowanie prawideł nie ma trudności skoro się poymie określenie, cel i potrzeba każdego.

(1) Nazywaią także wypadek z odeymowania *nadmiarem* lub *resztą*.

(2) Nazywaią też iloczyn *mnogością*, a mnożną *mnożnym*.

(3) *Dzielna* nazywa się także *podzielną*, przecież to powinno się rozumieć w tym razie tylko, gdy się z dzielenia nic nie zostaie.

(4) Z tego względu możnaby ie nazwać *odmnożeniem*.

Wszystkie liczby mogą być poddane pod działania któreśmy tu opisali; wyłożymy zaś sposób odbywania ich naprzód na liczbach całkowitych i dziesiętnych; potém na ułomkach.

O DZIAŁANIACH GŁÓWNYCH ARYTMETYKI NA LICZBACH CAŁKOWITYCH I DZIESIĘTNYCH.

O DODAWANIU LICZB CAŁKOWITYCH I DZIESIĘTNYCH.

40. Gdy liczby które chcemy dodać są poiedyncze, summę ich znayduiemy natychmiast, a zatém nie potrzeba prawidła na uskutecznienie tego dodawania (nº 34). Widzimy od razu, iż dodaiąc np. 4 do 5 iest 9 summą. Piszemy 4+5=9 i wymawiamy 4 *więcéy* 5 *równe iest* 9, *lub* 4 *i* 5 *czyni* 9. Podobnież 6zł.+8zł.=14zł. i t. d.

41. Przy nieiakiéy wprawie łatwo iest także dodać zapomocą pamięci liczbę poiedynczą do liczby złożonéy. Tak znayduiemy bez trudności, iż 15+8= 23, iż 342zł.+7zł. =349zł. i t. d.

42. Gdy liczby które dodać mamy są złożone, i gdy nie widzimy od razu ich summy; sposób iéy znalezienia iest: *wziąć oddzielnie summę wszystkich różnych części tych liczb.*

Niechbym miał np. do dodania razem liczby 494, 2532 i 9043.

Dla znalezienia summy tych liczb piszę ie tak, aby iedności były pod iednościami, dziesiątki pod dziesiątkami i t. d. i podkréślam ie liniyką:

494
2532
9043
12069

Poczém zaczynaiąc od prawéy ręki z góry na dół mówię: 4 i 2 czynią 6, i 3 czynią 9. Summa ta kolumny iedności

może być wyrażoną przez iednę cyfrę, piszę ią więc pod tąż kolumną.

Postępuię do kolumny dziesiątków, i mówię: 9 i 3 czynią 12, i 4 czynią 16, to iest, sześć iedności dziesiątków które piszę pod kolumną dziesiątków i dziesięć dziesiątków czyli iedno sto, które dodaię do kolumny set bezpośrednie następuiącéy, mówiąc: 1 zatrzymany i 4 czyni 5, i 5 czyni dziesięć, i 0 czyni także 10, to iest, ieden dziesiątek set czyli tysiąc. Gdy tu nie ma iedności rzędu w którym działam, zapełniam mieysce znakiem 0, a tysiąc zatrzymuię dla dodania go do następuiącéy kolumny tysięcy do któréy postępuię; mówię więc: 1 zatrzymany i dziewięć czynią 10, i 2 czynią 12 które piszę zarazem, ponieważ iuż ostatnia iest kolumna. Tak summa szukana iest 12069.

43. Aby więc uskutecznić dodawanie liczb złożonych, *napisz liczby podane iedne pod drugiemi tak, aby iedności tegoż samego rzędu były w iedneyże kolumnie i podkreśl ie liniyką dla oddzielenia ich od summy któréy szukasz.*

Poczém *dodaway razem liczby każdéy kolumny zaczynaiąc od pierwszéy po prawéy ręce a postępuiąc następnie od iedney kolumny do drugiéy która bezpośrednie następuie po lewéy ręce.*

Ieżeli summa kolumny w któréy działanie wykonywasz, może być wyrażoną przez iednę cyfrę, napiszesz ią pod tąż kolumną; ieżeli zaś musi być wyrażoną przez kilka cyfer, położysz pod tą kolumną tylko iedności iéy rzędu, lub w braku tych iedności położysz 0, a zatrzymasz dziesiątki dla dodania ich do następuiącéy kolumny iako iedności tegoż rzędu co ona, i będziesz postępował podobnie aż do ostatniéy po lewéy ręce kolumny któréy summę napiszesz.

44. Gdybym miał na drugi przykład dodać 0,7; 1,89 i 7,97.

Piszę te liczby tak, ażeby setne były pod setnemi, dziesiąte pod dziesiątemi, i t. d.

0,7
1,89
7,97
10,56

a podkreśliwszy ie liniyką, mówię zaczynaiąc od setnych: 9 i 7 czynią 16, to iest 6 setnych które piszę pod kolumną setnych, i dziesięć setnych czyli iednę dziesiątą, którą dodaię do kolumny dziesiątych, mówiąc: ieden zatrzymany i 7 czynią 8, i 8 czynią 16, i 9 czynią 25; piszę tylko 5 pod kolumną dziesiątych a zatrzymuie dwa dziesiątki dziesiątych, czyli dwie iedności dla dodania ich do kolumny następuiącéy, która iest kolumną iedności. Mówię więc: 2 zatrzymane i 0 czynią także 2, i 1 czynią 3, i 7 czynią 10, które piszę razem, ponieważ iuż ostatnia iest kolumna. A tak summa szukana iest 10,56.

45. Znaydziemy przez podobne postępowanie iż summa liczb mianowanych 9478 zł. 3729 zł. i 47978 zł. iest

łok. łok. łok. łok.

61185 zł. Summa zaś liczb 45,08; 37,4 i 8,57 iest 91,05. Oto wzór tych dwóch działań.

zł.	łok.
9478	45,08
3729	37,4
47978	8,57
61185 zł.	91,05 łok.

46. Widzimy tu, iż prawidło to iest nieomylne, bo przepisuie dodawać następnie wszystkie części liczb podanych: postępuiąc więc podług niego znaydziemy summę szukaną która iest tylko zbiorem tych różnych części.

47. W uskutecznianiu iednak działania może się popełnić omyłka. Dla zapewnienia się więc o dokładności wypadku, używaią *sprawdzenia* czyli *próby*. Chcąc się przekonać czyli nie masz omyłki w dodawaniu, naylepszą iest do tego próbą *powtórzyć działanie postępuiąc z dołu do góry*. Widoczną iest rzeczą iż powinna się znaleźć taż sama summa która się znalazła postępuiąc z góry na dół.

ZAGADNIENIA.

48. I. Woiewództwo Krakowskie liczy ludności 411865 Sandomierskie 378098 Kaliskie 572154, Lubelskie 475597 iakaż iest ludność tych czterech Woiewództw?

II. Rachuią iż od stworzenia świata do potopu upłynęło lat 1656, od potopu do zbudowania kościoła Salomonowego 1344, od zbudowania kościoła do narodzenia Chrystusa Pana lat 1000, od téy epoki upłynęło iuż lat 1826; ileż

podług tego upłynęło lat od stworzenia świata do początku roku teraźnieyszego 1827.

III. Przy wystawianiu pewnego domu wydano na mularską robotę z pomocnikami zł. 3157, na ciesielską robotę zł. 610, na materyał dla mularzy zł. 4580, na materyał dla cieśli zł. 1442, na robotę stolarską zł. 636, ślósarską zł. 516, kowalską zł. 144, szklarską zł. 117, garncarską zł. 120; ileż razem wydano?

IV. Znaleźć summę liczb: 90543,52; 5943,4324; 18265,783?

V. Promień kuli ziemskiéy czyli odległość iéy środka od powierzchni zawierać ma długości 3684275,0938 sążni polskich. *Lalande* przydał mu ieszcze długości 1491,5906 takichże sążni; iakąż mu więc długość przyznawał?

O ODEYMOWANIU LICZB CAŁKOWITYCH I DZIESIĘTNYCH.

49. Gdy liczba od któréy mam odeymować i liczba którą mam odeymować, są poiedyncze, nie potrzeba prawidła na uskutecznienie tego odeymowania. Widzimy bowiem od razu iż odeymuiąc np. 4 od 6 zostaie 2 na resztę. Pisze się $6-4=2$, i mówi się 6 *mniéy* 4=2, lub 4 od 6 zostaie 2; podobnież 8zł.—5zł.=3zł.

50. Przy pewnéy wprawie łatwo iest także wynaleźć w pamięci różnicę między liczbą złożoną a liczbą poiedynczą. Tak znaydzie się bez trudności, iż 16—9=7, iż 218zł.—9zł. =209zł. i t. d. (1).

51. Gdy mamy do odeymowania liczby złożone których różnicy nie można widzieć od razu, trzeba *wziąć różnicę w szczególności wszystkich części tych dwóch liczb.*

Żądaią np. różnicy liczb 52387 i 34583.

Piszę te liczby tak, aby iedności były pod iednościami dziesiątki pod dziesiątkami, i t. d. i podkréślam ie liniyką.

52387
34583
17804

Poczém mówię: 3 od 7 zostaie 4 które piszę pod kolumną iedności. Postępuię do kolumny dziesiątków, mówiąc: 8 od 8 zostaie 0, które piszę pod tąż kolumną, Postępuię do kolumny set, mówiąc 5 od 3 nie można; pożyczam w myśli 1 od cyfry 2 ku lewéy stronie następuiącéy (1). Gdy zaś iedność pożyczona waży 10 tych do których pożyczam, dodawszy ie więc do iedności set, od których mam odeymować, mieć będę 13 set. Mogę więc iuż 5 odiąć od 13 i zostaie mi 8, które piszę pod kolumną set. Postępuię do kolumny tysięcy i mówię: 4 od 1 (bo od dwóch pożyczywszy 1 zmnieyszyłem ie o iedność) nie można; pożyczam znowu w myśli 1 od cyfry 5 ku lewéy stronie następuiącéy, i mówię: 4 od 11 zostaie 7, które piszę pod kolumną tysięcy. Nakoniec postępuię do kolumny dziesiątków tysięcy i mówię: 3 od 4 zostaie 1, który piszę pod tąż kolumną. A tak różnica żądana iest 17804.

Gdyby cyfra od któréy trzeba pożyczyć, była 0, natenczas od następuiącéy za nią ku lewéy ręce cyfry znaczenie maiącéy pożycza się 1; przez co cyfra ta zostanie mnieyszą o iedność, a następne zero lub zera uważaią się iuż iako maiące po 9 iedności.

W przypadku gdy cyfra od któréy mam odeymować iest mnieyszą od téy, którą mam odeymować, iak np. w powyższém działaniu w kolumnie set: gdy pięć od trzech odiąć nie można; krótsze nieiako iest prawidło: przydać myślą dziesiątek do 3 co czyni 13, odiąć potem 5 od 13 i zostaie 8 set które piszę pod kolumną set. Postępuię do kolumny tysięcy, a zwiększywszy cyfrę 4 iednością dla nagrodzenia za przydany w liczbie wyższéy dziesiątek (2) mówię: 5 od 2 nie można; przydaię znowu 10 do 2 co czyni 12, i mówię: 5 od 12 zostaie 7 set które piszę pod kolumną tysięcy i t. d.

52. Aby więc uskutecznić odeymowanie liczb złożonych *napisz mnieyszą liczbę pod większą tak, aby iedności tegoż samego rzędu były w iednéyże kolumnie i podkréśl ie liniyką dla oddzielenia tych liczb od różnicy któréy szukasz.*

Poczém, *bierz różnicę liczb każdéy kolumny, zaczynaiąc od pierwszéy po prawéy ręce, a postępuiąc od iednéy kolumny*

(1) Zwykle wymienia się pierwéy ilość od któréy się ma odeymować np. różnica między 8 i 5 iest 3.

(1) Dla lepszéy pamięci, cyfrę od któréy pożyczyłem i która zmnieyszyszyła się o iedność, znaczę punktem lub kréską.

(2) Przydaiąc 10 do cyfry 3 położoney na mieyscu set, powiększam 10 stami czyli tysiącem liczbę 52387: lecz rachuiąc 5 zamiast 4 położonych na mieyscu tysięcy, powiększam tysiącem liczbę 34583, więc różnica liczb 52387 i 34583 zostaie taż sama.

do drugiéy bezpośrednie następuiącéy, pisz za każdym razem resztę pod kolumną, z któréy taż reszta wypada.

Jeżeli w liczbie wyższéy znayduie się cyfra równa odpowiadaiącéy cyfrze w liczbie niższéy i nie masz żadnéy różnicy, w tym razie dla ocalenia wartości innych znaków liczebnych zapełnisz miéysce znakiem o.

Jeżeli zaś w liczbie wyższéy cyfra iaka mniéysza iest od odpowiadaiącéy w liczbie niższéy, natenczas aby można odeymowanie uskutecznić, potrzeba przydać myślą dziesiątek do teyże cyfry wyższéy, napisać pod liniyką nadmiar cyfry wyższéy tak zwiększonéy nad cyfrę niższą odpowiadaiącą, a dla nagrodzenia zwiększyć iednością cyfrę niższą bezpośrednie po lewéy ręce następuiącą.

53. Załóżmy sobie np. znaleźć różnicę liczb 9,147 i 7,958.

Dla znalezienia iéy, piszę te liczby tak aby iedności były pod iednościami, dziesiąte pod dziesiątemi, i t. d. iak tu widzimy:

9,147
7,958
1,189

i mówię 8 od 7 nie można: 8 od 17 zostaie 9 które piszę pod kolumną tysiącznych. Postępuię do kolumny setnych i mówię: 6 od 4 nie można; 6 od 14 zostaie 8 które piszę pod kolumną setnych. Postępuię do kolumny dziesiątych i mówię, 10 od 1 nie można; 10 od 11 zostaie 1 który piszę pod kolumną dziesiątych. Nakoniec postępuię do kolumny iedności, i mówię: 8 od 9 zostaie się 1, który piszę pod tąż kolumną. Tak więc różnica szukana iest 1,189.

54. Gdyby zamiast liczby 9,147 była podana 9,14; natenczas dopisałbym do niéy o, i mówiłbym: 8 od o nie można; 8 od 10 zostaie 12 i t. d. W ogólności: gdy liczba odeymować się maiąca, ma kilka cyfer dziesiętnych więcéy niż liczba od któréy odeymować wypada, lub gdy ta ostatnia żadnéy nie ma cyfry dziesiętnéy, doda się do niéy tyle zer z prawéy strony ile potrzeba do zrównania liczby cyfer dziesiętnych w obu liczbach, co ich wartości nie zmienia (n° 25), a po takowém przygotowaniu, postępuie się iak wyżéy wskazane było prawidło.

55. Przez podobne postępowanie znaydziemy, iż różnica liczb mianowanych 95381 złot. i 85792 złot. iest 9589 złot. i że różnica liczb 196,4 i 89,696 iest 106,704. Oto iest wzór tych działań.

zł.	sąż.	sąż.	sąż.
95381		196,4	
85792		89,696	
9589		106,704	

56. Widoczną iest rzeczą iż idąc za tém prawidłem bierze się różnica wszystkich części liczb podanych, i że się powinna tém samém znaleźć różnica cała tych dwóch liczb.

57. Dla sprawdzenia odeymowania *dodasz różnicę do liczby którą odeymowałeś, ieżeli odeymowanie było dobrze zrobione znaydziesz liczbę od któréy odeymowałeś.* Bo łącząc dwie części które składaią całość, musi się złożyć koniecznie taż całość.

Tak dla sprawdzenia odeymowania pod n° 51, przydaię różnicę 17804 do liczby 34583 którą miałem odeymować, a znalazłszy liczbę 52387 od któréy miałem odeymować, iestem pewny że się w działanie błąd nie wcisnął.

58. Przeciwnie dla sprawdzenia dodawania, *odeymuy od summy znalezionéy, summy szczególne wszystkich kolumn; nic się zostać nie powinno ieżeli działanie dobrze było zrobione.* Bo odeymuiąc od iakiéy całości wszystkie części które ią składaią, nie powinno nic zostać z téyże całości.

Sprawdźmy tym sposobem dodawanie następuiące:

987
491
354
1832

Biorę summę kolumny iedności mówiąc: 7 + 1 + 4 = 12; ażeby uskutecznić odeymowanie, przydaię myślą 10 do cyfry 2 całéy summy, co czyni 12, i mam 12—12=0.

Postępuię do kolumny następuiącéy do któréy dla nagrodzenia przydaię 1, liczba do odeymowania iest natenczas 1+8+9+5=23. Aby odeymowanie wykonać przydaię 20 do cyfry 3 całkowitéy summy, co czyni 23, i mam 23—23=0.

Nakoniec postępuię do ostatniéy kolumny do któréy dla nagrodzenia przydaię 2, i na ostatnią liczbę do odeymowania iest 2+9+4+3=18, mam więc 18—18=0, skąd wnoszę że dodawanie było dobrze zrobione.

59. W podanych dotąd przykładach odeymowania, liczba maiąca się odeymować była mniéysza lub tak wielka iak liczba od któréy się miało odeymować; lecz gdyby się trafiła większa, iak np. gdyby szło o odięcie od dziesięciu złotych które posiada pewny człowiek, piętnastu złotych które przegrał, iakżeby sobie trzeba postąpić? oto: zamiast odięcia 15 od 10, czego nie można wykonać, odeymiy 10 od 15; zostanie 5; poprzedź tę liczbę znakiem — będziesz miał 10zł.— 15zł.=—5 zł.

Tak tedy gracz ma 5zł. mniéy niżby mu potrzeba na zapłacenie summy przegranéy; innemi słowy ma długu zł. 5. Dla zapewnienia się o tym wypadku doday do liczby 15zł. któreś miał do odéymowania różnicę — 5 zł. a połączenie tych dwóch iloczynów 15zł.—5zł. da 10 zł. co właśnie tak być powinno (n°57).

60. W dodawaniu 15—5=10 tę spostrzegamy osobliwość, iż summa może być mniéyszą od iednéy z liczb które ią swém połączeniem formuią. Zdaie się to zrazu zadziwiaiące lecz nieco zastanowiwszy się, widzimy że iest ściśle dokładném.

W saméy rzeczy, ieżeli łączę móy maiątek z twoim, widoczna iest iż nasz maiątek spólny będzie wyrażony przez summę iaka wypadnie z dodania naszych maiątków szczególnych.

Daymy teraz iż twóy maiątek wynosi 30000 zł. móy niechby był 10000 zł. i niechbym był zadłużony na 15000 zł. wyrażenie naszego maiątku spólnego będzie 30000 zł. + 10000zł. — 15000zł. = 25000zł. summa mniéysza niż 30000zł. które posiadasz. Nie trzeba więc mięszać znaczeń słów *przybawać* i *powiększać*.

61. Przeciwnie, *odeymować* nie iest to zawsze *zmniéyszać*, czyli co na iedno wychodzi, różnica może być większa niż liczba od któréy się odeymowało. Bo gdyby się pytano o ile pewny człowiek maiący 12000 zł. maiątku iest bogatszym od innego, który nie ma maiątku lecz 4000zł. długu, widzimy iż nadmiar maiątku pierwszego będzie 12000 zł. które posiada, więcéy summą wyrównywaiącą 4000 zł. długu które tamten winien, tak dalece iż różnica iest 16000 zł. liczba większa niż 12000zł. któréy się szukało nadmiaru nad 4000 zł. długu.

62. Łatwo tu nabyć można ogólnego wyobrażenia ilości czyli wielkości *dodatnych i odiemnych* (quantitates positivæ et negativæ). Pierwsza iest wzięta we względzie obranym; druga we względzie tamtemu przeciwnym. np. ieżeli z mieysca w którém iestem, zamierzam sobie udać się na wschód, droga którą odbywam w tym kierunku iest dodatna względnie do mego celu; przeciwnie ieżeli w zamiarze udania się na wschód, udaię się ku zachodowi, cała droga którą w tym razie odbywam, będzie odiemną względnie do mego celu.

63. Ilość dodatna albo nie iest poprzedzona żadnym znakiem albo iest poprzedzona znakiem +; ieżeli uszedłem 1000 sążni ku wschodowi z mieysca w którém zostawałem, droga moia wyrażona będzie przez 1000 lub + 1000 sążni; ieżeli przeciwnie zrobiłem 1000 sążni drogi ku zachodowi, droga moia iest odiemna i wyrażenie iéy musi być poprzedzone znakiem —, wyrażę ią więc przez — 1000 sążni: Widzę zatém iż dopóki zostaię w mieyscu, dopóty droga moia iest żadna i mogę ią wyrazić przez 0. W tym to względzie *zero* trzyma środek między ilościami dodatnemi i odiemnemi.

ZAGADNIENIA.

64. Woiewództwo Mazowieckie zawiera ludności 651007, Woiewództwo zaś Płockie 454428; iakąż iest różnica ludności tych dwóch Woiewództw?

II. Naywyższa góra ziemska Himalaia czyli Himalih w Indyiach iest 26862 stop angielskich wysoka, naywyższa

w Ameryce południowéy Chimborako wysoka iest 2145 takichże stóp; o ileż tamta iest wyższa.

III. Jeżeli proch wynaleziony został r. 1330, a sztuka drukarska 1440; o ileż lat wynalazek pierwszego poprzedził wynalazek drugiéy; a ile lat upłynęło w szczególności od każdego z tych wynalazków do roku teraźnieyszego 1827?

IV. Naywiększa odległość słońca od ziemi w lecie wynosi 21 237 498 mil niemieckich (ieograficznych), a naymnieysza w zimie 20 638 236 takichże mil. O ileż mil słońce w zimie iest bliżéy ziemi aniżeli w lecie?

V. Europę rachuią na 171396 mil kwadratowych (1) rozległą, Azyą zaś na 640087 mil kwadratowych. O ileż mil kwadratowych większa iest Azya od Europy?

VI. Powierzchnia kuli ziemskiéy wynosi 9295·106 mil kwadratowych, xiężyca 684,249 mil kwadratowych, słońca 10 940 939 378 mil kwadratowych. O ileż mil kwadratowych powierzchnia ziemi iest większa od powierzchni xiężyca a mnieysza od powierzchni słońca.

V. Znaleźć różnicę, między 1) 3750,44 i 543, 675; 2) 25 i 16,748; 3) 200,402 i 145,23?

O MNOŻENIU LICZB CAŁKOWITYCH I DZIESIĘTNYCH.

65. Gdy mnożna i mnożnik są liczbami poiedynczemi, nie potrzeba prawidła na takie mnożenie. Każdy wié iż np. 2 rozmnożone przez 2, to iest 2 powtórzone 2 razy daią 4 na iloczyn. Pisze się 2×2, lub 2 . 2=4, i wymawia się 2 *rozmnożone* przez 2 równe 4, lub 2 *razy* 2 iest 4. Wié się także iż 5×1=5, i że 7×0=0 (n° 38).

(1) Powierzchnia zamknięta czterema liniiami prostemi równemi i w czyściach swoich równo nachylonemi do siebie, nazywa się *kwadratem*. Jeżeli iedna z tych liniy, które się zowią *bokami* kwadratu, ma łokieć długości, powierzchnia niemi obwiedziona zowie się *łokciem kwadratowym*, ieżeli ma iednę stopę długości, *stopą kwadratową*, ieżeli milę, *milą kwadratową* i t. d. dokładnieyszego wyobrażenia kwadratu nabędzie się z jeometryi.

66. Tablica następuiąca zawiera iloczyny wszystkich liczb poiedynczych:

a b		
1 × 1 = 1	2 × 1 = 2	3 × 1 = 3
1 × 2 = 2	2 × 2 = 4	3 × 2 = 6
1 × 3 = 3	2 × 3 = 6	3 × 3 = 9
1 × 4 = 4	2 × 4 = 8	3 × 4 = 12
1 × 5 = 5	2 × 5 = 10	3 × 5 = 15
1 × 6 = 6	2 × 6 = 12	3 × 6 = 18
1 × 7 = 7	2 × 7 = 14	3 × 7 = 21
1 × 8 = 8	2 × 8 = 16	3 × 8 = 24
1 × 9 = 9	2 × 9 = 18	3 × 9 = 27
4 × 1 = 4	5 × 1 = 5	6 × 1 = 6
4 × 2 = 8	5 × 2 = 10	6 × 2 = 12
4 × 3 = 12	5 × 3 = 15	6 × 3 = 18
4 × 4 = 16	5 × 4 = 20	6 × 4 = 24
4 × 5 = 20	5 × 5 = 25	6 × 5 = 30
4 × 6 = 24	5 × 6 = 30	6 × 6 = 36
4 × 7 = 28	5 × 7 = 35	6 × 7 = 42
4 × 8 = 32	5 × 8 = 40	6 × 8 = 48
4 × 9 = 36	5 × 9 = 45	6 × 9 = 54
7 × 1 = 7	8 × 1 = 8	9 × 1 = 9
7 × 2 = 14	8 × 2 = 16	9 × 2 = 18
7 × 3 = 21	8 × 3 = 24	9 × 3 = 27
7 × 4 = 28	8 × 4 = 32	9 × 4 = 36
7 × 5 = 35	8 × 5 = 40	9 × 5 = 45
7 × 6 = 42	8 × 6 = 48	9 × 6 = 54
7 × 7 = 49	8 × 7 = 56	9 × 7 = 63
7 × 8 = 56	8 × 8 = 64	9 × 8 = 72
7 × 9 = 63	8 × 9 = 72	9 × 9 = 81

Ważną iest rzeczą umieć ie na pamięć i dobrze się z niemi oswoić, chcąc z szybkością i dokładnością odbywać mnożenie (1).

67. Gdy mnożna iest złożona a mnożnik poiedynczy lub złożony, i nie widzimy od razu wypadku mnożenia, *trzeba składać częściami, iloczyn cały którego nie można znaleźć od razu.*

Dla znalezienia np. iloczynu z 7081 przez 4 piszę 4 pod 7081 i podkreślam ie liniyką;

7081
4
28324

(1) Dobra iest rzecz aby początkuiący maiąc sobie wskazany sposób robienia téy tablicy, sami ią sobie porządnie układali rozciągaiąc ią daléy i do liczb złożonych. Układanie nawet podobnéy tablicy i innych działań głównych nie małą im korzyść w rachunkach zapewni. Przy tablicy odeymowania trzeba pamiętać na to co się powiedziało pod nrem 59.

Wprawa rachowania z pamięci bardzo wiele przynosi korzyści, iuż to że ułatwia rachunki daisze i trudniéysze na piśmie, iuż że zaostrza ciekawość, przyzwyczaia do uwagi i uczy rozumować. Życzyć należy aby w żadnym względzie zaniedbywaną nie była. Wiele wtéymierze zalet łączy metoda *Pestalocego*. Aby mieć zastósowanie do niéy ćwiczenie z podanéy tu tablicy mnożenia, dosyć iest odmienić mieysce dwóch pierwszych kolumn a, b, to iest drugą napisać na mieyscu pierwszéy a tę na mieyscu drugiéy. W téy zaś, liczbę do mnożenia wziętą nazywać połową, trzecią częścią lub czwartą i t. d. inney. Tak mnożąc 6. nazywam ie połową dwunastu i mówię: raz połowa dwunastu iest sześć, dwa razy połowa dwunastu iest... i t. d. Można równie nazwać to 6 trzecią częścią ośmnastu, czwartą, i t. d. Następnie można za każdym razem dodawać do wypadku lub od niego odeymować liczbę iaką stałą np. raz czwartą część 24ech więcéy 3 iest 9 i t. d. lub raz czwarta część 24ch mniéy 3 iest 3 i t. d. Można także liczbę stałą dodawaną nazwać połową lub trzecią i t. d. częścią inney np. mnożąc 5 mogę zacząć: raz piąta część 25u więcéy czwarta część 12u iest 8 i t. d. lub, raz szósta część 3ostu mniéy trzecia część 9ciu iest 2 i t. d. Naostatek można ieszcze wyrażać iloczyn nie prosto iak wypada, lecz odnośnie do liczb innych. np. czego iest połową, trzecią i t. d. częścią. I tak: raz piąta część 25u więcéy czwarta część 12u iest połową 16u; dwa razy piąta część 25u więcéy czwarta część 12u iest połową 26u i t. d.

Jakożkolwiek rachunek podobny zdaie się być zawikłany, wiem iednak z doświadczenia, iż ucząc się go w porządku okaże się łatwym i nader korzystnym.

Potém zaczynaiąc od prawéy ręki, mówię; 4 razy 1 iest 4, które piszę na mieyscu iedności.

Postępuię do cyfry następuiącéy i mówię: 4 razy 8 dziesiątków iest 32 dziesiątków. Piszę 2 iedności dziesiątków, a zatrzymuię 3 dziesiątki dziesiątków czyli 3 sta dla dodania ich do iloczynu następuiącego.

Mówię więc: 4 razy 0 set iest 0 set, i 3 sta które piszę na miéyscu set.

Nakoniec przystępuię do ostatniéy cyfry mnożnéy i mówię: 4 razy 7 tysięcy czyni 28 tysięcy które piszę zarazem.

68. W praktyce nie wysłowia się iedności iloczynów szczególnych i odtąd pomiiać ie będziemy dla krótkości.

69. Gdy więc idzie o mnożenie liczby złożonéy przez poiedynczą; *napisz mnożnik pod mnożną, i podkreśliwszy liniyką aby czynniki były oddzielone od iloczynu całego szukanego, mnóż następnie przez mnożnik postępuiąc od prawéy ręki do lewéy, iedności różnych rzędów składaiące mnożną.*

Gdy iloczyn cyfry nad którą działasz może być wyrażony iednym znakiem, napiszesz go w iloczynie całym na mieyscu które zaymować powinien.

Gdy iloczyn musi być wyrażony przez kilka cyfer, napiszesz tylko iedności tegoż iloczynu, lub w braku ich napiszesz 0, zatrzymuiąc dziesiątki dla dodania do iloczynu następuiącego, iako iedności tegoż co on rzędu, i będziesz postępował podobnie aż do ostatniéy po lewéy ręce cyfry któréy iloczyn napiszesz.

70. Niechby się pytano o iloczyn 963 przez 658.

Dla znalezienia go piszę mnożnik pod mnożną tak, aby iedności iednakowego rzędu tych dwóch czynników były w kolumnach:

963
658
7704
4815
5778
633654

i podkreśliwszy liniyką mówię: 8 razy 3 iest 24; piszę 4 a zatrzymuię 2; 8 razy 6 iest 48, a zatrzymane 2 iest 50;

piszę 0 a zatrzymuię 5; 8 razy 9 iest 72 a 5 zatrzymane iest 77 które piszę razem.

Przystępuię do 5 dziesiątków mnożnika mówiąc: 5 razy 3 iest 15; iasna iest iż to iest 15 dziesiątków: piszę więc 5 na mieyscu dziesiątków, a zatrzymuię 1; 5 razy 6 iest 30 a 1 zatrzymany iest 31; piszę 1 a zatrzymuię 3; 5 razy 9 iest 45, a 3 trzy zatrzymane iest 48, które piszę razem.

Nakoniec przystępuiąc do set w mnożniku mówię: 6 razy trzy iest 18; ten iloczyn wyraża oczywiście sta; piszę więc 8 na mieyscu set a zatrzymuię 1; 6 razy 6 iest 36, a 1 zatrzymany iest 37; piszę 7 a zatrzymuię 3; 6 razy 9 iest 54, a trzy zatrzymane iest 57 które piszę razem. Dodaię iloczyny cząstkowe, i mam 633654 na iloczyn cały (1).

71. Aby więc rozmnożyć liczbę złożoną przez inną złożoną, *napisz mnożnik pod mnożną tak aby iedności tegoż samego rzędu były w kolumnie i podkreśl.*

Mnóż następnie całą mnożną przez każdą cyfrę mnożnika, postępuiąc od prawéy ręki do lewéy.

Układay rozmaite iloczyny cząstkowe iedne pod drugiemi tak, ażeby pierwsza cyfra po prawéy ręce każdego z tych iloczynów znaydowała się wprost pod tą przez którą mnożyłeś.

Doday wszystkie te iloczyny cząstkowe i będziesz miał iloczyn cały.

72. Prawidło przepisane iest nieomylne. Bo mnożyć iednę liczbę przez drugą, iestto powtarzać pierwszą tyle razy ile iest iedności w liczbie drugiéy. Że zaś podług prawidła przepisanego powtarza się mnożna tyle razy ile oznacza każda cyfra mnożnika; więc podług tego prawidła powtarza się

(1) Łatwo się tu okazuie iżby można zacząć działanie od cyfry naywyższego rzędu mnożnika np. mnożyć 1od mnożną przez 6 set potém przez 5 dziesiątków, nakoniec przez 8 iedności; tym sposobem iloczyn cząstkowy który poprzedniczo wypadł trzeci byłby tu pierwszym a pierwszy trzecim, iak widzimy z wzoru działania:

963
658
5778
4815
7704
633654

mnożna tyle razy ile iest iedności w całym mnożniku, a zatém znayduie się nieomylnie prawdziwy iloczyn.

73. Ażeby poznać czy nie masz omyłki w mnożeniu, *powtórz ie, biorąc za mnożną, liczbę która była mnożnikiem w pierwszym razie, a za mnożnik liczbę która była mnożną.* Iloczyn powinien być ten sam. W saméy rzeczy widzimy iż 6 razy 3 i 3 razy 6 daie zawsze iednakowy iloczyn 18.

74. Wypada tu nadto uważyć, iż trzy czynniki, cztéry, i t. d. rozmnożone przez siebie w iakimkolwiek porządku, daią zawsze ten sam iloczyn np. $3\times4\times5=5\times3\times4=3\times5\times4=5\times4\times3$... i t. d. Aby tę prawdę okazać naocznie napiszemy np. 5 iedności w linii prostéy i powtórzmy to 4 razy; otrzymamy 4 razy 5 iedności.

1, 1, 1, 1, 1,
1, 1, 1, 1, 1,
1, 1, 1, 1, 1,
1, 1, 1, 1, 1,

Jeżeli zamiast rachowania liniy od lewéy ręki do prawéy, porachuiemy ie z góry na dół, znaydziemy 5 liniy każda po 4 iedności; więc 4 iedności powtórzone razy 5 daią ten sam iloczyn co 5 iedności powtórzone razy 4. Że zaś dla otrzymania iloczynu z więcéy czynników, nie można ich mnożyć przez siebie tylko następnie po dwa, ztąd łatwo widzimy iż porządek w ich mnożeniu iest dowolny.

75. Gdy mnożna i mnożnik są zakończone zerami, skraca się działanie mnożąc tylko cyfry ważność maiące iedne przez drugie i dopisuiąc na końcu iloczynu tak znalezionego wszystkie zera któreśmy pominęli.

Tak dla znalezienia iloczynu z 369000 przez 8900, mnożę tylko 369 przez 89 a znalazłszy na iloczyn 32841 dopisuię pięć zer na końcu, co mi daie 3284100000 na prawdziwy iloczyn szukany.

W saméy rzeczy prawdziwa mnożna 369000 iest tysiąc razy większa niż 369, a prawdziwy mnożnik 8900 sto razy większy niż 89, więc prawdziwy iloczyn powinien być sto razy tysiąc razy, t. i. sto tysięcy razy większy niż 32841 trzeba więc 32841 sto tysięcy razy zwiększyć aby mieć prawdziwy iloczyn, a to nastąpi dopisuiąc pięć zer na końcu 32841.

Dla téy przyczyny gdybym miał mnożyć 995 przez 10000, napisałbym 9850000.

76. Nakoniec, gdy się znayduią zera pośrednie w mnożniku, opuszczamy ie, biorąc tylko iloczyn mnożnéy przez cyfrę ważność maiącą która bezpośrednio po lewéy ręce następuie, i pisząc pierwszą cyfrę tego iloczynu cząstkowego pod cyfrą przez którą mnożymy, iak to widać w następuiącym przykładzie.

397802
480003
1193406
3182416
1591208
190946153406

77. Podług tego co się iuż powiedziało, mnożenie liczb całkowitych nie może mieć trudności: lecz gdyby szło o mnożenie dziesiętnych, iakżeby sobie trzeba postąpić? oto: *nie uważaiąc na przecinek działay zupełnie iak gdyby szło o mnożenie liczb całkowitych i oddziel przecinkiem od prawéy ręki z iloczynu całego tyle cyfer dziesiętnych ile ich iest razem w obu czynnikach.*

Tak, aby rozmnożyć 1,9542 przez 3,94 działam iak gdybym miał 19542 mnożyć przez 394.

1,9542
3,94
78168
175878
58626
7,699548

Biorę iloczyny, cząstkowe nie uważaiąc na przecinki które są w dwóch czynnikach, potém znalazłszy 7699548 na iloczyn cały, oddzielam z niego przecinkiem sześć cyfer dziesiętnych od prawéy ręki, i prawdziwy iloczyn iest 7,699548 to iest 7 całych 699548 miliionowych.

W saméy rzeczy, mnożąc 19542 przez 394, mnożyłem liczbę dziesięć tysięcy razy większą niż 1,9542 przez liczbę sto razy większą niż 3,94; więc iloczyn znaleziony iest sto razy dziesięć tysięcy razy t. i. miliion razy większy niż prawdziwy iloczyn; więc aby mieć prawdziwy iloczyn trzeba 7699548 miliion razy zmniéyszyć, a to nastąpi oddzielaiąc sześć cyfer dziesiętnych (n° 26) to iest tyle, ile ich

iest razem w obu czynnikach; więc prawdziwy iloczyn iest 7,699548.

78. Gdyby się nie znaydowało w całym iloczynie tyle znaków ile iest cyfer dziesiętnych w obu razem czynnikach trzeba położyć po lewéy stronie tego iloczynu liczbę zer dostateczną (n° [illegible]), iak to widzimy w przykładzie następuiącym.

0,00029
0,018
232
29
0,0000522

79. Gdyby się miało mnożyć iaką liczbę np. 5,2439 przez 10, lub przez 100 lub i t. d. dosyć dla otrzymania iloczynu posunąć przecinek ku prawéy ręce w mnożnéy o iedno, lub dwa, lub i t. d. miéysc. Tak 5,2439×10=52,439; 5,2439×100=524,39. i t. d.

Bo mnożyć przez 10 lub przez 100 iest to zwiększać mnożną 10 razy lub 100 razy. Że zaś, posuwaiąc przecinek o iedno lub dwa miéysca ku prawéy ręce w mnożnéy zwiększa się tę liczbę 10 razy lub 100 razy (n° 27), więc tym sposobem znaydzie się prawdziwy iloczyn.

80. Gdy czynniki których szukamy iloczynu są liczbami mianowanemi, trzeba mieć baczność w rozeznawaniu tego który ma być wzięty za mnożną od tego, który ma służyć za mnożnik; bo ten przeznaczony iedynie do oznaczenia ile razy ma się wziąć mnożna *powinien być uważany iako liczba ogólna*, a zatém iloczyn iako złożony z mnożnéy wziętéy tyle razy ile iest iedności w mnożniku, mieć będzie koniecznie iedności téyże natury co mnożna.

Podług téy uwagi, gdyby ci zadano znaleźć wartość
łok. zł.
549 po 95,39 za łokieć, postrzeżesz natychmiast iż chcąc
zł.
mieć złote w iloczynie, powinieneś wziąć 95,39 za mnożną
łok.
a mnożnik 549 uważać iako liczbę ogólną, która oznacza iż mnożna powinna być wzięta 549 razy, to iest tyle razy
łok. łok.
ile 1 iest zawarty w 549.

łok.
Nakoniec gdyby ci podano to zadanie: 0,49 płótna ko-
zł. zł.
sztuie 1, ileż będzie łokci tegoż płótna za 37? Weźmiesz
łok zł.
0,49 za mnożną; powtórzysz ią tyle razy ile 1 iest zawar-
zł.
ty w 57 t. i. 57 razy, a iloczyn znaleziony wyrażałby licz-
bę łokci. Oto iest wzór tych dwóch działań.

łok.	zł.
95,39	0,49
549 zł.	57 zł.
85851	343
38156	245
47695	łok.
zł.	27,93
52369,11	

ZAGADNIENIA.

81. I. 5250 czerw. zł. ileż czynią złotych, rachuiąc czerwony złoty po zł. 18?

II. Rok pospolity z 365 dni złożony ileż zawiera godzin, gdy na dzień rachuiemy godzin 24?

III. Rok astronomiczny zawiera

dni	godz.	min.
365	5	8 49".

Gdy godzina zawiera 60 minut, minuta 60", a dzień 24 godzin, ileż będzie sekund w 10 latach?

zł.
IV. Gdy łokieć pewnéy materyi kosztuie 38,4 ileż zł.
łok.
kosztować będzie 128,5 téy materyi?

V. W mennicy Londyńskiéy pracuią na dzień 10 godzin. Każdy stępel wybiia 60 sztuk na minutę. Gdy więc 8 stępli razem biie, ileż na dzień sztuk wybiią?

VI. Rozmnożyć 1) 723,2879 przez 47000? 2) 0,0048 przez 0,026?

O DZIELENIU LICZB CAŁKOWITYCH I DZIESIĘTNYCH.

82. Gdy iest liczba poiedyncza do dzielenia przez poiedynczą, nie potrzeba prawidła na to działanie. Każdy wie iż np. 8 zawiera w sobie 4 dwa razy, a zatém że dzieląc 8 przez 4, iest dwa na iloraz. Pisze się $\frac{8}{4}=2$ lub 8: 4=2 i wymawia się: 8 *podzielone przez* 4 *równe* 2, lub 8 *zawiera w sobie* 4, *razy* 2.

83. Znayduie się także bez podawania prawidła iloraz z podzielenia liczby złożonéy z dwóch cyfer przez liczbę poiedynczą. Do tego potrzeba tylko wiedzieć iloczyny liczb poiedynczych; tak widać od razu iż $\frac{72}{9}=8$, iż $\frac{42}{7}=6$, i t. d.

84. Ponieważ iloraz oznacza ile razy dzielna zawiera dzielnik (n° 39), iasną iest rzeczą iż dzielna składa się z dzielnika wziętego tyle razy ile iedności zawiera iloraz. Więc mnożąc dzielnik przez iloraz będzie na iloczyn liczba równa dzielnéy, słowem: dzielna. Tak w przykładach powyższych, iest 4×2=8; 9×8=72; 7×6=42; a w tym $\frac{5}{5}=1$, mnożąc dzielnik 5 przez iloraz 1 znayduie się dzielna 5.

85. Zdarza się często iż iloraz z podzielenia iednéy liczby przez drugą nie może być zupełnie wyrażony przez całkowitą; takim iest iloraz z podzielenia 11 przez 5. W saméy rzeczy iest on większy niż 2 a mniéyszy niż 3. W takim razie, *napisz na iloraz mniéyszą z dwóch liczb pomiędzy któremi zawarty iest iloraz prawdziwy. Rozmnóż dzielnik przez tę liczbę; odeymiy od podzielnéy iloczyn z tego mnożenia i połóż różnicę po prawéy stronie ilorazu oznaczaiąc dzielenie iéy przez dzielnik.*

Tak w dzieleniu 11 przez 5 napisawszy 2 na iloraz, mówię: 5×2=10, 10 od 11 zostaie 1 który piszę po prawéy stronie 2, oznaczaiąc iż go trzeba podzielić przez 5 i mam $\frac{11}{5}=2\frac{1}{5}$. Widzimy więc iż 11 iest złożone z iednéy części zupełnie podzielnéy przez 5, i zreszty 1 któréy potrzeba tylko oznaczyć dzielenie przez 5.

86. Widoczna iest iż iloraz z 11 przez 5 mógłby także być wyrażony przez $\frac{11}{5}$ iak przez $2\frac{1}{5}$, ponieważ te dwa wyrażenia są równe. Wnieśmy z tego przykładu, iż kiedy iloraz z podzielenia iakiéy liczby przez drugą nie może być zupełnie wyrażony przez całkowitą liczbę można go wyrazić oznaczaiąc dzielenie dzielnéy przez dzielnik. Sposób ten wyrażania ilorazu niezupełnego iest wygodnym, i staie się koniecznym gdy dzielna iest mniéysza od dzielnika. Gdybym miał np. 6 podzielić przez 7, nie mógłbym napisać prostszego ilorazu, tylko $\frac{6}{7}$.

87. Ilość zupełnie to iest bez zostawienia reszty, podzielna przez drugą, iest *wielokrotną* względem drugiéy, a ta iest *częścią wielokrotną* pierwszéy. Tak 8 iest liczbą wielokrotną tak 4ch iako i 2ch a 4 i 2 są częściami wielokrotnemi 8miu.

88. Liczby wielokrotne z dwóch, są liczbami *parzystemi* liczby zaś niepodzielne przez 2, zowią się *nieparzyste*.

Postrzegamy łatwo iż każda liczba zakończona przez 0, 2, 4, 6 lub 8 musi być parzystą.

89. Każda liczba nie maiąca innego dzielnika zupełnego tylko sama siebie i iedność nazywa się *liczbą pierwszą* lub *liczbą pierwotną*; 1, 2, 3, 5, 7, 11, i t. d. są liczby pierwotne (1).

90. Nakoniec kiedy dwie liczby które porównywamy z sobą nie maią żadnego spólnego dzielnika zupełnego, tylko iedność, nazywamy ie liczby *pierwsze* lub *pierwotne między sobą*; tak 15 i 4 są liczby pierwotne między sobą.

91. Gdy dzielna iest złożona a dzielnik poiedynczy lub złożony, nie widać zaraz ile razy tenże zawiera się w dzielnéy, *trzeba więc częściami szukać ilorazu którego zaraz znaleźć nie można.*

Aby podzielić np. 73648 przez 8, piszę te dwie liczby w ten sposób:

```
  ....
 73648 | 8
 72    |---
---    | 9206
 16
 16
---
  48
  48
---
   0
```

Biorę za pierwszą dzielną cząstkową 73 tysiące liczby dzielnéy 73648 (2) i mówię, 73 zawiera 8 razy 9; piszę 9 pod liniyką, i widzimy oczywiście iż te 9 powinny wyrażać tysiące (1). Potém mówię, 8×9=72 które odiąwszy od dzielnéy cząstkowéy 73, zostaie 1 tysiąc do którego spuszczam 6 set dzielnéy (2), co mi daie 16 set na drugą dzielną cząstkową. Mówię zatém 8×2=16 które odiąwszy od dzielnéy cząstkowéy 16, nic nie zostaie. Spuszczam 4 dziesiątki dzielnéy i mam trzecią dzielną cząstkową. Mówię: 4 nie zawiera 8 ani razu; piszę w ilorazie 0 dla oznaczenia iż ten nie zawiera dziesiątków. Do 4 spuszczam 8 iedności na ostatnią dzielną cząstkową i mówię: 48 zawiera 8, razy 6; piszę więc w ilorazie cyfrę 6, która wyraża iedności, i mówię 8×6=48 które odiąwszy od dzielnéy cząstkowéy 48 zostaie 0. Tak liczba 73648 zawiera 8 zupełnie 9206 razy.

(1) Pożyteczną iest, ażeby początkuiący układali sobie tablicę liczb pierwotnych od 1 do 100 np. lub do 200, lub daléy.

(2) Gdy pierwsza cyfra całéy dzielnéy zawiera dzielnik trzeba wziąć tę tylko cyfrę za dzielną cząstkową.

92. Jeżeli więc idzie o podzielenie liczby złożonéy przez poiedynczą? *napisz dzielnik po prawéy stronie dzielney, oddzielaiąc ie liniyką, i pociągnąwszy drugą pod dzielnikiem, pisz pod nią cyfry ilorazu w miarę ich wynaydywania. Dla wynalezienia zaś ich, dziel następnie przez dzielnik wszystkie części dzielnéy postępuiąc od lewéy ręki do prawéy dopóki dzielna nie będzie wyczerpana.*

Jeżeli w ciągu działania natrafisz na cząstkową dzielną nie zawieraiącą dzielnika; natenczas przed przybraniem następuiącego znaku dzielnéy, napiszesz w ilorazie 0 dla oznaczenia iż iloraz nie zawiera iedności tego rzędu w którym działasz.

93. Aby liczbę złożoną podzielić przez inną złożoną np. 151982 przez 496, układam dzielną i dzielnik iak w przykładzie poprzedzaiącym:

```
  ...
151982 | 496
1485   |-----
------ | 307 17/496
 3482
 3465
------
   17
```

(1) Jest pewna iż liczba 73 uważana sama, zawiera 8, tylko 9 razy z resztą 1; lecz uważana iako składaiąca część liczby 73648 waży 73 tysiące a zatém zawiera 8, dziewięć tysięcy razy i zostaie 1 tysiąc.

(2) Dla uniknienia omyłki trzeba naznaczyć kropką lub kréską ostatnią cyfrę pierwszéy dzielnéy cząstkowéy, a następnie każdą cyfrę spuszczoną.

Poczém biorę za pierwszą dzielną cząstkową cztery cyfry 1519 dzielnéy, ponieważ trzy pierwsze nie zawieraią dzielnika (1). Szukam ile razy liczba 1519 zawiera 495 i dla większéy łatwości szukam tylko ile razy 15 set dzielnéy cząstkowéy 1519 zawiera 4 sta dzielnika 495, mówiąc: 15 zawiera 4, razy 3, mnożę 495 przez 3; iloczyn znaleziony 1485 może być odięty od 1519, a zatém dzielnik iest zawarty 3 razy w dzielnéy cząstkowéy. Piszę więc w ilorazie cyfrę 3 która wyrażać będzie sta, ponieważ dzielna cząstkowa 1519 wyraża 1519 set, i odeymuię 1485 od 1519, zostaie się 34.

Do pozostałéy reszty 34 spuszczam cyfrę 8 dzielnéy i mam 348 dziesiątków na drugą dzielną cząstkową. Że zaś liczba 348 nie zawiera 495; trzeba żebym położył o w ilorazie dla oznaczenia iż ten nie zawiera dziesiątków.

Do 348 spuszczam cyfrę 2 ostatnią dzielnéy; co mi daie 3482 iedności na ostatnią dzielną cząstkową. Zamiast uważać ile razy 3482 zawiera 495, uważam dla teyże przyczyny co wyżéy, ile razy 34 zawiera 4. Lecz nim napiszę 8 w ilorazie, mnożę 495 przez 8; iloczyn znaleziony 3960 iest większy niż dzielna cząstkowa 3482, ta dzielna nie zawiera więc 8 razy dzielnika. Probuię 7 tymże sposobem i widzę że iloczyn 3465 może być odięty od 3482. Piszę więc w ilorazie cyfrę 7 która wyraża iedności, i odeymuię 3465 od 3482; resztę 17 piszę po prawéy stronie ilorazu i oznaczam iéy dzielenie przez 495. Tak tedy liczba 151982 zawiera liczbę 495, razy 307 i z resztą 17.

94. Prawidło przepisane iest nieomylne. Bo dzielić iednę liczbę przez drugą, iestto szukać ile razy pierwsza zawiera drugą. Że zaś idąc za prawidłem przepisaném, znayduie się ile razy każda część dzielnéy zawiera dzielnik, a tém samém ile razy cała dzielna zawiera dzielnik; więc prawidło przepisane iest nieomylne.

95. Ażeby poznać czy nie zaszła omyłka w dzieleniu, *trzeba rozmnożyć dzielnik przez iloraz: ieżeli dzielenie które sprawdzić chcemy dobrze było odbyte, wypadnie dzielna* (n° 84). Gdy iest iaka reszta *trzeba ią złączyć z iloczynem*

1) Widoczną iest rzeczą, iż 151 uważane iako wyrażaiące 151 tysięcy, nie zawiera 495 ani razu iednego w rzędzie tysięcy. Bo 495×1000 iest większe niż 151000.

dzielnika przez iloraz. Bo, ieżeli prawda np. iż liczba 151982 zawiera 495, razy 307 z resztą 17, widoczną iest rzeczą iż trzeba dla znalezienia 151982 dodać 17 do 151965 iloczynu z 495 przez 307.

96. I odwrotnie, dzielenie służyć może do sprawdzenia mnożenia. Bo dzielna iest iloczynem którego dwoma czynnikami są dzielnik i iloraz. *Więc dzieląc iloczyn przez ieden z iego czynników wzięty za dzielnik, będzie drugi czynnik na iloraz.*

97. Uważmy, iż dla otrzymania iloczynu z wielu czynników nie można ich mnożyć przez siebie tylko następnie po dwa (n° 94) w iakimkolwiek porządku, więc dzieląc iloczyn z wielu czynników przez którykolwiek z nich, wypadnie na iloraz iloczyn innych czynników.

98. Nie koniecznie potrzeba pisać pod każdą dzielną cząstkową iloczyn dzielnika przez każdą cyfrę położoną w ilorazie. Skraca się dzielenie czyniąc odeymowanie w miarę rozmnożenia każdéy cyfry dzielnika przez cyfrę wyrażaiącą ile razy dzielnik iest zawarty w dzielnéy cząstkowéy nad którą się działa.

Niech będzie np. 162832 do podzielenia przez 398.

$$\begin{array}{r|l} 162832 & 398 \\ 3632 & \overline{409\frac{50}{398}} \\ 50 & \end{array}$$

Biorę 1628 za pierwszą dzielną cząstkową i mówię: 16 zawiera 3, razy 5, probuię 5; i widzę iż iest za wielkie, i że dzielna cząstkowa 1628 zawiera 398 tylko 4 razy (1). Piszę więc 4 w ilorazie, i mnożę dzielnik przez 4, mówiąc: $4 \times 8 = 32$; 32 od 8 nie można: aby uskutecznić odeymowanie dodaię 30 do 8 co czyni 38, i mówię: 32 od 38 zostaie 6, które piszę pod ostatnią cyfrą po prawéy stronie 1682, a zatrzymuię 3 dziesiątki, aby ie dodać dla nagrodzenia iloczynowi dziesiątków, które nieć będę mno-

1) Zamiast uważania ile razy liczba 16 zawiera 3, można uważać ile razy liczba 16 zawiera 4, ponieważ dzielnik 398 zbliża się bardziéy do 400 niż do 500: znaydzie się od razu 4, które iest prawdziwym ilorazem. Tak we wszystkich przypadkach gdzie druga cyfra dzielnika iest znacznie większa od pierwszéy, zamiast szukania ile razy taż zawiera się w dzielnéy odpowiadaiącéy, szukać trzeba ile razy zawiera się zwiększona iednością.

żąc 9 dziesiątków dzielnika przez 4. Mówię więc: 4×9=36, a 3 zatrzymane =39; 39 od 2 nie można; dodaię w myśli 40 do 2, co czyni 42, i mówię; 39 od 42 zostaie 3, które piszę pod 2, a zatrzymuię 4 aby ie dodać dla nagrodzenia do iloczynu set które mieć będę mnożąc 3 sta dzielnika przez 4. Mowię więc: 4×3=12, a 4 zatrzymane = 16, 16 od 16 zostaie 0.

Do reszty 36 spuszczam cyfrę 3 dzielnéy. Gdy dzielna cząstkowa 363 nie zawiera 398, piszę 0 w ilorazie, i spuszczam zaraz do 363 ostatnią cyfrę dzielnéy co daie 3632 na ostatnią dzielną cząstkową. Rozpoznawszy iż ta dzielna zawiera dzielnik 397 tylko 9 razy, piszę 9 w ilorazie, i mnożę dzielnik, mówiąc: 9×8=72; 72 od 2, nie można; przydaię 70 do 2, i mam 72. Mówię więc, 72 od 72 zostaie 0; które piszę pod ostatnią cyfrą po prawéy dzielnéy cząstkowéy 3632, i zatrzymuię 7 dziesiątków. Mnożę 9 dziesiątków przez dzielnik 9, mowiąc, 9×9=81, a 7 zatrzymane=88; 88 od 3 nie można. Dodaię w myśli 90 do 3 co czyni 93, i mówię: 88 od 93 zostaie 5, które piszę pod dziesiątkami 3, a zatrzymuię 9. Mnożę 3 sta przez dzielnik 9 mówiąc: 9×3=27 a 9 zatrzymane=36; 36 od 36 zostaie 0. Tak mam na iloraz 409 z resztą 50.

99. Zważmy, iż za każdém dzieleniem cząstkowém nie można nigdy więcéy położyć iak 9 w ilorazie. Bo rzęd iedności ilorazu każdego dzielenia cząstkowego iest koniecznie oznaczony rzędem iedności liczby dzielnéy cząstkowéy przyrównanym do rzędu iedności dzielnika. Gdybyśmy zaś w dzieleniu cząstkowém położyli tylko 10 w ilorazie, iest rzeczą widoczną iż iloraz ten byłby rzędu wyższego niż być powinien, to iest zawierałby iedności wyższego rzędu niż ten w którym się działa; więc w każdém dzieleniu cząstkowém nie można nigdy położyć więcéy iak 9 w ilorazie. I tak w przykładzie poprzedzaiącym gdy dzielna cząstkowa 363 wyrażaiąca dziesiątki, nie zawierała dzielnika 398 ani razu w rzędzie dziesiątków, dzielna cząstkowa 3632 wyrażaiąca iedności, zawierać go musiała w rzędzie iedności; nie można więc położyć w ilorazie większéy cyfry niż 9. Jakoż 50 reszta z tego dzielenia mniejsza niż dzielnik 398 iasno pokazuie, iż dzielna cząstkowa 3632 nie zawiera dzielnika 398 ani razu więcéy. Możnaby ieszcze krócéy okazać powyższą prawdę w ten sposób: gdy dzielna

cząstkowa np. 368 nie zawiera dzielnika ani razu; taż dzielna przybraniem cyfry zwiększona dziesięć razy, nie może go zawierać więcéy nad 9 razy (1).

Tu się także okazuie że iloraz powinien mieć zawsze tyle cyfer więcéy iedną, ile zostaie cyfer w dzielnéy po pierwszém dzieleniu cząstkowém.

100. Gdy dzielna i dzielnik są zakończone zerami, skraca się działanie opuszczaiąc w iednéy i w drugiéy liczbie tyle zer, ile ich iest na końcu liczby maiącéy ich mniéy, i dzieląc część pozostałą dzielnéy przez część pozostałą dzielnika. Na przykład, gdybym miał 32841000000 do podzielenia przez 8900, opuściłbym dwa zera w dzielnéy i dzielniku, potém dzieliłbym 32841000 część pozostałą dzielnéy, przez 89 część pozostałą dzielnika, i miałbym na iloraz 360000. Jakoż 32841000 set zawieraią 89 set, zupełnie tyle razy ile 32841000 iedności zawieraią 89 iedności.

Gdyby dzielnik był 1 z żerami, dosyćby było, aby mieć iloraz, wymazać na końcu dzielnéy tyle zer ile ich iest po iedności. Tak dla podzielenia 45000 przez 100; wymazuię dwa zera na końcu dzielnéy i mam na iloraz 450. Jakoż 100×450=45000. Lecz gdyby nie było zer na końcu dzielnéy, natenczas aby mieć iloraz, oddzieliłoby się po prawéy stronie liczby dzielnéy tyle cyfer ile iest zer po iedności, i oznaczyłoby się że te cyfry maią być podzielone przez dzielnik.

Tak, ieżeli iest 43649 do podzielenia przez 1000, iloraz będzie $43\frac{649}{1000}$.

101. Zdarza się często że trzeba poznać wszystkie dzielniki zupełne iakiéy liczby. Oto iest sposób ich znalezienia. Daymy iż żądaią wszystkich dzielników liczby 84.

Dzielę następnie tę liczbę przez wszystkie liczby pierwotne 1, 2, 3, 5, 7, i t. d. nie przestaiąc dzielić przez iednakową liczbę dopóki można.

Tak dzieląc 84 przez 1, iloraz iest 84.

Dzielę 84 przez 2, i mam iloraz 42.

---

(1) Jeżeli się w ciągu dzielenia znaydowała reszta większa od dzielnika, lub mu tylko równa, byłoby dowodem iż dzielnik zawiera się ieszcze w podzielnéy, a zatém że cyfra położona w ilorazie iest za małą. Trzeba więc natenczas zwiększyć tęż cyfrę iedną, dwoma, i t. d. iednościami,

Nie przestaię dzielić przez 2, i widzę iż liczba 42 podzielona przez 2 daie iloraz 21 które iuż nie są podzielne przez 2.

Dzielę 21 przez 3, a iloraz 7 nie iest iuż podzielny ani przez 3 ani przez 5.

Dzielę więc 7 przez 7; iloraz iest 1, i dzielenie przez liczby pierwotne iest iuż wyczerpane.

Dla obięcia iednym rzutem oka liczb dzielnych i ilorazów które mi daią te rozmaite dzielniki, układam ie iak ie tu widzimy.

Dzielne i ilorazy	Dzielniki
84	1
42	2
21	2
7	3
1	7

102. Lecz liczba 84 iest ieszcze podzielna przez wszystkie iloczyny dzielników pierwszych wziętych wszystkiemi sposoby po dwa, po trzy i t. d.

Zróbmy więc te iloczyny przestaiąc na napisaniu po razu tych które są te same.

Biorąc ie	Znaydziemy
1od po dwa . . .	4, 6, 14, 21,
2re po trzy	12, 28, 42,
3ie po cztery	84,

Wszystkie tedy dzielniki liczby 84 napisane każdy po razu, są 1, 2, 3, 4, 6, 7, 12, 14, 21, 28, 42, 84.

Krócéy iest, brać iloczyny dzielników pierwotnych w miarę ich wynaydowania.

84	1
42	2
21	2, 4,
7	3, 6, 12
1	7, 14, 28, 21, 42, 84 (1).

(1) Nie bezpożyteczną będzie aby uczący się układali sobie tablicę liczb nie pierwotnych rozkładaiąc ie na czynniki pierwotne np.

$4=2\times2$	$12=2\times2\times3$
$6=2\times3$	$14=2\times7$
$8=2\times2\times2$	$15=3\times5$
$9=3\times3$	$16=2\times2\times2\times2$
$10=2\times5$	$18=2\times3\times3$
	i t. d.

Tu iest mieysce wyłożyć niektóre zasady dzielenia iakich częste przystosowania znaydą się w dalszym ciągu.

103. 1od Jeżeli, nie zmieniaiąc dzielnika rozmnożymy podzielną przez iakąkolwiek całkowitą, iloraz z nowego dzielenia będzie tyle razy większym ile iest iedności w liczbie przez którą rozmnożyliśmy dzielną. Jakoż widoczną iest iż np. dzielna rozmnożona przez 2 lub przez 3, stała się 2 razy lub 3 razy większą, a zatém zawiera tenże sam dzielnik dwa razy więcéy lub trzy razy więcéy.

104. Przeciwnie, ieżeli zachowuiąc dzielną rozmnożymy dzielnik przez iakąkolwiek całkowitą, iloraz z nowego dzielenia będzie tyle razy mniéyszy ile iest iedności w liczbie przez którą rozmnożyliśmy dzielnik. Bo iasną iest rzeczą iż dzielnik rozmnożony przez 2 lub przez 3, stał się 2 razy lub 3 razy większym, więc zawiera się w téy saméy dzielnéy dwa razy mniéy, lub trzy razy mniéy.

105. Więc *mnożąc dzielną i dzielnik przez tęż samę liczbę, iloraz się nie odmienia.*

106. 2re Jeżeli, nie zmieniaiąc dzielnika, dzielimy dzielną przez iakąkolwiek całkowitą, iloraz wypadły z podzielenia téy nowéy dzielnéy przez dzielnik niezmieniony będzie tyle razy mniéyszy ile iest iedności w liczbie przez którą podzieliliśmy dzielną. W saméy rzeczy widzimy iż dzielna podzielona np. przez 2 lub przez 3, staie się 2 razy lub 3 razy mniéyszą, a tém samém zawiera tenże sam dzielnik dwa razy mniéy lub trzy razy mniéy.

107. Przeciwnie, ieżeli zachowuiąc dzielną podzielimy dzielnik przez iakąkolwiek całkowitą, iloraz wypadły z podzielnéy zachowanéy przez nowy dzielnik, będzie tyle razy większy ile iest iedności w liczbie przez którą podzieliliśmy dzielnik. Bo dzielnik podzielony przez 2 lub przez 3, staie się 2 razy, lub 3 razy mnieyszym; więc zawiera się w téy saméy dzielnéy dwa razy więcéy lub trzy razy więcéy.

108. Więc *dzieląc dzielną i dzielnik przez tęż samę liczbę, iloraz się nie odmienia.*

Przeydźmy do dzielenia dziesiętnych.

109. Gdy masz dziesiętne do podzielenia, *nie uważaiąc na przecinek, działay zupełnie iak gdyby szło o podzielenie liczb całkowitych: lecz pamiętay oddzielić przecinkiem od prawéy ręki z ilorazu tyle cyfer dziesiętnych, ile ich iest więcéy w dzielnéy niż w dzielniku.*

Tak aby podzielić 138,4968 przez 50,18 działam iak gdybym miał 1384968 podzielić przez 5018.

```
  ...
138,4968 | 50,18
38 136   |------
 3 0108  | 2,76
       0
```

Potém znalazłszy na iloraz 276, oddzielam przecinkiem 2 cyfry dziesiętne, i prawdziwy iloraz iest 2,76.

Jakoż biorąc za dzielną 1384968, zamiast 138,4968 zwiększyłem tę dzielną a tém samém i iloraz dziesięć tysięcy razy (n° 103).

Ze zaś, biorąc za dzielnik 5018, zamiast 50, 18 zwiększyłem dzielnik sto razy (n° 104): więc iloraz 276 iest ieszcze sto razy większy od prawdziwego. Więc aby mieć prawdziwy iloraz, trzeba zmniéyszyć 276 sto razy, a to nastąpi oddzielaiąc dwie cyfry dziesiętne, t. i. tyle ile ich iest więcéy w dzielnéy niż w dzielniku.

110. Gdyby się nie znaydowało w ilorazie tyle znaków ile iest cyfer dziesiętnych więcéy w dzielnéy niż w dzielniku, trzebaby położyć po lewéy stronie ilorazu liczbę zer dostateczną (n° 28), iak to widzimy w przykładzie następuiącym, gdzie na iloraz wypada tylko cyfra 9.

```
0,000036 | 0,004
         |------
         | 0,009
```

Dla teyże saméy przyczyny w przykładzie następuiącym dopisaliśmy o po lewéy stronie dziesiętnych ilorazu:

```
  ....
0,29706 | 3
        |-------
        | 0,09902
```

111. Lecz ieżeli się w dzielniku więcéy znayduie dziesiętnych niż w dzielnéy, natenczas trzeba dopisać do dzielnéy liczbę zer potrzebną do wyrównania liczbie cyfer dziesiętnych w dzielniku i nie uważaiąc na przecinek wykonywać, działanie iak gdyby szło o podzielenie liczb całych (n° 105); np. ieżeli iest 46,8 do podzielenia przez 4,252; dopisuię do dzielnéy dwa zera i mam 46800 do podzielenia przez 4252, iloraz iest 11 z resztą 28.

112. Gdybyśmy mieli iaką liczbę np 983, 7 do podzielenia przez 10, lub przez 100, lub i t. d. dosyć iest, dla otrzymania ilorazu cofnąć przecinek ku lewéy ręce w dzielnéy o iedno, o dwa, lub i t. d, miéysca np. 983,7: 10=98,37; 983,7 : 100=9,837 i t. d.

W saméy rzeczy; dzielić przez 10 lub przez 100, iest to zmniéyszać podzielną 10 razy lub 100 razy. Że zaś cofaiąc przecinek o iedno lub dwa mieysca ku lewéy ręce w dzielnéy, zmniéysza się tę liczbę 10 razy lub 100 razy (n° 26); otrzymuie się więc tym sposobem prawdziwy iloraz. Tak, aby podzielić 43649 przez 1000, dosyć iest napisać 43,649.

113. W przypadkach gdy nie można mieć ilorazu zupełnego, t. i. gdy się iaka reszta zostaie, mogę za pomocą części dziesiętnych zbliżyć się do prawdziwego ilorazu aż do tak małych części dziesiętnych, które iuż można zaniedbać bez znacznego uchybienia, czyli co na iedno wychodzi, mogę dzielić mnieyszą liczbę przez większą.

Weźmy resztę z dzielenia (n° 98), gdzie zostało 50 do podzielenia przez 398.

Mogę od razu do dzielnéy 50, sześć zer przypisać, ieżeli tylko do sześciu dziesiętnych chcę dzielenie posunąć, lub przypisywać zera w miarę potrzeby. Oto iest wzór tych dwóch działań:

```
  ......
50000000 | 398          500 | 398
1020     |------        1020 |------
 2240    | 0,125628     2240 | 0,125628
 2500                    2500
 1120                    1120
 3240                    3240
   56..... i t. d.         56..... i t. d.
```

Iloraz więc przybliżony z 50 przez 398 iest 0,125628; lub 0,12562; lub 0,1256; lub, i t. d. podług potrzeby zatrzymania się przy 6téy, lub przy 5téy, lub przy 4téy, lub

i t. d. cyfrze dziesiętnéy; t. i. podług potrzeby zbliżenia ważności dziesiętnych do prawdziwéy, mniéy niż o iednę milionową lub stotysiączną lub dziesięciotysiączną, lub i t. d. (1).

Rachunek ten którego zasada iest iasna (n° 103; 109) będzie miał ieszcze ważne zastósowania gdy mówić będziemy niżéy o zamianie ułomków zwyczaynych na dziesiętne i t. d. Zabawiliśmy się nad nim nieco dłużéy, bo wprawa w niego nader iest potrzebna.

114. Gdy dzielna i dzielnik są liczbami mianowanemi, odbywa się dzielenie iak gdyby te liczby były niemianowane i szło o znalezienie ile razy iedna zawiera drugą.

Gdyby się pytano np. ile razy ten który ma 46zł. iest bogatszy od tego, który ma 23zł.; iloraz 2 iest liczbą niemianowaną (ogólną) która oznacza iż iest 2 razy bogatszy.

Jeżeli idzie o podzielenie 46zł. porówno między 23 osób? iloraz iest liczbą mianowaną oznaczaiącą iż każda osoba powinna mieć 2zł. na swóy dział.

Daymy iż trzeba rozwiązać zadanie następuiące: 23 łokci wstążki kosztuią 46zł. iakaż iest cena łokcia? iloraz 2 iest liczbą mianowaną oznaczaiącą iż cena łokcia iest złotych 2.

Nakoniec, ieżeli chcę, wiedzieć ile za 46zł. będzie muru po 23zł. sążeń rachuiąc? iloraz 2 iest liczbą mianowaną pokazuiącą iż będzie 2saż. muru.

Podług tego łatwo znaydziesz, iż gdy 27 osób maią się porówno dzielić summą 948,51 zł.; dział każdéy osoby będzie 35,13 zł.; i że, gdy łokieć iakiéy materyi kosztuie 29, za 2099,6 zł. będziesz miał 72,4 téy materyi. Widzimy tu tablicę tych dwóch działań.

948,51	27	zł.	2099,6	29	łok.
138		35,13	69		72,4
35			116		
81		-	0		
0					

Ztąd łatwo wnosimy, że gdy dzielna i dzielnik są iednego gatunku, natura iedności ilorazu oznaczona iest przez

(1) Tak, ważność liczby o 125628 zbliżona do prawdziwego ilorazu mniéy niż o iednę np. setną iest 0,12; bo część zaniechana 0,005628 iest mnieysza niż 0,01.

zadanie. Gdy zaś dzielna i dzielnik są różnego gatunku, iloraz iest tego gatunku iakiego i liczba dzielna.

ZAGADNIENIA.

115. I. Za 248 korcy zboża dano 3472 zł., po ileż płacono korzec?

II. Jest do podziału 1155zł. na 195 ludzi, ileż się każdemu dostanie?

III. 55668 ℔ ileż czynią cetnarów?

IV. Łokieć pewnéy materyi kosztuie 27,5 zł.: ileż będzie łokci téy materyi za 990 zł.?

V. Teraźniéysze Królestwo Polskie liczy ludności 3 911 109, zawiera zaś 2271 mil kwadratowych powierzchni: ileż mieszkańców wypada na milę kwadratową?

VI. Ogromny dług skarbu królestwa angielskiego wynosi 38 253 072 400zł. Jeżeli na funt złota rachuiemy 100 czerw: zł: czyli 1800zł. ileż funtow złota trzebaby na zaspokoienie wspomnionego długu?

VII. Podzielić 1) 0,000276 przez 0,06; 2) 0,3794 przez 7; 3) 586 przez 7,45?

VIII. Znaleźć wszystkie dzielniki liczby 1) 360; 2) 1080?

ZAGADNIENIA W KTÓRE WCHODZĄ POPRZEDZAIĄCE DZIAŁANIA POŁĄCZONE.

116. I. W Kaliszu rachuią ludności 9151, w Płocku 6164, w Lublinie 13158, w Warszawie 128052; o ileż więcéy iest ludności w Warszawie niż w trzech pierwszych miastach razem?

II. 1) 576cet. 1kam. i 18 ℔ ileż uczyni funtów? 2) 84saż. 2łok. 1st. ileż czynią stóp?

III. Kupiec prowadzący troiaki handel włożył w 1szy. 12860zł. w 2gi. 15440, w 3ci. 10680; zarobił zaś przez rok na 1szym. 1688zł. na 2gim 1858, lecz na 3cim stracił 226zł. i przytém wszystkiém poniósł ieszcze wydatku 354zł. Ileż na końcu tego roku mieć będzie maiątku.

IV. Kupił kto 64 łok. sukna po 15zł. łokieć, przedał zaś łokieć po 19zł. lecz na miarze zginęło mu łokci 6. Ileż miał zysku lub straty?

V. Wyrachowano iż człowiek zwyczaynie oddychaiąc za każdym razem bierze w siebie powietrza 40 cali sześciennych (1), i że 136ta część powietrza w płuca wciągnionego w nas zostaie. Oddycha zaś człowiek przez minutę pospolicie 20 razy.

Ileż w godzinie pozostaie w nim cali sześciennych powietrza?

VI. Wiedząc że w prowincyi ludney teraz na 654840 dusz, powiększyła się ludność przez dopiero skończone 15 lat o ósmą część dawnieyszey liczby swoiey, znaleźć iak wielkie iest to powiększenie, i iaka była ludność przed 15 laty?

VII. Jest w pewnym śpichrzu 840kor. zboża z którego sprzedano: 1e 145kor. po 18zł.; 2e 234 po 17; 3e 302 po 19; 4e resztę korcy po 20zł. 1) ileż zebrano za wszystko?

2) gdyby powiedziano iż zboże będące w śpichrzu kosztowało po 16zł. korzec, ileżby zarobiono przy wspomnioney przedaży?

VIII. Gdyby zboże do śpichrza skupowano częściami np. kupiono 1e 285kor. po 17zł.; 2e 436 po 16zł.; i przedawano także częściami np. 1e 152kor. po 20zł.; 2e 328 po 19; 3e resztę kor. po 21zł. ileż zarobiono?

IX. Jest do przewiezienia z iednego miéysca na drugie 5248cet. pewnego materyału którego biorą po 8cet. na wóz parokonny. Od każdego zaś konia płacą tu po 3zł. 1) Ileż wszystkie konie do tego przewiezienia razem użyte będą kosztowały?

(1) Miéysce zamknięte sześcią kwadratami (ob. przypisek do Nra 61) równemi i w zeyściach swoich czyli *krawędziach* równo nachylonemi do siebie, nazywa się *sześciannem*. Jeżeli krawędź sześcianu ma stopę długości, a zatém miejsce zamknięte iest sześcią stopami kwadratowemi, natenczas, miejsce to czyli obiętość zowie się *stopą sześcienną*, ieżeli krawędź ma cal 1, *calem sześciennym*, i. t. d. Dokładnieyszego wyobrażenia sześcianu nabędzie się w geometryi.

2) Gdyby tu i każdy wóz do przewiezienia użyty kosztował np. zł. 2, a chcący przewieźć miałby swoich wozów zaprzężnych 50, i prócz tego koni 38 których do tego przewiezienia chce użyć; ileż go ieszcze naiem wozów i koni będzie kosztował?

X. Jest do umundurowania 5 kompaniy po 180 ludzi. Na każdego człowieka trzeba 4łok. sukna po zł. 9, krawcowi zaś od roboty każdego munduru zł. 5. 1) ileż podług tego zamierzone umundurowanie będzie kosztowało?

2) gdyby iuż było w magazynie 250 mundurów gotowych, i oprócz tego 360łok. sukna; ileżby w tenczas umundurowanie kosztowało?

O DZIAŁANIACH GŁÓWNYCH ARYTMETYKI Z UŁOMKAMI ZWYCZAYNEMI.

WIADOMOSCI POPRZEDNICZE.

117. Sposób odbywania 4ch głównych działań arytmetycznych z ułomkami łatwo poymiemy, gdy poznamy dokładnie sposób ich wyrażania. Nader zaś proste są zasady które nam posłużą do oznaczenia tego wyrażenia. W saméy rzeczy, *ułomek iakikolwiek zawiera iednę lub wiele części iedności*, a iedność może być podzieloną na wiele gatunków części równych np. na dwie połowy, trzy części, cztery ćwiartki, pięć części, i t. d. Wyrażenie więc ułomku powinno być takie, żeby dawało zarazem wyobrażenie liczby i gatunku części ten ułomek składaiących (1).

118. Aby to otrzymać używamy dwóch liczb nazwanych *dwoma wyrazami* ułomku (duo termini fractionis) które piszemy iednę nad drugą oddzielaiąc ie liniyką. Liczba niższa oznacza gatunek części t. i. na ile części dzielimy iedność i nazywa się *mianownik* (denumerator); wyższa oznacza ile ułomek zawiera tych części i nazywa się *licznik*

(1) Z podaney tu definicyi ułomku widzimy że i części dziesiętne o których wyżéy mówiliśmy, uważać można za ułomki dziesiętne.

(numerator). I tak w wyrażeniu $\frac{3}{10}$, mianownik 10 oznacza iż w ułomku są części iedności dziesiąte, a licznik 3 oznacza iż ułomek zawiera 3 takich części. Wysłowia się ułomek $\frac{3}{10}$, mówiąc *trzy dziesiąte* (2); lecz możnaby także mówić *dziesiąta część trzech*. Bo widoczną iest rzeczą, iż trzy dziesiąte np. łokcia, iest zupełnie to samo co dziesiąta część ze trzech łokci.

119. Łatwo tu postrzedz iż wyrażenie ułomkowe iest tylko ilorazem oznaczonym dzielenia nieuskutecznionego, którego dzielna iest licznikiem ułomku, dzielnik zaś iest w nim mianownikiem.

120. Stąd 1^od^ ieżeli nie odmieniaiąc mianownika ułomku rozmnożymy licznik przez iakąkolwiek całkowitą; ułomek nowy będzie tyle razy większy, ile było iedności w całkowitéy przez którą pomnożyliśmy licznik (n° 103). Mnożąc np. licznik ułomku $\frac{1}{3}$ przez 2, będzie ułomek $\frac{2}{3}$ dwa razy większy niż $\frac{1}{3}$.

121. Przeciwnie, ieżeli zachowuiąc licznik ułomka, rozmnożymy mianownik przez iakąkolwiek całkowitą, ułomek nowy będzie tyle razy mnieyszy, ile było iedności w całkowitéy, przez którą pomnożyliśmy mianownik (n° 104). Mnożąc np. mianownik ułomku $\frac{1}{3}$ przez 2, będzie ułomek $\frac{1}{6}$ dwa razy mnieyszy niż $\frac{1}{3}$.

122. Więc, *mnożąc oba wyrazy iakiego ułomku przez tęż samę liczbę, nie zmienia się ważność tego ułomku.* Tak mnożąc obadwa wyrazy ułomku $\frac{1}{2}$ przez 2, lub przez 3, lub 4 i t. d. staie się on $\frac{2}{4}$ lub $\frac{3}{6}$, lub $\frac{4}{8}$, i t. d. i iest widoczna iż te nowe ułomki są wszystkie równe $\frac{1}{2}$.

123. 2^re^ ieżeli nie odmieniaiąc mianownika ułomku, podzielimy licznik przez iakąkolwiek całkowitą, ułomek nowy będzie tyle razy mnieyszy, ile było iedności w całkowitéy przez którą podzieliliśmy licznik (n° 106. Dzieląc np. licznik ułomku $\frac{3}{4}$ przez 3, będzie ułomek $\frac{1}{4}$, który iest trzy razy mnieyszy niż $\frac{3}{4}$.

124. Przeciwnie, ieżeli zachowuiąc licznik ułomku, podzielimy mianownik przez iakąkolwiek całkowitą, ułomek

(1) Prócz ułomku $\frac{1}{2}$, który wymawia się pół, w pospolitém wysłowianin wszystkich innych np. $\frac{1}{3}$, $\frac{4}{7}$, *iedna trzecia, cztery siedme*, domyśla się zawsze wyrazu *część, części*.

nowy będzie tyle razy większy, ile było iedności w całkowitéy przez którą podzieliliśmy mianownik (n° 207). Dzieląc np. mianownik ułomku $\frac{1}{8}$ przez 4, będzie ułomek $\frac{1}{2}$, który iest cztery razy większy niż $\frac{1}{8}$.

125. Więc, *dzieląc obadwa wyrazy iakiego ułomku przez tęż samę liczbę, nie zmienia się ważność tego ułomku.* Tak dzieląc przez 4 obadwa wyrazy ułomku $\frac{4}{8}$, staie się on ułomkiem $\frac{1}{2}$ który iest równy $\frac{4}{8}$.

126. Z tych prawd iako i z definicyy ułomku (n°117;118) łatwo wniesiemy iż za powiększeniem samego licznika wartość ułomku się zwiększa, iak za powiększeniem samego mianownika zmnieysza; tudzież, że z ułomków maiących iednakowe mianowniki ten iest większy, którego licznik iest większy; a z maiących równe liczniki, ten iest większy którego mianownik iest mnieyszy.

127. Często się zdarza iż trzeba zamienić całkowitą na ułomek bez odmiany ważności téy całkowitéy, i przywieść do iednakowych mianowników ułomki nie iednakowe mianowniki maiące, bez odmiany ważności tych ułomków.

128. Można zaraz wyrazić iakąkolwiek całkowitą w kształcie ułomku daiąc iéy 1 za mianownik. Tak $7=\frac{7}{1}$; $9=\frac{9}{1}$; i t. d. co iest rzeczą widoczną.

Lecz ieżeli chcemy zamienić całkowitą na ułomek któryby miał mianownik dany, *trzeba ią rozmnożyć przez mianownik który iéy dać chcemy: iloczyn będzie licznikiem ułomku żądanego.* Tak aby zamienić 4 na ułomek maiący 2 za mianownik, mnożę 4 przez 2 i dzielę przez 2, co mi daie $\frac{8}{2}$. Aby 4 zamienić na ułomek maiący 3 za mianownik, mnożę 4 przez 3 i dzielę przez 3, i mam ułomek $\frac{12}{3}$ i t. d.

Widzimy oczywiście iż wyrażenia ułomkowe $\frac{8}{2}$, $\frac{12}{3}$ są równe 4, bo uskuteczniaiąc oznaczone dzielenie, znaydziemy tęż samę całkowitą; nadto widzimy, iż dla zamienienia 4 na ułomek, rozmnożyliśmy ie tylko i podzielili przez tęż samę liczbę, a to ich wartości odmienić nie może.

129. Ułomki które zawieraią iedność lub wiele iedności nazywaią się *ułomki niewłaściwe*, te zaś które są mnieysze niż iedność nazywaią się *właściwe*.

Ułomek staie się liczbą całkowitą licznikiem oznaczoną, skoro część całkowitości oznaczona mianownikiem wzięta będzie za iedność; np. $\frac{2}{3}$ sążnia, są 2 łokcie.

130. Aby sprowadzić do iednakowego mianownika ułomki nie iednakowe mianowniki maiące: *trzeba rozmnożyć obadwa wyrazy każdego ułomku przez mianownik drugiego ieżeli ich tylko dwa, a przez iloczyn mianowników innych, ieżeli ich iest więcéy niż dwa.*

Tak, ażeby przywieśdź do iednakowego mianownika dwa ułomki $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{5}$; mnożę przez 5 obadwa wyrazy ułomku $\frac{1}{2}$ co mi daie $\frac{5}{10}$; potém mnożę przez 2 obadwa wyrazy ułomku $\frac{2}{5}$ i mam $\frac{6}{10}$. Dwa ułomki sprowadzone do iednego mianownika są więc $\frac{5}{10}$ i $\frac{6}{10}$.

Aby dać iednakowy mianownik ułomkom $\frac{1}{2}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{3}{7}$; mnożę naprzód obadwa wyrazy ułomku $\frac{1}{2}$ przez 5×7, iloczyn mianowników dwóch innych, co daie $\frac{1\times5\times7}{2\times5\times7}$ czyli $\frac{35}{70}$.

Potém mnożę obadwa wyrazy ułomku $\frac{4}{5}$ przez 2×7, iloczyn mianowników innych, i mam $\frac{4\times2\times7}{5\times2\times7}$ czyli $\frac{56}{70}$.

Nakoniec, mnożę obadwa wyrazy ułomku $\frac{3}{7}$ przez 2×5 iloczyn mianowników innych, i znayduię $\frac{3\times2\times5}{7\times2\times5}$ czyli $\frac{30}{70}$.

Ułomki sprowadzone do iednakowego mianownika są więc: $\frac{35}{70}$, $\frac{56}{70}$, $\frac{30}{70}$.

131. Spostrzegamy łatwo iż ułomki sprowadzone też samę maią ważność co i ułomki dane; ponieważ dla przywiedzenia ich do iednakowego mianownika, mnożyliśmy tylko obadwa wyrazy każdego ułomku przez tęż samę liczbę, co nie zmienia ważności ułomku (n° 122).

Niemniéy widoczną iest, iż tym sposobem ułomki sprowadzone mieć będą iednakowy mianownik, ponieważ mianownik każdego ułomku iest iloczynem wszystkich mianowników ułomków danych (n° 74).

132. Wszystkie inne sposoby czyli raczéy skrócenia wyłożonego sposobu przyprowadzania ułomków do iednakowego mianownika gruntuią się na wskazanéy tu zasadzie. Tak, ieżeli mam dwa lub więcéy ułomków z których iednego mianownik iest liczbą wielokrotną względem mianowników innych (n°87), natenczas aby mieć iednakowe mianowniki, dosyć iest pomnożyć oba wyrazy każdego ułomku którego mianownik iest częścią wielokrotną mianownika większego przez liczbę oznaczaiącą część wielokrotną; np. maiąc sprowadzić do iednakowego mianownika ułomki $\frac{15}{12}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{3}$ i $\frac{1}{2}$; uważam iż liczby 4; 3, 2, są częściami wielokrotnemi 12stu pomnożywszy więc oba wyrazy ułomku $\frac{1}{4}$ przez 3, $\frac{2}{3}$ przez 4, a $\frac{1}{2}$ przez 6, otrzymam równe im ułomki $\frac{3}{12}$, $\frac{8}{12}$, $\frac{6}{12}$, maiące ten sam mianownik co i ułomek $\frac{6}{12}$.

133. Gdy znaczna iest liczba ułomków a w tych nie ma żadnego mianownika któryby w sobię zawierał mianowniki wszystkich innych ułomków podanych, natenczas aby sobie ułatwić sprowadzenie ich do iednego mianownika, trzeba *znaleźć naymnieyszą iak może a liczbę którąby była zupełnie podzielną przez każdy mianownik.*

Jeżeli podane mianowniki są liczbami pierwotnemi między sobą, *iloczyn z rozmnożenia ich iedne przez drugie będzie naymnieyszą liczbą zupełnie podzielną przez każdy z mianowników* (n° 97).

Lecz ieżeli mianowniki nie są liczbami pierwotnemi między sobą, łatwo iest poznać iż dla znalezienia naymnieyszéy liczby podzielnéy przez każdy z nich, dosyć iest wziąć iloczyn z ich czynników osobnych, opuszczaiąc w każdym mianowniku czynniki które są częściami wielokrotnemi czynników składaiących inne mianowniki: np. maiąc sprowadzić do iednakowego mianownika ułomki $\frac{5}{6}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{11}{24}$, $\frac{5}{18}$, $\frac{4}{9}$, $\frac{2}{3}$, postrzegam naprzód iż 6 i 8 są częściami wielokrotnemi 24ch, a 9 częścią wielokrotną 18u, opuszczam więc te mianowniki i tylko mi zostaią 24, 18, 5. Rozkładam te liczby na czynniki poiedyncze z których powstaią czynniki nie będące liczbami pierwotnemi, i mam (n° 101), $2\times2\times2\times3$, $2\times3\times3$, 1×5, czyli 8×3, 2×9, 5; opuszczaiąc znowu czynniki 3 i 2 które są częściami wielokrotnemi względem czynników 9 i 8, zostaie mi 8, 9, 5; a liczba naymnieysza zupełnie podzielna przez 6, 8, 24, 18, 9, 5, iest $8\times9\times5=360$. Tę liczbę maiąc, dzielę ią przez każdy z mianowników, a przez iloraz mnożę obadwa wyrazy ułomku którego mianownik był dzielnikiem, albo raczéy mnożę przez ten iloraz tylko liczniki odpowiadaiące a iloczyny wypadłe będą licznikami nowych ułomków sprowadzonych do iednakowego mianownika naymnieyszego ile być może, którym widocznie będzie liczba 360. A tak podane ułomki zamienią się na ułomki: $\frac{300}{360}$, $\frac{315}{360}$, $\frac{165}{360}$, $\frac{100}{360}$, $\frac{160}{360}$, $\frac{144}{360}$.

134. Gdy ułomek iest wyrażony przez wielkie liczby, trudno iest dokładne o ważności iego mieć wyobrażenie.

Pożyteczną więc iest rzeczą umieć wyrażać ułomki bez zmiany ich ważności naymniéyszemi ile można liczbami. Sposób którego można użyć dla przywiedzenia ułomku do nayprostszego wyrażenia, iest, dzielić bez reszty obadwa iego wyrazy przez liczby 2, 3, 4, i t. d. tyle razy ile będzie można.

Podzielimy przez 2 gdy obadwa wyrazy ułomku kończyć się będą cyfrą parzystą, ponieważ każdy dziesiątek, sto, tysiąc i t. d. iest zupełnie podzielny przez 2; więc skoro iedności dadzą się podzielić przez 2, zatém i cała liczba będzie podzielną przez 2. Tak $\frac{8}{32}$ iest podzielne przez 2 i zamienia się naprzód na $\frac{4}{16}$, potém na $\frac{2}{8}$, a nakoniec na $\frac{1}{4}$.

Podzielimy przez 3 gdy summa cyfer licznika i summa cyfer mianownika uczyni każda 3 albo liczbę wielokrotną względem 3. Bo dzieląc 10 przez 3, reszta iest 1, iest także 1 dzieląc 100, 1000,... więc dzieląc 20, 200, 2000... reszta powinna być podwóyna czyli = 2. Dzieląc 40, 400, 4000... reszta będzie 1; dzieląc zaś 50, 500, 5000... reszta zostanie 2, i t. d. reszty z dzielenia zawsze wypadać będą 1, lub 2. Że zaś liczba np. 8753 może być rozłożoną na iedności, dziesiątki i t. d... 8000 + 200 + 50 + 3; dzieląc ie więc przez 3, reszty 2+1+2 czynią 5. Zatém reszta z $\frac{8753}{3}$ iest taż sama co $\frac{5}{3}$ to iest 2. Więc reszta z dzielenia liczby iakiéy przez 3, znayduie się, dodaiąc wszystkie iéy cyfry iak gdyby wystawiały proste iedności i odeymuiąc 3 tyle razy ile można. Więc każda liczba, któréy summa cyfer iest 3 lub liczbą wielokrotną względem 3, iest podzielną przez 3. I tak np. oba wyrazy ułomku $\frac{15}{228}$ są podzielne przez 3, ponieważ 6 summa cyfer licznika iest liczbą wielokrotną względem 3, iako i summa cyfer mianownika. Ułomek więc zamieni się na $\frac{5}{76}$.

Liczba 9 ma tęż samę własność co liczba 3. Tak ułomek $\frac{81}{1089}$ w którym summa cyfer licznika czyni 9, a summa cyfer mianownika iest liczbą wielokrotną względem 9, ma obadwa swe wyrazy podzielne przez 9 i zamienia się na $\frac{5}{121}$ (1).

(1) Dzieląc 10 prze 9 reszta iest 1; iest także 1 dzieląc 100, 1000,....; więc dzieląc 20,200,2000..... reszta powinna być podwóyna czyli = 2? dzieląc 30,300,3000.....; będzie reszta 3, i t. d. Że zaś liczba np. 8753 może być rozłożoną na iedności, dziesiątki, i t. d..... 800+700+50+3. dzieląc przez 9, reszty 8+7+5+3 czynią 23. Zatém reszta z $\frac{8753}{9}$ iest taż sama co z $\frac{23}{9}$ t. i. 5.

Więc reszta z dzielenia liczby iakiéy przez 9 znayduie się, dodaiąc wszystkie iéy cyfry iak gdyby wystawiały proste iedności, i odeymuiąc 9 tyle razy ile można: więc każda liczba któréy summa cyfer iest 9. lub liczbą wielokrotną względem 9, iest i t. d.

Dla poznania czy liczba iaka da się podzielić przez 7, iest prawidło nieco przydłuższe. Obacz umieszczone przy końcu dzieła przypisy.

Podzielimy przez 4, gdy ostatnie dwie cyfry licznika i mianownika są podzielne przez 4. Każde bowiem sto iest podzielne przez 4. Skoro więc dziesiątki i iedności dadzą się zupełnie podzielić przez 4, więc i cała liczba będzie podzielną przez 4. Obadwa wyrazy ułomku np. $\frac{516}{704}$ są podzielne przez 4, i ułomek ten zamienia się na ułomek $\frac{129}{176}$. Przez podobne rozumowanie okazuie się iż każda liczba iest podzielna przez 8, skoro iéy ostatnie trzy cyfry są podzielne przez 8. Tak obadwa wyrazy ułomku $\frac{1503}{1560}$ są podzielne przez 8, i ułomek zamienia się na $\frac{151}{192}$.

Podzielimy przez 5, gdy obadwa wyrazy ułomku będą zakończone na 5, albo ieden na 5 a drugi na 0. Bo każda liczba zakończona na 5 albo na 0 iest liczbą wielokrotną względem 5, a tém samém podzielną przez 5. Tak obadwa wyrazy ułomku $\frac{15}{25}$ są podzielne przez 5, i ułomek zamienia się na $\frac{3}{5}$ Podobnież ułomek $\frac{10}{15}$ na $\frac{2}{3}$. Gdyby obadwa wyrazy kończyły się na 0, trzeba ie podzielić przez 10. Tak $\frac{40}{60}$ zamienia się na $\frac{4}{6}$.

Pamiętać tu należy, iż liczba daiąca się podzielić przez dzielniki pierwsze, da się także podzielić przez iloczyny tych dzielników. Skoro np. liczba iaka daie się podzielić przez 2 i przez 3 w szczególności, da się ona podzielić i przez 6, i t. d. (n° 102).

135. Lecz aby przywieśdź natychmiast ułomek do nayprostszego wyrażenia: *podziel obadwa wyrazy ułomku przez ich naywiększy spólny dzielnik, to iest przez naywiększą liczbę która ie obadwa dzielić może zupełnie.* Tak dzieląc obadwa wyrazy ułomku $\frac{8}{32}$ przez 8 które iest naywiększą liczbą mogącą dzielić zupełnie 8 i 32, wypadnie $\frac{1}{4}$ wyrażenie nayprostsze iakie można znaleźć zamiast $\frac{8}{32}$.

Są przypadki w których nie iest łatwo poznać naywiększy dzielnik spólny dwom liczbom; sposób iego znalezienia okaże się nam przez przykład następuiący. Daymy iż chcąc

zamienić ułomek $\frac{45}{81}$ do nayprostszego wyrażenia, zakładam sobie znaleźć naywiększy spólny dzielnik obu wyrazów składaiących ten ułomek. Powiem naprzód: ten naywiększy spólny dzielnik nie może być większy iak 45; zobaczmy czy 45 które się zupełnie dzieli przez siebie, dzieli także zupełnie i 81; lecz dzieli ie z resztą 36; ułomek $\frac{45}{81}$ iest zatém równy $\frac{45}{45+36}$.

Teraz mówię: naywiększy spólny dzielnik nie może być większy iak 36, inaczéy część 36 nie byłaby zupełnie podzielną: probuię czyli 36 które się dzieli zupełnie przez siebie, dzieli także zupełnie i 45, lecz dzieli ie z resztą 9, ułomek więc $\frac{45}{45+36}$ zamienia się na $\frac{36+9}{36+9+36}$.

Uważam iż pod tym kształtem ułomek nie może mieć większego spólnego dzielnika iak 9, ponieważ 9 które się znayduie w obu wyrazach, nie mogłoby być zupełnie podzielone przez liczbę większą niż samo; probuię dzielenia, i postrzegam iż 9 dzieli zupełnie części ułomku: iest więc dzielnikiem spólnym licznika i mianownika; i widzimy oczywiście z tego postępowania iż iest naywiększym, ponieważ liczba większa niż 9 nie mogłaby dzielić zupełnie obu wyrazów ułomku $\frac{45}{81}$.

Znalazłszy iuż naywiększy spólny dzielnik, pozostaie tylko podzielić przez niego obadwa wyrazy ułomku który zamienić chcemy na prostszy; tak dzieląc 45 i 81 przez 9, znaydziemy iż nayprostsze wyrażenie $\frac{45}{81}$ iest $\frac{5}{9}$.

136. Zastanawiaiąc się nad postępowaniem w tém działaniu, wniesiemy, iż aby znaleźć naywiększy spólny dzielnik czyli naywiększą spólną miarę dwóch liczb, *trzeba dzielić większą przez mnieyszą. Jeżeli iloraz wypadnie zupełny t. i. bez zostawienia reszty, mnieysza liczba będzie naywiększym spólnym dzielnikiem.*

Jeżeli iloraz iest z resztą, trzeba dzielić mnieyszą liczbę, która była dzielnikiem, przez tę resztę; a ta będzie naywiększym spólnym dzielnikiem, ieżeli się dzielenie wykona bez reszty; ieżeli wypadnie reszta, trzeba dzielić pierwszą resztę przez drugą, i powtarzać takowe działanie dopóty, dopóki nie znaydziemy ilorazu bez reszty. Reszta dzieląca zupełnie poprzedzaiącą, będzie naywiększym spólnym dzielnikiem szukanym.

W takowém działaniu wygodnie iest pisać każdą resztę po prawéy stronie dzielnika, aby natychmiast zaymowała mieysce właściwe w następuiącém dzieleniu. Tak np. dochodząc naywiększego spólnego dzielnika ułomku $\frac{651}{1364}$ pisze się:

1364	651	62	31
	2	10	2

Naywiększym więc spólnym dzielnikiem danego ułomku iest 31. Podzieliwszy zatém przez niego obadwa wyrazy ułomku, otrzymamy $\frac{21}{44}$ ułomek skrócony z ułomku danego (1).

137. Gdy ostatnia reszta iest iedność, iestto znakiem iż dwa wyrazy ułomku nie maią innego dzielnika spólnego iak iedność, czyli że są *pierwotnemi między sobą*; a zatém że ułomek nie może być skrócony (2).

138. Naywiększego dzielnika spólnego więcéy niż dwóch liczb znaleźlibyśmy szukaiąc między naymnieyszą i naybliżéy większą, naywiększéy spólnéy miary, między tą znalezioną i trzecią większą liczbą znowu podobnéy miary, i t. d.

Zrozumiawszy dobrze, co się dotąd mówiło o wyrażaniu ułomków, poymiemy łatwo dodawanie, odeymowanie, mnożenie i dzielenie tychże liczb.

ZAGADNIENIA.

139. I. Który iest większy z dwóch ułomków 1) $\frac{5}{7}$ i $\frac{3}{4}$? 2) $\frac{4}{5}$ i $\frac{13}{25}$? 3) $\frac{3}{8}$ i $\frac{5}{12}$.

II. Sprowadzić do spólnego mianownika 1) $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{7}$, $\frac{1}{4}$? 2) $\frac{5}{6}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{11}{13}$?

---

(1) Ułomek ten = blisko $\frac{1}{2}$, widzimy bowiem iż gdy licznik iest połową mianownika, ułomek taki = połowie całości, im zaś różnica między licznikiem i mianownikiem iest mnieysza, tém bardziéy ułomek zbliża się do całości.

(2) Jeżeli w szukaniu spólnego dzielnika dwóch liczb znaydziemy ná iaką resztę, liczbę pierwotną, lub postrzeżemy iż wypadły dzielnik i dzielna są pierwotnemi między sobą, będzie to iuż znakiem że dane liczby nie maią innego dzielnika spólnego iak 1.

III. Jakżeby sprowadzić do iednakowych liczników ułomki $\frac{3}{5}, \frac{7}{9}, \frac{1}{4}$?

IV. Jakie iest wyrażenie nayprostsze ułomku 1) $\frac{3661}{11306}$? 2) $\frac{14349}{882\,64}$? 3) $\frac{20}{317}$?

V. $\frac{6}{7}$ # ileż czyni talarów, złotych i groszy?

O DODAWANIU UŁOMKÓW.

140. Nie można do siebie dodawać tylko ilości iednorodne i iednogatunkowe (n° 36), mianownik zaś oznacza gatunek ułomku. *Jeżeli więc ułomki które trzeba do siebie dodać nie maią iednakowego gatunku części to iest: odmienne maią mianowniki, trzeba ie naprzód sprowadzić do iednakowego mianownika.*

141. To założywszy, ażeby dodać razem ułomki: *weź summę wszystkich liczników, i day iéy mianownik spólny.*

Tak, aby dodać ułomki $\frac{2}{9}, \frac{5}{9}$ i $\frac{7}{9}$ maiące iednakowy mianownik, biorę 14 summę liczników, 2, 5, 7; daię iéy mianownik spólny 9, i summa szukana iest $\frac{14}{9}$ która się zamienia uskuteczniaiąc dzielenie, na $1\frac{5}{9}$.

Tym sposobem znaydziemy iż summa ułomków mianowanych $\frac{2}{3}$zł. i $\frac{3}{5}$zł. $= \frac{5}{5}$zł. $= 1$zł..

Aby mieć summę ułomków $\frac{3}{7}, \frac{4}{7}, \frac{6}{11}$ sprowadzam ie naprzód do iednakowego mianownika i staią się $\frac{231}{385}; \frac{220}{385}, \frac{210}{385}$; dodaię potém ich liczniki 231, 220, 210, i pod summą 661 tych liczb piszę mianownik spólny 385. Summa więc trzech ułomków danych iest $\frac{661}{385}$, czyli uskuteczniaiąc dzielenie, $1\frac{276}{385}$.

Znaydziemy przez podobne działanie iż summa ułomków mianowanych $\frac{1}{2}$zł. $\frac{3}{4}$zł. $\frac{5}{6}$zł. i $\frac{7}{9}$zł. iest $\frac{1236}{432}$zł. $= 2\frac{31}{36}$zł.

142. Gdy znaczna iest liczba ułomków do dodawania, natenczas można nie sprowadzać ich razem do iednakowego mianownika, lecz w miarę łatwości sprowadzenia ich do tegoż po dwa, po trzy, i t. d. uskuteczniać ich dodawanie Tak w poprzedzaiącém zagadnieniu $\frac{1}{2}$ łatwo iest dodać do $\frac{5}{6}$, bo $\frac{1}{2}+\frac{5}{6}=\frac{3}{6}+\frac{5}{6}=\frac{8}{6}=1\frac{2}{6}$ czyli 1 i $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{3}$ i $\frac{7}{9}=\frac{3}{9}$ i $\frac{7}{9}=\frac{10}{9}=1\frac{1}{9}$; $\frac{1}{9}$ i $\frac{3}{4}$ sprowadzam zwykłym sposobem do iednakowego

mianownika i mam $\frac{4}{36}$ i $\frac{27}{36}=\frac{31}{36}$. Znalazłem więc że $\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{5}{6}+\frac{7}{9}=2\frac{31}{36}$ summa ta sama co wyżéy.

143. Jeżeli są całkowite połączone z ułomkami: *weź summę ułomków i doday ią do summy całkowitych.*

Tak $7\frac{3}{4}+11\frac{2}{5}=7\frac{15}{20}+11\frac{8}{20}=18\frac{23}{20}=19\frac{3}{20}$.
zł. zł. zł.

Podobnie $5\frac{2}{3}+7\frac{4}{5}+6\frac{7}{8}=5\frac{80}{120}+7\frac{96}{120}+6\frac{105}{120}=18\frac{281}{120}=20\frac{41}{120}$ zł.

ZAGADNIENIA.

144. I. Jaka iest summa ułomków 1) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}$, 2) $\frac{4}{5}, \frac{3}{4}, \frac{7}{9}, \frac{5}{12}, \frac{6}{27}, \frac{8}{15}$?

II. Kupiono cztery sztuki materyi, pierwsza kosztuie $324\frac{5}{11}$zł.; 2ga $298\frac{1}{6}$zł.; 3cia $198\frac{4}{9}$zł., a 4ta $312\frac{3}{4}$zł. Pytaią się o całą wartość tych czterech sztuk?

III. Ma powroźnik grubéy liny w 1szym pęku $82\frac{2}{7}$ sąż., w 2im $35\frac{3}{10}$ sąż.; w 3cim $14\frac{5}{6}$ sąż.; cieńszéy liny w 1ym pęku $15\frac{3}{7}$ sąż.; w 2im $28\frac{1}{8}$ sąż. i ieszcze kawałek $\frac{7}{12}$. Wieleż ma sążni grubéy, wiele cienkiéy, a wiele razem całéy liny.

IV. Gdy z Warszawy do Drezna rachuią mil pocztowych $77\frac{1}{2}$, z Drezna do Lipska $12\frac{3}{8}$; z Lipska do Frankfurtu nad Menem, $39\frac{1}{9}$; z Frankfurtu do Moguncyi, $4\frac{1}{21}$; z Moguncyi do Paryża, $62\frac{5}{7}$; ileż iest mil pocztowych z Warszawy do Paryża?

V. Handluiący zbożem kupił żyta za # $127\frac{5}{18}$, przenicy za $158\frac{13}{25}$, ięczmienia za $84\frac{7}{15}$, owsa za $95\frac{11}{20}$. Sprzedawszy to zboże, zarobił na pierwszém #$28\frac{10}{21}$, na drugiém $37\frac{3}{14}$, na trzeciém $12\frac{4}{5}$, na czwartém $21\frac{11}{30}$. Ileż zarobił na wszystkiém, a ile zebrał w ogóle pieniędzy.

O ODEYMOWANIU UŁOMKÓW.

145. Nie można odeymować od siebie części rożnorodnych i różnogatunkowych (n° 37). *Jeżeli więc ułomki których szukamy różnicy maią odmienne mianowniki: trzeba ie przywieśdź do iednego mianownika.*

146. To założywszy, ażeby odiąć ułomek od ułomku: *weź różnicą liczników i day iéy mianownik spólny.*

Tak ażeby odiąć ułomek $\frac{3}{7}$ od ułomku $\frac{5}{7}$. odeymuię 2 od 5, i daię reszcie 3 mianownik spólny 7, a różnica szukana iest $\frac{3}{7}$.

Podobnie $\frac{8}{9}$łb — $\frac{5}{9}$łb = $\frac{5}{9}$łb.

Ażeby odiąć $\frac{3}{4}$ od $\frac{5}{6}$, sprowadzam te ułomki do spólnego mianownika, i otrzymuię $\frac{18}{24}$, $\frac{20}{24}$; odeymuię potem 18 od 20 i pod resztą 2, piszę mianownik spólny 24. Więc $\frac{5}{6}-\frac{3}{4}=\frac{20}{24}-\frac{18}{24}=\frac{2}{24}=\frac{1}{12}$.

Znaydziemy przez podobne działanie iż ułomek mianowany $\frac{10}{21}$łb przewyższa ułomek mianowany $\frac{23}{35}$łb o $\frac{152}{735}$łb czyli $\frac{26}{105}$łb.

147. Jeżeli są całkowite połączone z ułomkami: *weź różnicę ułomków i złącz ią z różnicą całkowitych.*

Tak $17\frac{3}{4}-5\frac{6}{11}=17\frac{33}{44}-5\frac{24}{44}=12\frac{9}{44}$.
zł. zł. zł. zł. zł. zł.

Podobnież $7\frac{4}{6}-4\frac{1}{3}=7\frac{4}{6}-4\frac{2}{6}=3\frac{2}{6}=3\frac{1}{3}$.

Chcąc odiąć ułomek od liczby, całkowitéy bierzemy iedność od całkowitéy i zamieniwszy ią na ułomek tegoż gatunku części, to iest taki któryby miał spólny mianownik z ułomkiem danym, postępuiemy podług powyższego prawidła.

Tak aby odiąć $\frac{2}{7}$ od 5, biorę z liczby całkowitéy 5 iednę iedność którą zamieniam na ułomek maiący za mianownik 7 i mam $4\frac{7}{7}-\frac{2}{7}=4\frac{5}{7}$.
zł. zł. zł.

Również $29-\frac{8}{17}=28\frac{9}{17}$.

Gdy zaś od ułomku połączonego z całkowitą większy iest ułomek który odiąć mamy, natenczas wziąwszy podobnie iak wyżéy, iedność od całkowitéy i zamieniwszy ią na ułomek maiący spólny mianownik z obudwoma ułomkami, dodać go do ułomku mnieyszego i postąpić iak się wyżéy wskazało.

Tak ażeby odiąć $6\frac{3}{4}$ od $8\frac{1}{4}$, mówię: $8=7+\frac{4}{4}$; więc $8\frac{1}{4}=7\frac{5}{4}$; że zaś $7\frac{5}{4}-6\frac{3}{4}=1\frac{2}{4}=1\frac{1}{2}$, a zatém różnica szukana iest $1\frac{1}{2}$.
zł. zł. zł. zł. zł. zł. zł.

Podobnież $7\frac{1}{8}-4\frac{2}{3}=7\frac{3}{24}-4\frac{16}{24}=6\frac{27}{24}-4\frac{16}{24}=2\frac{11}{24}$.

ZAGADNIENIA.

149. I. Jaka iest różnica 1) między $\frac{23}{36}$ i $\frac{45}{72}$? 2) między 21 i $19\frac{33}{49}$?

II. Jaka iest różnica między $\frac{12}{28}$ i $\frac{441}{1323}$?

III. Z pewnéy sztuki materyi trzymaiącéy $34\frac{4}{5}$łok. długości, oderznięto $27\frac{3}{8}$łok. ileż łokci zostało.

IV. Znaleźć różnicę różnic między $\frac{9}{11}$ i $\frac{3}{4}$ a $\frac{5}{7}$ i $\frac{5}{12}$?

V. Jadąc z Warszawy na Brześć Litewski, Słonim i Mińsk do Petersburga rachuiemy mil $211\frac{1}{2}$. Gdy z Warszawy do Brześcia Litewskiego iest mil $25\frac{7}{8}$, z Warszawy do Słonima $51\frac{2}{3}$; z Warszawy do Mińska $79\frac{4}{5}$; iakaż iest odległość tych miast w szczególności?

O MNOŻENIU UŁOMKÓW.

150. Aby rozmnożyć ułomek przez całkowitą: *rozmnóż licznik ułomku przez całkowitą i day iloczynowi mianownik ułomku.*

Na przykład, aby rozmnożyć $\frac{2}{11}$ przez 4, mnożę licznik 2 przez 4, a wypadłemu iloczynowi 8 daię mianownik ułomku 11; więc $\frac{2}{11}\times 4=\frac{8}{11}$.

W saméy rzeczy, rozmnożyć $\frac{2}{11}$ prze 4, iest to powtórzyć ułomek $\frac{2}{11}$ cztery razy, czyli zwiększyć go cztery razy.

Mnożąc zaś przez 4 licznik tego ułomku a nie odmieniaiąc mianownika, czynimy go cztery razy większym (n° 120) więc $\frac{2}{11}\times 4=\frac{8}{11}$.
zł. zł. zł.

Podobnież $\frac{3}{7}\times 2=\frac{6}{7}$; $\frac{3}{4}\times 5=\frac{15}{4}=3\frac{3}{4}$.

151. Jeżeli trzeba liczbę całkowitą rozmnożyć przez ułomek; *rozmnóż całkowitą przez licznik ułomku, i day iloczynowi mianownik tegoż ułomku.*

To iest, tym samym sposobem mnoży się całkowita przez ułomek, iak ułomek przez całkowitą, bo zmiana mieysca czynników nie odmienia iloczynu (n° 74).

Naprzykład, aby rozmnożyć 12 przez $\frac{2}{3}$ mnożę całkowitą 12 przez licznik 2, i daię iloczynowi 24 mianownik 3; więc $12\times\frac{2}{3}=\frac{24}{3}=8$; łatwo spostrzegamy iż 8 iest prawdziwym iloczynem. Bo iloczyn 24 z rozmnożenia 12 przez 2 iest trzy razy za wielki, gdyż nie trzeba było mnożyć 12 tylko przez trzecią część dwóch; więc ażeby przyprowadzić iloczyn 24 do prawdziwéy ważności, trzeba go trzy razy zmnieyszyć, a to nastąpi gdy go podzielimy przez 3; więc $12\times\frac{2}{3}=\frac{24}{3}=8$.

Lub też, iloczyn powinien zawierać mnożną tyle razy, ile mnożnik zawiera iedności; że zaś w tym przykładzie mnożnik zawiera tylko dwie trzecie części iedności, więc iloczyn z 12 przez $\frac{2}{3}$ powinien zawierać tylko dwie trzecie części mnożnéy 12; zatém $12\times\frac{2}{3}=8$.

Podobnie $25\times\frac{5}{6}=\frac{125}{6}=20\frac{5}{6}$.

Gdyby się pytano o wartość $\frac{3}{4}$łok. iakiéy materyi którey łokieć kosztuie 25zł. widzimy iż tu trzebaby powtórzyć 25zł. cztery piąte razy (n° 80), czyli pomnożyć 25zł. przez $\frac{4}{5}$. Ze zaś $25\text{zł.}\times\frac{4}{5}=\frac{100}{5}\text{zł.}=20\text{zł.}$ więc wartość o którą pytaią, iest 20zł.

152. Aby, rozmnożyć ułomek przez ułomek. *weź naprzód iloczyn liczników, potém iloczyn mianowników, i day drugi iloczyn za mianownik pierwszemu.*

Na przykład, aby rozmnożyć $\frac{3}{7}$ przez $\frac{2}{5}$; biorę iloczyn liczników który iest 6, biorę potém iloczyn mianowników który iest 35, i daię 35 za mianownik liczbie 6; więc $\frac{3}{7}\times\frac{2}{5}=\frac{6}{35}$.

Jakoż rozmnożyć $\frac{3}{7}$ przez $\frac{2}{5}$, iest to powtórzyć $\frac{3}{7}$ dwie piąte razy, albo co iedno iest, wziąć $\frac{3}{7}$ piątą część dwóch razy. Mnożąc zaś $\frac{3}{7}$ przez 2 co daie $\frac{6}{7}$, powtórzyłem mnożną dwa razy, zamiast powtórzyć piątą część dwóch razy; więc iloczyn $\frac{6}{7}$ iest pięć razy za wielki, zatém aby mieć prawdziwy iloczyn, trzeba $\frac{6}{7}$ pięć razy zmnieyszyć, a to nastąpi gdy pomnożę mianownik 7 przez 5 (n° 121). Więc $\frac{3}{7}\times\frac{2}{5}=\frac{6}{35}$.

Gdyby się teraz pytano o wartość $\frac{12}{35}$łb iakiego towaru rachuiąc po $\frac{2}{3}$zł. funt, znaleźlibyśmy natychmiast iż wartość szukana iest $\frac{24}{48}=\frac{1}{2}$.

153. Jeżeli mnożna i mnożnik maią liczby całkowite z ułomkami, trzeba w każdym czynniku sprowadzić całkowite do mianownika ułomku, przy nich będącego (n°128), aby mieć tylko ułomek, a w tenczas pozostanie się tylko do mnożenia ułomek przez ułomek.

Naprzykład, aby rozmnożyć $3\frac{1}{2}$ przez $4\frac{2}{3}$; mówię: $3\frac{1}{2}=\frac{7}{2}$; $4\frac{2}{3}=\frac{14}{3}$: więc $3\frac{1}{2}\times4\frac{2}{3}=\frac{7}{2}\times\frac{14}{3}=\frac{98}{6}=16\frac{1}{3}$.

Podobnie aby wiedzieć wartość $3\frac{1}{4}$łok. iakiéy materyi, rachuiąc po $7\frac{1}{2}$zł. za łokieć; zamieniam $3\frac{1}{4}$łok. na ułomek

$\frac{13}{4}$łok. a $7\frac{1}{2}$zł. na ułomek $\frac{15}{2}$zł.; potém mnożę $\frac{15}{2}$zł. przez $\frac{13}{4}$ i mam na iloczyn $\frac{195}{8}$zł.$=24\frac{3}{8}$zł. Więc wartość szukana iest $24\frac{3}{8}$zł.

154. Gdyby iednak w czynnikach, znaydowały się wielkie liczby całkowite np. gdyby $3175\frac{3}{4}$ wypadało rozmnożyć przez $2469\frac{1}{2}$, natenczas krócéy będzie rozmnożyć mnożną przez całkowite mnożnika, a potém przez iego ułomek. Oto iest wzór tego działania.

a	b
3175	$\frac{3}{4}$
á	ƀ
2469	$\frac{1}{2}$

a×á=	7839075			
b×á=	. 1851	$\frac{3}{4}$	. .	$\frac{6}{8}$
a×ƀ=	. 1587	$\frac{1}{2}$	. .	$\frac{4}{8}$
b×ƀ=	. .	$\frac{3}{8}$	. .	$\frac{3}{8}$

Iloczyn cały 7842514 $\frac{5}{8}$

Oznaczyliśmy tu czynniki i ich iloczyny cząstkowe głoskami, aby tém łatwiéy widzieć zkąd wypadły te iloczyny cząstkowe których dodanie w iloczyn cały iest zawsze łatwe, bo postępuiąc naszą drogą, mianownik ułomku w czwartym iloczynie cząstkowym, będzie zawsze wielokrotny względem każdego mianownika w ułomkach dwóch poprzedzaiących iloczynów cząstkowych, a zatém dodanie ułomków odbywa się tu bardzo łatwo (n° 132).

155. W mnożeniu ułomków są przypadki w których znayduie się iloczyn sposobem nader łatwym. Oto z nich niektóre:

1e. Jeżeli liczba przez którą trzeba mnożyć ułomek równa iest iego mianownikowi, iloczynem będzie licznik ułomku. Gdyby mi zadano rozmnożyć np. $\frac{6}{7}$ przez 7? uwolnię się od działania i napiszę licznik 6 na iloczyn; bo widzimy iż $\frac{6\times7}{7}=6\times1=6$.

2e. Gdy mam ułomek mnożyć przez liczbę która dzieli zupełnie iego mianownik, zamiast pomnożyć licznik, po-

dzielę mianownik przez tę liczbę, wyydzie to na iedno (n° 124), a przyydę tym sposobem natychmiast do prostszego wyrażenia iloczynu. I tak aby rozmnożyć $\frac{5}{24}$ przez 3, zamiast mnożyć 5 przez 3, podzielę 24 przez 3 a wypadek $\frac{5}{8}$ iest iloczynem $\frac{5}{24}\times 3$ przywiedzionym do nayprostszego wyrażenia.

5e. Jeżeli mam wiele ułomków mnożyć iedne przez drugie, oznaczę tylko mnożenie ich mianowników: gubiąc potém czynniki spólne obu wyrazom ułomku iloczynu, będę go miał natychmiast przywiedziony do nayprostszego wyrażenia. Tak $\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times\frac{4}{5}=\frac{1\times 2\times 3\times 4}{2\times 3\times 4\times 5}=\frac{1}{5}$ (1).

Oczywista iest iż gubiąc czynniki spólne obu wyrazom ułomka nie odmienia się bynaymniéy ważność iloczynu iaki ten ułomek wyraża, ponieważ się tylko dzieli obadwa wyrazy ułomku przez tęż samę ilość (n° 125).

ZAGADNIENIA.

156. I. Gdy korzec iakiego zboża kosztuie $\frac{11}{12}$; ileż kosztować będzie $27^{\text{kor.}}$ czyli łaszt tego zboża?

II. Gdy funt pewnego towaru kosztuie $73^{\text{zł.}}$ ileż będzie kosztowało $\frac{5}{7}$ lb tegoż towaru?

III. Pytaią się ile iest $\frac{6}{7}$ z 77?

IV. Jaki iest iloczyn 1) z $\frac{150}{347}\times\frac{70}{85}$? 2) z $\frac{62}{90}\times\frac{25}{5}$.

V. Znaleźć liczbę która podzielona przez 17 dałaby na iloraz $17\frac{2}{3}$?

VI. Ileż kosztuią $45\frac{3}{4}^{\text{łok.}}$ np. sukna po $17\frac{2}{3}^{\text{zł.}}$?

VII. Jeżeli garniec iakiego napoiu kosztuie $2\frac{3}{5}^{\text{zł.}}$ ileżby kosztowało $18^{\text{gar.}}$ czyli antał.

VIII. Jakiż iloczyn ułomków $\frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \frac{4}{7}, \frac{7}{3}$, następnie przez siebie rozmnożonych?

(1) Z tego i z innych przykładów przekonywamy się iż korzystną iest rzeczą niekiedy oznaczać uskutecznienie działania; często bowiem nie uskuteczniaiąc go w zupełności, znaleźć można wypadek nawet w nayprostszém wyrażeniu.

O DZIELENIU UŁOMKÓW.

157. Aby podzielić ułomek przez całkowitą; *rozmnóż mianownik ułomku przez całkowitą i ten iloczyn day za mianownik licznikowi ułomku.*

Na przykład, aby podzielić $\frac{1}{2}$ przez 3, mnożę mianownik 2 przez 3, i daię iloczyn 6 za mianownik licznikowi 1 ułomku danego. Więc $\frac{1}{2}:3=\frac{1}{6}$. Widzimy bowiem iż ułomek $\frac{1}{6}$ iest prawdziwym ilorazem z podzielenia $\frac{1}{2}$ przez całkowitą 3. Bo dzielić $\frac{1}{2}$ przez 3, iestto $\frac{1}{2}$ trzy razy zmnieyszyć, mnożąc zaś przez 3 mianownik ułomku $\frac{1}{2}$ zmnieyszamy go trzy razy (n° 121); więc $\frac{1}{2}:3=\frac{1}{6}$.

Znaydziemy przez działanie zupełnie podobne, iż 7 osób maiąc porówno między siebie podzielić $\frac{5}{9}$zł. dział każdey będzie $\frac{5}{63}$zł.

158. Gdy iest do dzielenia liczba całkowita przez ułomek: *trzeba dzielić całkowitą przez licznik ułomku, a iloraz rozmnożyć przez mianownik.*

Na przykład, aby podzielić 6 przez $\frac{2}{3}$, dzielę 6 przez 2, co daie $\frac{6}{2}$: iloraz ten $\frac{6}{2}$ mnożę przez 3, i mam $\frac{18}{2}$ (n° 150). Więc $6:\frac{2}{3}=\frac{18}{2}=9$.

Jakoż dzielić 6 przez $\frac{2}{3}$, iest to szukać ile razy 6 zawiera $\frac{2}{3}$. Jest zaś widoczna iż 6 zawiera $\frac{2}{3}$ trzy razy więcéy niż 2, ponieważ 2 iest trzy razy większe niż $\frac{2}{3}$; więc iloraz $\frac{6}{2}$ znaleziony z podzielenia 6 przez 2, iest trzy razy mnieyszy; więc aby go sprowadzić do prawdziwéy iego ważności, trzeba go trzy razy zwiększyć, a to nastąpi mnożąc go przez 3. Więc $6:\frac{2}{3}=\frac{6}{2}\times 3=\frac{18}{2}=9$.

Nadto, 6 zawiera $\frac{1}{3}$ ośmnaście razy; więc nie zawiera $\frac{2}{3}$ tylko 9 razy; więc znowu $6:\frac{2}{3}=9$.

Znaydę podobném zupełnie postępowaniem, iż dzieląc sztukę materyi $27^{\text{łok.}}$ długą, na kawały długie po $\frac{3}{4}^{\text{łok.}}$ każdy, będzie 36 kawałów. Jakoż $27:\frac{3}{4}=\frac{27}{3}\times 4=\frac{108}{3}=36$.

159. Aby dzielić ułomek przez ułomek: *rozmnóż mianownik ułomku dzielnéy przez licznik ułomku dzielnika; rozmnóż potém licznik ułomku dzielnéy przez mianownik ułomku dzielnika, i day pierwszy iloczyn za mianownik drugiemu.*

Na przykład, aby podzielić $\frac{2}{7}$ przez $\frac{3}{4}$ mnożę 5, przez 3, co mi daie iloczyn 15, potém mnożę 2 przez 4, i mam ilo-

czyn 8. Daię pierwszy iloczyn 15 za mianownik drugiemu iloczynowi 8, i mam $\frac{2}{5} : \frac{3}{4} = \frac{8}{15}$.

Jakoż gdybym miał $\frac{2}{5}$ do dzielenia przez 3, iloraz byłby $\frac{2}{15}$ (n° 157). Lecz ten iloraz iest cztery razy mnieyszy, ponieważ powinienem tylko dzielić przez czwartą część 3ch; więc aby przyprowadzić iloraz do iego prawdziwéy ważności, trzeba go cztery razy zwiększyć: więc trzeba pomnożyć $\frac{2}{15}$ przez 4 co daie $\frac{8}{15}$; więc $\frac{2}{5} : \frac{3}{4} = \frac{8}{15}$.

Działaiąc podobnie znaydziemy iż gdy $\frac{3}{10}$ łok. np. wstążki kosztuie $\frac{6}{25}$zł. łokieć kosztuie $\frac{4}{5}$zł.; bo $\frac{6}{25}$zł. : $\frac{3}{10} = \frac{60}{75}$ zł. $= \frac{4}{5}$zł..

160. Zastanawiaiąc się nad postępowaniem któregośmy się trzymali w dzieleniu całkowitéy przez ułomek, i ułomku przez ułomek, łatwo postrzegamy iż otrzymalibyśmy też same wypadki mnożąc dzielną przez ułomek dzielnika odwrócony. Bo $6 \times \frac{3}{2} = \frac{18}{2} = 9$ (n° 158) i $\frac{2}{5} \times \frac{4}{3} = \frac{8}{15}$ (n° 159).

Aby więc podzielić liczbę iakąkolwiek całkowitą lub ułomkową przez ułomek; *dosyć ią rozmnożyć przez ten ułomek odwrócony.*

Uważmy tu że 1 podzielona przez ułomek, iest toż samo co tenże ułomek odwrócony; np. $\frac{1}{\frac{2}{5}}$ czyli $1 : \frac{2}{5} = 1 \times \frac{5}{2} = \frac{5}{2}$.

161. Jeżeli dzielna i dzielnik maią całkowite z ułomkami sprowadza się każda całkowita do mianownika ułomku przy niéy będącego, a będzie do dzielenia tylko ułomek przez ułomek.

Tak $4\frac{3}{5} : 6\frac{1}{3} = \frac{23}{5} : \frac{19}{3} = \frac{23}{5} \times \frac{3}{19} = \frac{69}{95}$.

Podobnież ieżeli wykopanie $3\frac{1}{5}$sąż. rowu kosztuie $19\frac{1}{4}$zł. znaydziemy iż wykopanie sążnia rowu kosztuie $6\frac{11}{64}$zł. Bo $19\frac{1}{4}$zł. : $3\frac{1}{5} = \frac{77}{4}$zł. : $\frac{16}{5} = \frac{77}{4}$zł. $\times \frac{5}{16} = \frac{385}{64}$zł. $= 6\frac{1}{64}$zł.

162. Można iednak nie zamieniać dzielnéy na ułomek, np. ieżeli sążeń pewnéy roboty kosztuie $5\frac{2}{3}$zł. a pytaią się ile będzie sążni za $52\frac{2}{3}$zł.? Zamieniam dzielnik $5\frac{2}{3}$ na ułomek który będzie $\frac{17}{3}$, mnożę teraz dzielną przez mianownik 3, co mi daie $156\frac{2}{4}$zł. a podzieliwszy ten wypadek przez 17, mam $9\frac{21}{68}$sąż. na iloraz.

163. W dzieleniu ułomków zdarzaią się często przypadki w których ma mieysce skrócenie działania. I tak: 1°. Jeżeli iest dany ułomek do dzielenia przez liczbę całkowitą która dzieli zupełnie licznik, natenczas podzielę tylko licznik przez tę liczbę (n° 123), tym sposobem znaydę zaraz proste wyrażenie ilorazu. Maiąc np. $\frac{15}{16}$ do dzielenia przez 5, podzielę tylko licznik 15 przez 5 i mieć będę $\frac{3}{16}$ iloraz w nayprostszém wyrażeniu.

2°. Gdy licznik ułomku dzielnéy iest liczbą wielokrotną względem licznika ułomku dzielnika, a mianownik pierwszego iest także wielokrotnym względem mianownika drugiego; w tym przypadku aby znaleźć wyrażenie nayprostsze ilorazu, podzielę licznik dzielnego przez licznik dzielnika a mianownik dzielnego przez mianownik dzielnika. Chcę np. dzielić $\frac{27}{33}$ przez $\frac{9}{11}$? podzielę 27 przez 9, i 33 przez 11, a iloraz z $\frac{27}{33} : \frac{9}{11}$ przywiedziony do nayprostszego wyrażenia będzie $\frac{3}{3} = 1$. Bo w saméy rzeczy $\frac{27}{33} : \frac{9}{11} = \frac{27}{33} \times \frac{11}{9} = \frac{297}{297} = 1$.

3ie. Kiedy można podzielić przez iednakową liczbę liczniki albo mianowniki ułomków których szukam ilorazu, nie trzeba tego zaniedbywać.

Jeżeli mam np. $\frac{8}{9}$ dzielić przez $\frac{4}{7}$; podzielę 8 i 4 przez 4, i będę miał $\frac{2}{9} : \frac{1}{7} = \frac{14}{9}$. Bo $\frac{8}{9} : \frac{4}{7} = \frac{8}{9} \times \frac{7}{4} = \frac{4 \times 2}{9} \times \frac{7}{4} = \frac{4 \times 2 \times 7}{9 \times 4} = \frac{2 \times 7}{9} = \frac{14}{9}$.

Jeżeli iest $\frac{3}{49} : \frac{5}{14}$, podzielę 49 i 14 przez 7, i będzie $\frac{3}{7} : \frac{5}{2} = \frac{6}{35}$. Bo $\frac{3}{49} : \frac{5}{14} = \frac{3}{49} \times \frac{14}{5} = \frac{3 \times 7 \times 2}{7 \times 7 \times 5} = \frac{3 \times 2}{7 \times 5} = \frac{6}{35}$.

Naostatek gdybym miał dzielić $\frac{6}{35}$ przez $\frac{9}{28}$ widzę iż 6 i 9 są podzielne przez 3, a 35 i 28 przez 7; dzielę więc 6 i dziewięć przez 3, a 25 i 8 przez 7 co mi daie $\frac{2}{5} : \frac{3}{4} = \frac{8}{15}$. Bo $\frac{6}{35} : \frac{9}{28} = \frac{6}{35} \times \frac{28}{9} = \frac{3 \times 2 \times 7 \times 4}{7 \times 5 \times 3 \times 3} = \frac{2 \times 4}{5 \times 3} = \frac{8}{15}$.

164. Gdy zaś ułomek dzielnika ma tenże sam mianownik co i ułomek dzielnéy, aby w tym razie mieć iloraz, trzeba tylko zgubić mianownik spólny, i oznaczyć dzielenie licznika ułomku dzielnego przez licznik ułomku dzielnika. Tak $\frac{10}{15} : \frac{11}{15} = \frac{10}{11}$.

Bo widoczną iest rzeczą iż $\frac{10}{15}$ podzielone przez $\frac{11}{15}$ daią koniecznie ten sam wypadek, co $\frac{10}{15}$ zwiększone 15 razy czyli 10 całkowitych, podzielone przez $\frac{11}{15}$ zwiększonych

15 razy, czyli 11 całkowitych. Jakoż $\frac{10}{15} : \frac{11}{15} = \frac{10}{15} \times \frac{15}{11} = \frac{10 \times 15}{15 \times 11} = \frac{10}{11}$.

Można więc dzielenie liczb ułomkowych sprowadzić do dzielenia całkowitych lub dziesiętnych (n° 113), sprowadzając pierwsze do iednakowego mianownika.

165. Dla sprawdzenia działań odbytych z ułomkami, trzeba użyć działań przeciwnych. I tak dodawanie i odeymowanie służą sobie wzaiemnie do sprawdzenia, toż samo iest z mnożeniem i dzieleniem.

166. Może się zdarzyć iż trzeba znaleźć ważność pewnéy części ułomku, np. ważność $\frac{2}{3}$ z $\frac{4}{5}$. To wyrażenie $\frac{2}{3}$ z $\frac{4}{5}$ oznacza iż trzeba wziąć dwa razy trzecią część z $\frac{4}{5}$. Dzielę więc $\frac{4}{5}$ przez 3, i widzimy że iloraz $\frac{4}{15}$ iest trzecią częścią z $\frac{4}{5}$. Mnożę $\frac{4}{15}$ przez 2; a iloczyn $\frac{8}{15}$ iest ważnością $\frac{2}{3}$ z $\frac{4}{5}$.

Podobnież, aby mieć $\frac{3}{4}$ z $\frac{5}{6}$ u z $\frac{2}{3}$; mówię: $\frac{5}{6}$ z $\frac{2}{3} = \frac{10}{18}$, zadanie więc zamieniamy do wzięcia $\frac{3}{4}$ z $\frac{10}{18}$; iest zaś $\frac{3}{4}$ z $\frac{10}{18} = \frac{30}{72}$; więc $\frac{3}{4}$ z $\frac{5}{6}$ u z $\frac{2}{3} = \frac{30}{72} = \frac{5}{12}$.

Zastanawiaiąc się nad postępowaniem któregośmy użyli, spostrzegamy łatwo iż dla znalezienia ważności *ułomka ułomków* (tak się nazywa gatunek liczb o których mowa) trzeba tylko wyznaczyć iloczyn wszystkich tych ułomków rozmnożonych przez siebie, a to się czyni sposobem nader łatwym oznaczaiąc iloczyn wszystkich liczników, i dzieląc go przez iloczyn oznaczony wszystkich mianowników.

Tak $\frac{1}{2}$ z $\frac{2}{3}$ z $\frac{3}{4}$ z $\frac{4}{5}$ zł. $= \frac{1 \times 2 \times 3 \times 4}{2 \times 3 \times 4 \times 5} = \frac{1}{5}$ zł. znosząc czynniki spólne obu wyrazom ułomka. Wychodzi to więc na mnożenie i iest niém właściwie, choć się zdaie być dzieleniem. Bo mnożenie przez ułomek ma za cel wzięcie z mnożnéy części takiéy iaka iest oznaczona przez ułomek; a dzielenie przez ułomek wskazuie nam ile razy tenże zawiera się w dzielnéy, gdybyśmy tam więc użyli dzielenia, wypadłoby wcale co innego. Z mnożenia przez ułomek właściwy wypada i wypadać musi naturalnie mniéy niż wynosi druga liczba do działania wchodząca (1); gdy tym czasem z dzielenia przez tenże ułomek koniecznie musi wypadać więcéy. Tu oraz łatwo poymuiemy że z mnożenia ułomków właściwych przez siebie, iloczyn wypadać musi mniéyszy od każdego z czynników, a z dzielenia iloraz większy od każdéy z dwóch innych liczb do działania wchodzących. I tak $\frac{2}{3}$ ze 100 czynią $66\frac{2}{3}$; kiedy 100 : $\frac{2}{3} = 150$. $\frac{3}{1} \times \frac{1}{5} = \frac{3}{25}$; a $\frac{3}{5} : \frac{1}{8} = \frac{3}{1} = 3$.

(1) Gdy mnożnik iest 1 natenczas wypada na iloczyn mnożna podana (no 55), lecz że ułomek właściwy mniéyszy iest niż 1, więc... i t. d. podobnież o dzieleniu mówić można. porówn. no. 151, i 158.

107. Wypada tu dodać uwagę podobną iak pod (n 61 i 62) iż wyraz *mnożyć* nie zawsze odpowiada wyrazowi i wyobrażeniu *powiększać*, podobnie iak wyraz *zawierać* nie zawsze bywa właściwie użytym w dzieleniu. Jasną iest bowiem rzeczą iż dzielna nie zawiera dzielnika gdy iest mniéysza od niego. Przecież tak się mówić zwykło w dzieleniu, lecz to tylko przez nawyknienie do pospolitego sposobu mówienia który nie zawsze, iak widzimy, z dokładnością iest zgodny.

ZAGADNIENIA.

168. I. Czterech studentów z równą pisząc prędkością zapisali w iednym czasie $\frac{2}{5}$ ryzy papieru, ileż każdy zapisał?

II. Za 79zł. kupiono $4\frac{3}{4}$łok. np. sukna, po czemuż łokieć?

III. Rzemieślnik pewny zrobił $\frac{3}{4}$łok. iakiéy roboty w $\frac{4}{5}$godz., ileż iéy zrobi w godzinę iednakowo zawsze robiąc?

IV. Przez iakąż liczbę trzeba podzielić $3\frac{2}{8}$ ażeby mieć na iloraz $8\frac{1}{4}$?

V. $9\frac{1}{4}$ sąż. pewnego muru kosztuie $327\frac{0}{20}$zł., ileż tu kosztuie sążeń muru?

VI. Jakiż iest iloraz z podzielenia 1) $17\frac{3}{14}$ przez $8\frac{0}{10}$ 2) $\frac{45}{49}$ przez $\frac{15}{9}$?

VII. Czyli to samo iest $\frac{3}{4}$ z $\frac{0}{16}$, co i $\frac{0}{16}$ z $\frac{3}{4}$?

VIII. Znaleźć iloczyn z ułomków $\frac{1 \times 3 \times 3 \times 5 \times 4 \times 8 \times 9 \times 14 \times 16}{2 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 9 \times 20 \times 15 \times 11}$

IX. Pytaią się o liczbę która rozmnożona przez $\frac{2}{3}$ z $\frac{5}{6}$ z 7 daie iloczyn $50\frac{1}{2}$?

ZAGADNIENIA W KTÓRE WCHODZĄ DZIAŁANIA UŁOMKÓW POŁĄCZONE.

169. Nie będzie bez pożytku przytoczyć tu niektóre zagadnienia, które iuż za pomocą poprzedzaiącéy teoryi u-

łomków rozwiązać można, a które przecież mogą się zdawać dosyć zawikłanemi.

I. Znaleźć liczbę która dodana do swéy szóstéy części uczyni 27?

II. Znaleźć liczbę która zmnieyszona o swą czwartą część = 24?

III. Jakaż iest liczba któréy połowa, trzecia część i czwarta czyni 26?

IV. Znaleźć liczbę z któréy odiąwszy iéy $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ i $\frac{1}{6}$; reszta iest 64?

V. Pewnéy sztuki drzewa iest $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ i $\frac{1}{8}$ część całéy długości ukryta np. w wodzie, lecz z wierzchu ukaznie się $7\frac{1}{2}$ stóp, ileż cała sztuka ma długości?

VI. Pewien mówi, iż $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$ i $\frac{5}{6}$ części iego pieniędzy, uczyni 84zł.; ileż ma złotych?

VII. Znaleźć dwie liczby z których większa podzielona przez mniéyszą daie na iloraz $2\frac{1}{2}$; mniéysza zaś rozmnożona przez $1\frac{1}{2}$ daie iloczyn 12?

VIII. Są trzy fontanny z których 1a napełnia pewny wodościek w 6 godzinach, 2ga napełnia tenże wodościek w 2ch godzinach, a 3cia w 3ch; w iakimże czasie napełniony zostanie wodościek gdy woda będzie wychodzić temi trzema razem fontannami?

IX. Sadzawka maiąca 3 kanały wypróżniłaby się 1szym przez $3\frac{1}{2}$ dni, 2gim przez $2\frac{4}{5}$ dni, 3cim przez $4\frac{2}{3}$ dni. Otworzywszy razem te trzy kanały, za ileż się dni wypróżni?

X. Okręt uszkodzony burzą przepuszcza wodę która w 18 godz: może napełnić spód iego. Zaczynaią wylewać wodę dwiema pompami, z których 1a wypróżniłaby część wspomnioną w 36godź. a 2ga w 24ch. Gdy pompować zaczęto, było iuż wody $\frac{3}{8}$ obiętości spodniéy części okrętu. W iakimże czasie taż część będzie wypróżnioną?

Umieiąc działania z ułomkami łatwo iest rozwiązać zawikłańsze zagadnienia niż były podane pod (nº 116; i tak, weźmy zagadnienie położone tam pod liczbą IX i powiedzmy:

XI. Gdyby miano przewieźć 5248cet. o mil 14 wozami czterokonnemi, biorąc na każdy wóz po 16cet. i do każdego wozu potrzebowano 2ch. ludzi, t. i. iednego do samego wozu, drugiego do koni; chcący zaś przewieźć płaci od konia na milę po $\frac{3}{4}$zł., a od wozu na całą drogę po zł. $2\frac{1}{2}$, ludziom także na całą drogę po zł. $1\frac{1}{2}$ tym co przy wozach, a po $1\frac{4}{5}$ tym co przy koniach; ma zaś swoich wozów zaprzężnych 80, prócz tego koni 100, i ludzi 200 z których połowę do wozow a drugą połowę do koni przeznacza; ileż go ieszcze kosztować będzie zamierzone przewiezienie na które wyznaczone iest 1560tal?

XII. Weźmy ieszcze przykład z pod nº 116 liczby X. Jest do umundurowania 5éć kompaniy po 180 ludzi. Każdy 20ty człowiek iest sierżant. Na każdego trzeba $3\frac{1}{2}$łok. sukna, lecz dla prostych żołnierzy łokieć sukna po zł. $8\frac{2}{3}$, a dla sierżantów po zł. $10\frac{3}{4}$; toż po $4\frac{3}{4}$łok. płótna, dla prostych żołnierzy na $1\frac{1}{10}$zł. łokieć, a dla sierżantów na $1\frac{3}{5}$zł. łokieć. Do każdego munduru sierżanta trzeba $1\frac{1}{2}$łok. galonku po zł. $3\frac{1}{6}$. Do każdych trzech mundurów 4 tuziny guzików po zł. $1\frac{1}{4}$ tuzin. Jest zaś w magazynie gotowych iuż mundurów 250 dla prostych żołnierzy, a 25 dla sierżantów; tudzież 468łok. sukna na mundury dla pierwszych, a $14\frac{1}{2}$łok. dla drugich; 986łok. płótna dla pierwszych, a 60łok. dla drugich. Krawcowi od roboty munduru, dla prostego żołnierza płaci się $4\frac{2}{5}$zł. a dla Sierżanta $4\frac{1}{6}$zł. Na takowe umundurowanie iest w kassie, 24000zł. Ileż z tego funduszu zostanie lub ile zabraknie?

O UŁOMKACH CIĄGŁYCH.

170. Nazywamy *ułomkiem ciągłym* wyrażenie złożone z liczby bądź skończonéy bądź nieskończonéy ułomków szczególnych, z których każdy ma za licznik iedność a za mianownik liczbę całkowitą połączoną z podobnymże ułomkiem. Takiém iest wyrażenie.

$$\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{5}}}}}}$$

171. Ułomki ciągłe służą do wystawienia sposobem przybliżaiącym i nie wielu liczbami, ważności ułomków nie

daiących się w wyrażeniu zmnieyszyć, a wielkiemi liczbami wyrażonych (1).

172. Załóżmy sobie wyrazić tym sposobem ważność ułomku $\frac{100009}{314159}$. Dzieląc oba wyrazy tego ułomku przez licznik 100000, znaydziemy $\frac{1}{3+\frac{14159}{100000}}$

Podzielmy oba wyrazy części ułomkowéy w mianowniku będącéy przez licznik 14159, a ta część zamieni się na $\frac{1}{7+\frac{887}{14159}}$

Podzielmy znowu oba wyrazy ułomku będącego przy 7 przez licznik 887, a część ta ułomkowa staie się $\frac{1}{15+\frac{854}{887}}$

Podzielmy ieszcze oba wyrazy ułomka będącego przy 15 przez licznik 854, część ułomkowa zamienia się na $\frac{1}{1+\frac{33}{854}}$

Przez wszystkie te działania, ułomek $\frac{100000}{314159}$ wyrażony będzie przez ułomek ciągły $\frac{1}{3+\frac{1}{7+\frac{1}{15+\frac{1}{1+}}}}$

i t. d.

Widzimy iż biorąc pierwszy wyraz 3, pomiiaiąc ułomek przy nim będący, będzie $\frac{1}{3}$ pierwszą ważnością zbliżoną do $\frac{100000}{314159}$, lecz nieco za wielką.

Jeżeli weźmiemy dwa pierwsze wyrazy ułomku ciągłego pomiiaiąc ułomek będący przy 7, będzie $\frac{1}{3+\frac{1}{7}}=\frac{1}{\frac{22}{7}}=\frac{7}{22}$, ważność więcéy zbliżona do $\frac{100000}{314159}$, lecz nieco za mała.

(1) Ułomki szczególne które wchodzą w wyrażenie ciągłe o którém mówimy możnaby nazwać ułomkami całkuiącemi (*fractions integrantes*), za ich bowiem pomocą możemy napowrót otrzymać ułomek podany.

Weźmy trzy pierwsze wyrazy ułomku ciągłego pomiiaiąc ułomek będący przy 15, będzie $\frac{1}{3+\frac{1}{7+\frac{1}{15}}}=\frac{1}{3+\frac{1}{\frac{106}{15}}}=\frac{1}{3+\frac{15}{106}}=\frac{1}{\frac{333}{106}}=\frac{106}{333}$, ważność ieszcze więcéy zbliżona do $\frac{100000}{314159}$, lecz nieco za wielka.

Nakoniec, weźmy cztery pierwsze wyrazy ułomku ciągłego, pomiiaiąc ułomek będący przy 1, będzie

$$\frac{1}{3+\frac{1}{7+\frac{1}{15+\frac{1}{1}}}}=\frac{1}{3+\frac{1}{7+\frac{1}{16}}}=\frac{1}{3+\frac{1}{\frac{113}{16}}}=\frac{1}{3+\frac{16}{113}}=\frac{1}{\frac{355}{113}}=\frac{113}{355},$$

ważność ieszcze więcéy zbliżona do $\frac{100000}{314159}$ lecz nieco za mała (1).

Nie przestaiąc działać podobnie, znaydziemy nowe ważności na przemiany większe i mnieysze niż $\frac{100000}{314159}$, lecz zawsze coraz bliższe; tak dalece, iż za wzięciem na ostatku wszystkich wyrazów ułomka ciągłego (iak w tym przykładzie ośmiu wyrazów, bo w nim ósmy byłby iuż ostatni), prawdziwą ważność iego otrzymujemy.

173. Widzimy iż aby rozwinąć dany ułomek zwyczayny na ułomek ciągły, trzeba: *podzielić oba wyrazy ułomku danego przez iego licznik; skoro dzielenie to odbywa się bez reszty, t. i. skoro licznik ułomku iest*

(1) Przyczyna nierówności tych ułomków na przemiany większych i mnieyszych od ważności ułomku podanego łatwa iest do poięcia. Wynika ona z natury ułomków zwyczaynych z ułomkami ciągłemi skombinowanych. Tak w ułomku $\frac{1}{3}$ pomiiaiąc ułomek $\frac{1}{7}$ przy mianowniku 3, będący, robimy ten mianownik mnieyszym niż być powinien, a zatém wartość ułomku iest większa niż być powinna (no 126). W wyrażeniu $\frac{1}{3+\frac{1}{15}}$ pomiiaiąc ułomek $\frac{1}{15}$ zwiększyliśmy wartość ułomku $\frac{1}{7}$ a tém $\frac{1}{7}$ samém powiększyliśmy mianownik 3, przez co wartość ułomku $\frac{1}{3}$ iest mnieysza niż być powinna i t. d. o innych. Widocznie o tém przekonać się można zamieniaiąc znalezione ważności na wyrażenia dziesiętne.

spólnym dzielnikiem obu iego wyrazów, ułomek będzie przywiedziony do nayprostszego wyrażenia i działanie iuż skończone. Jeżeli iest reszta, uważaymy ią za licznik nowego ułomku łączącego się z pierwszym ilorazem znalezionym, który to licznik będzie miał za mianownik licznik ułomku danego. Działay podobnie nad tym nowym ułomkiem, i nad ułomkami powstaiącemi w ciągu działania dopóki nie doydziesz do ostatniego ułomku maiącego za licznik iedność, a za mianownik liczbę pierwotną; i natenczas działanie będzie skończone.

174. Można tu spostrzedz *analogią* czyli podobieństwo zachodzące między tém działaniem a sposobem szukania naywiększego dzielnika spólnego dwóch liczb danych. Nayprostsza zaś do tego droga iest: dzielić mianownik przez licznik iak się powiedziało pod n° 136; ilorazy ztąd wypadłe podług porządku, będą mianownikami ciągu ułomków poiedynczych iedność za liczniki maiących, a których zbiór formuie ułomek ciągły równy ułomkowi danemu.

Tym sposobem postępuiąc ułomek $\frac{535}{689}$ daie mieysce dzieleniu następuiącemu

689	535	134	73	8	1
	1	3	2	9	8

Ułomek więc ten daie się rozwinąć na ułomek ciągły

$$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{9+\cfrac{1}{8}}}}}$$

a biorąc wyraz iego pierwszy, toż następnie dwa, trzy, cztery i pięć, będziemy mieli ważności 1; $\frac{3}{4}$, $\frac{7}{9}$, $\frac{66}{85}$, i $\frac{535}{689}$.

ZAGADNIENIA.

175. I. Znaleźć za pomocą ułomków ciągłych wyrażenia prostsze 1) $\frac{531}{1278}$? 2) $\frac{1103}{887}$?

II. Wiedząc iż Europa zawiera 171397 mil kwadratowych, a Azya 640086 mil kwadratowych, oznaczyć iaką iest częścią obszerność Europy względem obszerności Azyi (1)?

III. Wiedząc iż w prowincyi liczącéy 654886 dusz, powiększyła się ludność przez dopiero skończone 10 lat o 51372; iakąż iest częścią to powiększenie względem dawnéy ludności?

IV. Znaleźć ułomek z którego powstał ułomek ciągły 1) $1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2}}}}}}}$ 2) $1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1}}}}}}}$ 3) $2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1}}}}}}}$ i t. d. $1+\cfrac{1}{1}$ (2)

O ZAMIANIE UŁOMKÓW ZWYCZAYNYCH NA DZIESIĘTNE I PRZECIWNIE; TUDZIEŻ O UŁOMKACH PERYJODYCZNYCH.

176. Porównywaiąc rachunek ułomków zwyczaynych z rachunkiem dziesiętnych, spostrzegamy że ostatni daleko iest prostszym i krótszym, a zatém że iest korzystniéy używać go zamiast rachunku rzeczonych ułomków. Idzie tu tylko o zamianę na dziesiętne wyrażeń ułomkowych nad któremi działać wypada.

Zamiana ta iest nader łatwa pamiętaiąc na to co się pod n° 113 powiedziało. I tak: daymy iż mam zamienić ułomek $\frac{3}{4}$ na dziesiętne. Przypisuię o do licznika, co mi daię 30, dzielę przez 4 licznik 30, większy dziesięć razy niż 3. Iloraz iest 7 i zostaie 2. Spostrzegam łatwo iż iloraz 7 iest dziesięć razy za wielki; więc powinienem go dziesięć razy zmniéyszyć, co zrobię pisząc go po przecinku w ten sposób 0,7.

(1) Zagadnienie to powinnoby właściwie tak być wysłowione: oznaczyć zbliżony *stósunek* obszerności Europy do obszerności Azyi; lecz znaczenie wyrazu *stósunek* niżéy dopiero poznamy dokładnie.

(2) Okaznie się tu że i ułomek ciągły może być peryiodycznym (*Ob. na końcu przypisy*).

Teraz przypisuię 0 do 2, co zwiększa ieszcze dziesięć razy tę resztę pochodzącą z liczby iuż dziesięć razy zwiększoney. Dzielę 20 przez 4, iloraz iest 5 bez reszty. Piszę go po prawéy stronie 7 aby go przywieśdź do prawdziwéy iego ważności, i wnoszę iż ułomek $\frac{3}{4}$ iest zupełnie równy 0,75.

Znayduię przez podobne postępowanie iż $\frac{4}{5}$łok. łok. zamieniaią się na 0,8 bez reszty, i że $\frac{1}{2}$zł. zł. =0,5.

177. W ogólności można zamienić na ułomek dziesiętny skończony, ułomek iakikolwiek zwyczayny, gdy mianownik tego ułomku przywiedziony do nayprostszego wyrażenia, dzieli dokładnie licznik rozmnożony przez 10 lub 100, lub 1000, i t. d. Że zaś 10 nie ma innych dzielników dokładnych iak 2 i 5, zatém i liczby wielokrotne z 10 nie mogą być podzielone dokładnie, tylko przez 2 i przez 5, albo przez iloczyny których obie liczby 5 i 2 są wyłącznie czynnikami: więc ułomek nie da się zamienić dokładnie na dziesiętne, gdy mianownik będzie miał między swemi czynnikami insze liczby niż 2 i 5, albo niż iloczyny których 2 i 5 wzięte razem lub oddzielnie, będą wyłącznie czynnikami.

Tak ułomek $\frac{7}{15}$ nie może nigdy być zamieniony dokładnie na dziesiętne, z przyczyny 3 które iest iednym z czynników 15.

Lecz chociaż mieć nie można dokładnéy ważności tego gatunku ułomków, można się do niéy zbliżać coraz bardziéy, posuwaiąc dzielenie coraz daléy. Naprzykład, znaydziemy, iż zatrzymuiąc się przy trzech dziesiętnych, $\frac{2}{3}$ = 0,666 mniéy iak o iednę tysiączną, i że posuwaiąc dzielenie aż do piątéy dziesiętnéy $\frac{2}{3}$=0,66666 mniéy niż o iednę setną tysiączną zbliżone do prawdziwéy wartości.

Znaydę podobném postępowaniem, iż $\frac{5}{11}$ = 0,4545 mniéy niż o iednę dziesięciotysiączną zbliżone.

Posuwaiąc daléy zamianę ułomku $\frac{2}{3}$ na dziesiętne, mielibyśmy zawsze tęż samę cyfrę 6 powtórzoną bez końca; a posuwaiąc zamianę ułomku $\frac{5}{11}$, liczba 45 wracałaby się ustawicznie. Widzimy więc iż niemożność zamienienia ściśle iakiego ułomku na dziesiętne, oznaymia się przez powrót ustawiczny téy samey cyfry, lub przez powrót peryiodyczny

tychże samych cyfer. Ułomek dziesiętny w tym razie nazywaią *nieskończony*.

178. Lubo w podobnym razie nie można poznać liczby cyfer peryiodu, iednak granice iéy można naznaczyć, gdyż liczba ta nie może przewyższać mianownika zmniéyszonego iednością. Reszty bowiem z dzielenia liczby iednéy przez drugą, muszą być liczbami mniéyszemi niż dzielnik. Zamieniaiąc np. $\frac{5}{7}$ na dziesiętne.

50 | 7
10 | 0,714285
30
20
60
40
50

postrzegam iż ostatnia reszta daie tęż samę dzielną od któréy zacząłem, zatém z dzieleń następnych otrzymam też same cyfry w ilorazie. Powrót zaś tych cyfer nie może być późniéy iak za siódmém dzieleniem. Bo reszty liczb dzielnych przez 7 mogą być tylko następuiące, 1, 2, 3, 4, 5, 6, a nigdy 7, która iest dzielnikiem. Gdyby zaś która z tych okazała się powtórnie ieszcze pierwéy, otrzymalibyśmy w ilorazie też same cyfry lecz pierwéy niż na mieyscu oznaczoném przez mianownik.

Powrót więc następny tychże samych cyfer w ilorazie nie może w danym przykładzie późniéy się okazać, iak na siódmém mieyscu oznaczoném przez mianownik ułomku.

179. W ułomkach więc dziesiętnych nieskończonych znayduie się koniecznie iedna lub więcéy cyfer które się stale powtarzaią i które formuią tak nazwany *peryiod* ułomku. Same zaś wtedy ułomki zowią się z tego względu *peryiodyczne*.

Rozumie się samo przez się, że ułomek zwyczayny dany do zamienienia na dziesiętny, powinien być przywiedziony do nayprostszego wyrażenia.

180. Umieiąc zamieniać ułomki zwyczayne na dziesiętne, obaczmy czy z dziesiętnych nie można się wrócić do ułomków zwyczaynych.

Widzimy naprzód iż są ułomki dziesiętne, iak 0.7, 0.07, 0.007, i t. d. lub iak 0.3, 0.03, 0.003, i t d. które

iuż nie mogą mieć mniéyszego mianownika, gdyż obadwa ich wyrazy nie maią żadnego dzielnika spólnego. Te ułomki więc nie mogą stracić piętna ułomków dziesiętnych, tylko staiąc się w wyrażeniu mniéy prostemi. Trzeba więc natenczas przestać na napisaniu ich sposobem innych ułomków.

Tak $0,7=\frac{7}{10}$; $0,03=\frac{3}{100}$ i t. d.

181. Lecz gdy dwa wyrazy ułomku dziesiętnego skończonego maią iakikolwiek dzielnik spólny, spostrzegamy zaraz iż ie można przywieśdź do mniéyszego mianownika, i tém samém odiąć im kształt dziesiętny.

Wtenczas napisawszy ułomek dziesiętny sposobem ułomków zwyczaynych (co zawsze ma miéysce daiąc częściom dziesiętnym za mianownik liczbę oznaczoną ich nazwiskiem), podzielimy oba wyrazy przez ich naywiększy dzielnik spólny, a otrzymany ułomek zwyczayny będzie nayprostszym wyrażeniem ułomku podanego.

Tak $0,04=\frac{4}{100}=\frac{1}{25}$; $0,75=\frac{75}{100}=\frac{3}{4}$, i t. d.

182. Co do ułomków dziesiętnych peryiodycznych, gdy te są tylko ułomkami zwyczaynemi które nie mogą być dokładnie wyrażonemi przez dziesiętne, łatwo postrzegamy iż będą zawsze zdolne przyiąć kształt ułomków zwyczaynych który iest ich prawdziwym kształtem.

Zastanówmy się naprzód nad temi, których peryiod zaczyna się od piérwszéy zaraz cyfry. Daymy np. iż żądaią zamienić na ułomek zwyczayny, ułomek dziesiętny peryiodyczny 0,3333..... pomnożywszy ten ułomek przez 10 będzie 3,3333..... (1), gdy od téy liczby odeymiemy ułomek dany:

$$\begin{array}{r} 3,3333\ldots \\ 0,3333\ldots \\ \hline 3,0000\ldots \end{array}$$

zostaie 3 całkowite, liczba dziewięć razy większa niż ułomek dany. Nakoniec podzieliwszy tę liczbę przez 9 będzie $\frac{3}{9}$ ułomek równy ułomkowi danemu: tak iż $0,3333\ldots=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$.

(1) Nie można się tu dziwić widząc w tym ułomku dziesiętnym ieszcze cztery cyfry pomimo posunienia przecinka o iedno miéysce ku prawéy ręce, w ułomku bowiem nieskończonym można przypuścić tyle cyfer ile się podoba.

Tym sposobem postąpimy ile razy peryiod składać się będzie z iednéy cyfry, t. i. w tym razie dosyć iest wziąć peryiod i podzielić go przez 9.

Tak $0,6666\ldots=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$; $5,5555\ldots=\frac{5}{9}$, i t. d.

Gdyby peryiód był o dwóch cyfrach, natenczas aby go przeprowadzić na całkowite, trzeba rozmnożyć ułomek dany przez 100, a odiąwszy od pomnożonego sam ułomek dany, okaże się całkowitość oznaczona przez peryiod 99razy większa od tegoż ułomka: podzieliwszy ią więc przez 99 otrzymamy ważność szukaną.

Tak ułomek $0,181818\ldots$ rozmnożony przez 100 daie, $18,181818\ldots$; odiąwszy ułomek, zostaie 18, a podzieliwszy przez 99 znayduie się $\frac{18}{99}=\frac{2}{11}=0,181818\ldots$

Podobnież $0,272727\ldots$ daie naprzód $27,272727\ldots$ daléy 27, daléy $\frac{27}{99}=\frac{3}{11}=0,272727\ldots$; $0,090909\ldots$ daie naprzód $9,090909\ldots$; potém 9, potém $\frac{9}{99}=\frac{1}{11}=0,090909$ i t. d.

W tym razie więc dosyć iest wziąć peryiód i podzielić go przez 99.

Gdyby peryiód był o trzech cyfrach, potrzebaby pomnożyć ułomek przez 1000, odiąć samże ułomek i podzielić całkowite przez 999; czyli prosto, wziąć peryiód i podzielić go przez 999 i tak daléy.

183. W ogólności, aby na ułomek zwyczayny zamienić ułomek dziesiętny bezpośrednio peryiodyczny, trzeba podzielić iego peryiód przez liczbę wyrażoną przez tyle cyfer 9 obok siebie położonych, ile iest cyfer w peryiodzie.

184. Roztrząśniymy teraz przypadek w którymby się znaydowała iedna lub więcéy cyfer przed peryiodem.

Jasną iest rzeczą iż mnożąc natenczas ułomek przez 10, 100, 1000, i t. d. lub co na iedno wychodzi, posuwaiąc przecinek o iedno dwa, trzy i t. d. miejsca ku prawéy ręce, można przeprowadzić do rzędu całkowitych wszystkie cyfry któreby były przed peryiodem.

To uczyniwszy, wypadek będzie złożony z dwóch części, t. i. z całkowitéy i z ułomka dziesiętnego bezpośrednie peryiodycznego; lecz każda z tych części będzie tyle razy za wielka, ile było iedności w liczbie przez którą pomnożyliśmy dany ułomek. Podzieliwszy więc ważność każdéy z tych części przez liczbę która mnożyła i dodaiąc wypadki, otrzymamy ułomek szukany.

Gdyby podano np. ułomek 0, 1666...., pomnożyłbym go przez 10, i miałbym 1,666...=1+0,666...; szukaiąc natenczas ważności 0,666.. która iest $\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$, otrzymałbym $1+0,666...=1\frac{2}{3}=\frac{5}{3}$; lecz ważność ta iest 10 razy za wielka, bo iest ważnością ułomku podanego 0,1666.... rozmnożonego przez 10, podzielimy ią więc przez 10, i otrzymamy: $0,1666... =\frac{5}{3}:10=\frac{5}{30}=\frac{1}{6}$.

Gdyby podano 0, 08333:.. rozmnożywszy przez 100 będzie 8, 333...$=8\frac{3}{9}=8\frac{1}{3}=\frac{25}{3}$; podzieliwszy przez 100 będie $\frac{25}{300}=\frac{1}{12}=0,08333....$

185. Więc, aby zamienić na ułomek zwyczayny, ułomek dziesiętny peryiodyczny którego peryiód nie zaczyna się od pierwszéy cyfry, trzeba 1e zamienić peryiód na ułomek zwyczayny podług zasady poprzedzaiącéy iak gdyby się zaraz ten peryiód zaczynał; 2e dodać ułomek zamieniony do cyfer ktore będą przed peryiodem, iako wyrażaiące całkowite; 3e sprowadzić całkowite do mianownika ułomku, aby otrzymać ze wszystkiego iednę tylko liczbę ułomkową; 4e podzielić tę liczbę ułomkową przez 1 z tylu zerami ile będzie cyfer przed peryiodem ułomku danego; 5e nakoniec przywieśdź nowy ułomek do naymnieyszych wyrazów.

Tak 0,04:666... daie 1e $\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$; 2e $41\frac{2}{3}$; 3e $\frac{125}{3}$; 4e $\frac{125}{3000}$; 5e $\frac{1}{24}=0,041666$.

Podobnież 0, 0208333.... daie naprzód $\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$, potém $208\frac{1}{3}$, potém $\frac{625}{3}$, potém $\frac{625}{30000}$, nakoniec $\frac{1}{48}=0,0208333..$; 0, 0185185... daie naprzód $\frac{185}{999}=\frac{5}{27}$ daléy $\frac{5}{27}$, i daléy $\frac{5}{27}$, potém $\frac{5}{270}$, nakoniec $\frac{1}{54}=0,0185185...$ i t. d.

186. Gdy peryiod nie zaraz się zaczyna, lub iest długi, np. 0,92857142857... natenczas chcąc mieć ważność iego w ułomku zwyczaynym, dosyć iest wziąć sześć pierwszych cyfer dziesiętnych i dawszy im za mianownik tyleż razy napisaną liczbę 9, szukać za pomocą ułomków ciągłych nayprostszego wyrażenia.

I tak $\frac{928571}{999999}$ będzie równy $\frac{1}{1+\frac{1}{13}}=\frac{1}{\frac{14}{13}}=\frac{13}{14}$; z ułomku 0,4705882352941176 4705882... wziąwszy $\frac{4705882}{9999999}$ będzie $\frac{1}{2+\frac{1}{8}}=\frac{1}{\frac{17}{8}}=\frac{8}{17}$

187. Chcąc mieć ważność zbliżoną ułomku którego nie można zamienić dokładnie na dziesiętne, i gdy nie ma potrzeby ścisłéy dokładności, przestaiemy na wzięciu dwóch lub trzech cyfer dziesiętnych opuszczaiąc inne (n° 113). Tak, aby mieć przez zbliżenie ważność $\frac{5}{12}$, wziąłbym trzy pierwsze cyfry z 0,416666... Lecz gdy opuszczenie cyfer pomienionych ściąga błąd mały, ważną iest rzeczą umieć rozróżniać przypadki w których błąd ten można uczynić mnieyszym. W opuszczaniu zaś cyfer iakiego wyrażenia dziesiętnego zdarzyć się może iż w cyfrach zaniechanych pierwsza po lewéy ręce będzie większa niż 5, albo równa 5, albo nakoniec mnieysza niż 5.

W pierwszym przypadku, doday iedność do ostatniéy cyfry po prawéy stronie części zachowanéy, a błąd będzie mnieyszym. Tak 0,417 lub 0,417000 zbliża się więcéy do 0, 416666...., niż 0, 416 lub 0, 416000.

W drugim przypadku można ieszcze przydać iedność. Tak opuszczaiąc trzy cyfry 527 z liczby 0,78527, wezmę 0,79 za ważność zbliżoną téyże liczby. Albowiem 0, 79, różni się od 0,78527 nieco mniéy przez nadmiar, to iest przewyższaiąc, niż się różni od niéy 0,78 przez brak, to iest nie dochodząc. Lecz widzimy iż gdyby ostatnia cyfra była 5 i tę chciano opuścić, np. z liczby 0,785; błąd byłby iednakowy, czyliby napisano 0, 78 czyli 0, 79.

Nakoniec w trzecim przypadku, nie trzeba dodawać iedności. Bo ieżeli w wyrażeniu 0,16249 zaniedbuię trzech cyfer 249, ilość 0,16 zbliża się więcéy ważnością do 0, 16249 niż 0,17 (1).

ZAGADNIENIA.

188. I. Zamienić na dziesiętne ułomek $\frac{8}{13}$, toż $\frac{13}{21}$?

II. Jakiż iest ułomek zwyczayny który zamieniono na 0, 15625?

III. Jakiemu ułomkowi odpowiada 0, 565656...?

IV. Jakie ułomki odpowiadaią dziesiętnym 0, 19444.., tudzież 0, 61111....?

(1) Łatwo tu iest uczynić widocznemi prawdy dopiero wymienione okazuiąc różnicę między liczbami o których mowa.

V. Jakiż iest ułomek który zamieniono na 0, 307692 307....?

VI. Pytaią się o ułomek którego ważność oznacza 0, 78947368421...?

O DZIAŁANIACH GŁÓWNYCH Z LICZBAMI WIELORAKIEMI CZYLI RÓŻNOGATUNKOWEMI.

189. *Liczba wieloraka* (numerus complexus) iestto liczba złożona z rozmaitych iedności które są częściami iedneyże iedności główney. Tak 6 sążni, 4 stopy, 5 cali, iest liczbą wieloraką w którey sążeń iest iednością główną. Stopa która się zawiera 6 razy w sążniu, i cal który się zawiera 12 razy w stopie, nazywaią się *iednościami posiłkowemi* (unitates secundariæ).

190. Nie wszystkie iedności główne iednakowo poddzielamy. Poddziały miar długości np. sążnia są inne od poddziałów miar wagi np. funta, a te, inne od poddziałów miar monet, miar czasu, i t. d. Dla tego dobrze iest obeznać się z położoną na początku téy xiążki małą tablicą liczb wielorakich, których użycie iest u nas nayczęstsze.

Kładziemy tu iednak niektóre ieszcze potrzebne wtéymierze wiadomości.

Długość wynosząca pół ósma łokcia czyli 15 stóp, nazywa się *prętem*, a 10 prętów rachuią na 1 *sznur* miernicży.

Na *milę* polską rachowano dawniéy 12500łok. podług teraźnieyszego zaś urządzenia miar zawierać ona powinna $14816\frac{147}{288}$ łokci nowych.

Morgiem nazywaią powierzchnią maiącą 3 sznury miernicze wzdłuż a 1 wszerz. 30 morgów idzie na *włókę*, a tych 3 na *łan*, lubo i włókę nazywaią także łanem.

Miar tych używaią do do mierzenia roli, łąk, lasu, i t. p.

Wielkie przestrzenie ziemi tudzież wody mierzą się przez *mile kwadratowe*.

Korzec iest miara do mierzenia rzeczy sypnych, dzieli się na 4 *ćwierci*, z których każda ma garcy 8. *Garniec* zaś miara używana do ciał ciekłych dzieli się na 4 *kwarty*, a ta na 4 *kwaterki*. Podług nowego urządzenia miar, kwarta polska = zupełnie 1 litrowi nowéy miary francuzkiéy.

Na *Beczkę* warszawskiéy miary rachowano dawniéy 72 garcy. *Półbeczek* więc miał garcy 36, a ćwierć beczki czyli *antał* 18 garcy.

Beczka pospolita miała garcy 27; teraz zawierać powinna garcy nowych 25.

Na *łaszt* rachowano korcy 27. Lecz skoro łaszt u nas ma odpowiadać łasztowi gdańskiemu na który idzie 60kor: kor: pol: gdańskich, tedy zawierać powinien 22,799; gdyby zaś łaszt polski miał być równy berlińskiemu na który rachuie się 72 kor: pol: kor: ber: natenczas musiałby zawierać 30, 785 (1).

Jednością zasadową monety polskiéy iest *złoty polski*. Sztuki większe srebrne bite, są: *dwuzłotowe* i *pięciozłotowe* mnieysze zaś *dziesięciogroszowe* i *pięciogroszowe*. Złoto biią w sztukach po 25zł. i po 5ozł.

Co do podziału czasu; *rok astronomiczny* składa się z 365 dni, 5 godz: 48′ i 49″; *rok* zaś *pospolity* z 365 dni i godzin 5. Zamyka on 12 miesięcy, z których iedne maią po 30 drugie po 31 dni, wyiąwszy miesiąc nazwany *Luty* który ma zwykle dni 28. Tydzień składa się z dni 7. Rok więc ma tygodni 52 i dzień 1 a czasem 2. Co 4 lata bowiem iest rok zwany *przestępny* i ten ma dni 366 (2); a to dla zrównania początku roku pospolitego z początkiem roku astronomicznego. W roku przestępnym miesiąc Luty ma dni 29.

Dzień pospolity rachuie się od północy do północy.

(1) Obacz przy końcu tablice metrologiczne.

(2) Wyimuią się od tego lata kończące wieki, z których tylko 4ty iest przestępnym tak, iż w przeciągu 400 lat, iest tylko 97 przestępnych. Aby zaś poznać czyli podany rok iest przestępnym, dosyć iest daną liczbę lat dzielić przez 4: ieżeli dzielenie uskutecznia się bez reszty, tedy rok iest przestępnym; ieżeli zaś zostaie reszta, okazuie ona ile lat od ostatniego roku przestępnego upłynęło.

Rzeczy które się rachować zwykły na sztuki, rachuią także na tuziny, kopy i t. d. *Tuzin* iest sztuk 12, *mendel* 15, *kopa* 60.

Wielki tuzin, czyli tuzin tuzinów zawiera sztuk 144.

Papier rachować się zwykł na bele, ryzy, i t. d. *Bela* = 10 ryz, *ryza* = 20 liber, *libra* papieru do pisania zamyka arkuszy 24, papieru do druku, arkuszy 25.

O DODAWANIU LICZB WIELORAKICH.

191. Dla odbycia tego działania *piszą się liczby dane iedne pod drugiemi tak, ażeby wszystkie iedności tegoż samego gatunku były w iedneyże kolumnie; a podkreśliwszy wszystko, zaczyna się dodawanie do iedności gatunku nayniższego. Jeżeli summa ich nie składa iedności gatunku bezpośrednie wyższego, piszę ią pod iednościami iey gatunku; ieżeli zaś zawiera w sobie tyle części iż można z nich złożyć iednę lub więcey iedności gatunku nayblizey wyższego, natenczas piszę pod tą kolumną tylko nadmiar tych iedności posiłkowych nad iedność lub liczbę iedności wyższego gatunku, które zatrzymuię dla dodania ich do właściwey kolumny, z którą postępuię tymże samym sposobem.*

Naprzykład, ażeby dodać liczby wielorakie: 237zł. 12gr. 2sz. 28zł. 5gr. 1sz. i 314zł. 19gr. 2sz. piszę te liczby iedne pod drugiemi tak, aby iedności iednakowego gatunku były w iedneyże kolumnie:

237zł.	12gr.	2sz.
28	5	1
314	19	2
580zł.	7gr.	2sz.

Biorę summę tych trzech liczb zaczynaiąc od kolumny szelągów: dodaię ią razem i mam szelągów 5, a że grosz zawiera w sobie szelągów 3, summa więc szelągów 5 czyni grosz 1 i szelągów 2; piszę 2 szelągi pod kolumną szelągów a zatrzymuię grosz 1 dla dodania go do kolumny groszy.

Postępuiąc do kolumny groszy dodaię ią i mam razem z groszem 1 zatrzymanym z szelągów, 37 groszy; lecz że 37 gr. czynią złoty 1 i groszy 7; piszę 7 gr. pod kolumną

groszy, a przenoszę złoty 1 do kolumny złotych których summa znayduie się iak widzieliśmy w liczbach złożonych.

Podobnym sposobem działaiąc znaydziemy, iż suma 39sąż. 4st. 6c. 8l. 1mmt. i 28sąż. 5st. 11c. 10l. 1mmt. iest 68sąż. 2st. 6c. 7l. 0mmt.

192. W dodawaniu liczb wielorakich czas oznaczaiących zachodzić mogą okoliczności na które wzgląd mieć wypada.

Np. Osoba A. urodziła się d. 5 Lutego 1742 r. a przeżywszy 53 lat, 4 miesiące, 9 dni, umarła: kiedyż to nastąpiło?

Uważam iż r. 1742 nie był ieszcze skończony, lecz 1741 i miesiąc 1 to iest Styczeń, i ieszcze dni 4, ponieważ 5ty dzień drugiego w roku miesiąca Lutego nie był ieszcze skończony kiedy pisano 5go Lutego.

Oznaczywszy więc czas urodzenia przez 1741 r. 1 miesiąc i 4 dni; gdyż tyle lat, i t. d. upłynęło do 5go Lutego 1742 r. od Narodzenia Chrystusa Pana, to iest od czasu od którego lata rachuiemy,

napiszę:	1741lat.	1m.	4dni
	53	4	9
będzie	1794	5	13

Do dnia więc śmierci upłynęło od wspomnioney epoki 1794 lat. 5m. 13dni. Ostatni dzień oznacza tu 14ty dzień 6go miesiąca po 1794 roku, to iest 14ty Czerwca 1793 r.

ZAGADNIENIA.

193. I. 154sąż. 3st. 7c. $9\frac{11}{2}$l.; 23sąż. 2st. 8c. $11\frac{11}{3}$l. 132sąż. 5st. 10c. $3\frac{5}{6}$l. osąż. 2st. 7c. 1l. ileż uczynią długości?

II. Ileż ważą razem 15grzyw. 3unc. 6dr. 42grany; 217grz. 7unc. 7dr. 60gr., 418grz. 6unc. 5dr. 17gr., 4grz. 5unc. 6dr. 10gr.?

III. Dodawszy 2dni 10god. 42min. 54″, 5d. 9godz. 17′ 19″, i 0d. 21god. 3′ 48″; iakaż będzie summa?

IV. Pewien włożył w szkatułkę raz 8zł. 12gr. 2gi raz 6# 4zł. 20gr., 3ci raz 2tal. 1zł., naostatek przyłożył 7# 2tal. 2zł. i 4gr.; chce wiedzieć ile ma razem?

V. Osoba B. Urodziła się 16 Września 1765 r. Osoba A iest 7 lat, 5 miesięcy, 23 dni młodsza; kiedyż się urodziła?

O ODEYMOWANIU LICZB WIELORAKICH.

194. Chcąc odiąć liczbę wieloraką od inney; *piszę liczbę mnieyszą pod większą tak, aby iedności tegoż samego gatunku były w iedneyże kolumnie, i podkreśliwszy ie zaczynam odeymowanie od iedności gatunku nayniższego. Jeżeli liczba niższa może być odiętą od liczby wyższey, napiszę resztę pod liniyką. Jeżeli zaś nie może być od niey odiętą, natenczas aby uskutecznić odeymowanie przydaię w myśli do liczby, od którey odeymować nie można, iedność gatunku bezpośrednie wyższego zamieniwszy ią na gatunek o który idzie. Napiszę teraz pod liniyką różnicę między liczbą wyższą tak zwiększoną i liczbą niższą odpowiadaiącą, a dla zagrodzenia zwiększę iednością liczbę niższą następuiącego bezpośrednie po lewey ręce gatunku.*

Na przykład, ażeby odiąć liczbę wieloraką 289zł. 19gr. 11den. od 332zł. 2gr. 9den. (1), piszę mnieyszą liczbę pod większą w ten sposób, aby iedności tegoż samego gatunku były w iedneyże kolumnie, i odeymuię wszystkie części liczby niższey od wszystkich części odpowiadaiących liczby wyższey zaczynaiąc od iedności nayniższego rzędu.

332zł.	2gr.	9den.
289	19	11
42zł.	12gr.	16den.

Nie mogąc odiąć 11de od 9ds, przydaię w myśli ieden grosz który ma 18de do 9de, co czyni 27de od których odiąwszy 11 zostaie 16de; zwiększywszy teraz iednością 19gr. liczbę następuiącą bezpośrednie po lewey ręce, mówię: 20gr. od 2gr. nie można; przydaię 1 złoty który ma 30gr. do 2gr. co czyni 32gr. i mówię: 20 od 32 zostaie 12. Naostatek zwiększywszy iednością 289zł. odeymuię 290 od 332 iak zwyczaynie i mam 42zł. Tak tedy różnica szukana iest 42zł. 12gr. 16de.

Znaydziemy podobnym sposobem iż różnica między 32sąż. 0st. 2c. 0l. 1mmt. i 19sąż. 4st. 5c. 10l. iest 12sąż. 1st. 8c. 2l. 1mmt.

(1) Wprowadziliśmy tu dla wprawy w rachunek denary których liczono 6 na szeląg, lubo iuż teraz nie używaią ich w rachunku.

195. Gdyby się pytano ile upłynęło lat, miesięcy i dni np. od 28o Listopada 1775 roku do dnia 6so Kwietnia 1794 roku?

Napisawszy liczby przygotowane podług nº 192, iak następuie:

1793lat	3mce	5d
1774	10	1
18lat	5mce	4d

Pozostaie tylko wziąć różnicę. Ta okazuie że od 28o Listop: 1775 r. do 6so Kwiet: 1794 r. upłynęło lat 18, miesięcy 5 i d. 4.

Postępuiąc podobnie znaydziemy, iż ieżeli pewna osoba umarła 1818 r. 15so Maia o godź. 5 rano, urodziła się zaś 1755 r. 28so Czerw. o godz. 9 po południu, osoba ta żyła 62lat 8mcy 15dni 8god.

ZAGADNIENIA.

196. I. Ma ktoś 8# 11zł. i 23gr. ileż mu niedostaie do 10#?

II. Maiący zrobić 487sąż. pewnéy roboty, zrobił iéy dopiero 319sąż. 4st. 3c. 10l. ileż ieszcze ma zrobić?

III. Od 32℔ 9unc. 2dr. 44gr. odiąwszy 12℔ 12unc. 5dr. iakaż zostanie reszta?

IV. Pytaią się o różnicę między 17dni 11godź. 47′ 5″ a 13dni 18godz. 55′ 40″?

V. Jeżeli Kopernik urodził się, iak piszą, w roku 1473 dnia 19 Lutego po południu o godzinie 4 minucie 48; umarł zaś roku 1543 dnia 10 Czerwca, daymy iż o godzinie 4 po południu, iakże długo żył?

O MNOŻENIU LICZB WIELORAKICH.

197. Mnożenie liczb wielorakich może być przywiedzione w ogólności, do mnożenia ułomków, bo każdy czynnik składa się z iedności głównéy i z ułomków teyże iedności.

Na przykład: gdyby się pytano co ma kosztować 54sąż i 3st. iakiéy roboty rachuiąc po 42zł. 18gr. i 2sz. sążeń? zamieniam mnożną 42zł. 18gr. i 2sz. na szelągi, co czyni

3836^{sz}; a że szeląg iest 90tą częścią złotego, więc mnożna może być oznaczona przez $\frac{3836}{90}$zł, podobnież mnożnik $54^{sąż.}$ $3^{st.}$ obrocony na stopy daie $327^{st.}$; że zaś stopa iest $\frac{1}{6}$ą częścią sążnia, więc mnożnikiem będzie $\frac{327}{6}$sąż. A tak zagadnienie iest przywiedzione do mnożenia $\frac{3836}{90}$ przez $\frac{327}{6}$sąż. co czyni $\frac{1254372}{540}$zł. czyli $2322\frac{402}{540}$zł. a zamieniaiąc ułomek na grosze a te na szelągi (n° 119), będzie $2322^{zł.}$ $27^{gr.}$ $1^{szą.}$

Podobnież gdyby się pytano ile kosztuie $38^{sąż.}$ $4^{st.}$ 4^{c} gdy sążeń iest po $48^{zł.}$ $28^{gr.}$ 6^{de}? zamieniam obadwa czynniki na ułomki. A naprzód co do mnożnego, $48^{zł.}$ i $28^{gr.}=48\frac{14}{15}$zł. $6^{de.}$ są $\frac{1}{3}$gr, a że grosz iest $\frac{1}{30}$zł. więc $\frac{1}{3}$gr. iest $\frac{1}{90}$zł. (n° 166). Lecz $\frac{1}{90}$ i $\frac{14}{15}=\frac{84}{90}=\frac{85}{90}=\frac{17}{18}$; więc $48^{zł.}$ $28^{gr.}$ $6^{de}=48\frac{17}{18}$zł.

Co do mnożnika, $38^{sąż.}$ $4^{st.}$ $=38$ i $\frac{4}{6}$ sąż. $4^{c.}$ są $\frac{1}{3}$ st., a że stopa iest $\frac{1}{6}$sąż. więc $\frac{1}{3}$st. iest $\frac{1}{18}$sąż. $\frac{2}{3}$ i $\frac{1}{18}=\frac{12}{18}$ i $\frac{1}{18}=\frac{13}{18}$sąż. Zatém $38^{sąż.}$ $4^{st.}$ $4^{c.}=38\frac{13}{18}$sąż. Zagadnienie więc sprowadzone iest do pomnożenia $48\frac{17}{18}$zł. przez $38\frac{13}{18}$sąż., czyli $\frac{881}{18}$zł. $\times\frac{697}{18}$, co czyni $\frac{614057}{324}$zł. czyli uskuteczniaiąc dzielenie i zamieniaiąc pozostałe ułomki na grosze i denary, będzie iloczyn cały $1895^{zł.}$ $7^{gr.}$ $2\frac{1}{3}{}^{de}$.

Gdyby się pytano ile za $48^{zł.}$ $28^{gr.}$ 6^{de} będzie sążni, gdy za złoty iest $38^{sąż.}$ $4^{st.}$ $4^{c.}$ a zatém gdyby trzeba było pomnożyć $38^{sąż.}$ $4^{st.}$ $4^{c.}$ przez $48^{zł.}$ $28^{gr.}$ 6^{de} czyli $\frac{697}{18}\times\frac{881}{18}$, natenczas iloczyn $\frac{614057}{324}$ oznaczałby sążnie, a uskuteczniaiąc dzielenie, nie zaniedbuiąc oraz zamieniać pozostałych ułomków na stopy i cale, znalazłby się iloczyn $1895^{sąż.}$ $1^{st.}$ $5\frac{1}{9}{}^{c.}$

Podany sposób mnożenia rozciąga się do wszelkiego gatunku liczb wielorakich, lecz wymaga więcéy rachunku niż ten który zaraz wyłożymy, dla tego też nie będziemy się dłużéy zastanawiać nad nim.

198. Sposób drugi naywięcéy używany i prostszy w tych działaniach zależy na rozkładaniu liczb rozmaitego nazwiska na części wielokrotne (n° 87) względem iedności gatunku bezpośrednie wyższego (1).

Naprzykład, ażeby wiedzieć cenę $46\frac{3}{4}$łok. iakiéy materyi po $26^{zł.}$ $10^{gr.}$ 9^{de} łokieć, widzę iż trzeba powtórzyć cenę łokcia tyle razy ile 1 łokieć iest zawarty w $46\frac{3}{4}$łok. Wezmę

(1) Dla ułatwienia sobie działań w téy mierze, niech uczący się rozkładaią na części wielokrotne złoty, sążeń, funt, t. d. zacząwszy od części naymnieyszéy np. grosza, cala, łuta, i t. p. I tak:

1 gr. iest 30tą częścią złotego
2 — są 15tą — —
5 — — 10tą — —
4 — — 10tą i 30tą albo 2 razy 15tą i t. d. Można i w ten sposób mieć ćwiczenie: z pewnéy liczby części uważać iaka ich liczba iest połową, 5cią, 4tą, i t. d. częścią względem ogółu: np. z 20 części 10 iest połową
5 czwartą
4 piątą częścią i t. d.
Z 15tu, 10 czyni dwie trzecie, 5 trzecią część, i t. d.

zaś $\frac{3}{4}$ mnożnego, albo biorąc naprzód część czwartą i pisząc ią trzy razy, albo też biorąc iego połowę i znowu téy połowy połowę. Tak:

			$26^{zł.}$ $46\frac{3}{4}$	$10^{gr.}$	9^{de}
1^{szy}	iloczyn	cząstkowy	156	0	0
2^{gi}	—	—	1040	0	0
3^{ci}	—	—	15	10	0
4^{ty}	—	—	0	23	0
5^{ty}	—	—	13	5	$4\frac{1}{2}$
6^{ty}	—	—	6	17	$11\frac{1}{4}$
	iloczyn	cały	$1231^{zł.}$	$25^{gr.}$	$15\frac{3}{4}{}^{de}$

Mnożę nayrzód całą mnożną przez 46. Zączynam od mnożenia $26^{zł.}$ co mi daie dwa pierwsze iloczyny cząstkowe. Przechodzę potém do mnożenia $10^{gr.}$ i mówię: gdybym miał złoty do pomnożenia przez 46, miałbym na iloczyn $46^{zł.}$; lecz $10^{gr.}$ iest tylko trzecią częścią złotego, iloczyn więc $10^{gr.}$ przez 46 będzie tylko trzecią częścią $46^{zł.}$; co mi daie 3^{ci} iloczyn cząstkowy. Postępuię do mnożenia 9^{de} przez 46, i widzę iż gdybym miał 1 grosz do pomnożenia przez 46, miałbym $46^{gr.}$ na iloczyn. Że zaś 9^{de} czyni tylko połowę grosza, iloczyn więc tych 9^{de} przez 46 powinien uczynić tylko połowę $46^{gr.}$ czyli $23^{gr.}$ co iest 4^{tym} iloczynem cząstkowym.

Pozostaie mi wziąć $26^{zł.}$ $10^{gr.}$ 9^{de}, $\frac{3}{4}$ razy, czyli co na iedno wychodzi, trzeba ażebym wziął $\frac{3}{4}$ z $26^{zł.}$ $10^{gr.}$ 9^{de}. Dla większéy łatwości rozkładam $\frac{3}{4}$ na $\frac{1}{2}$ i $\frac{1}{4}$. Za pół łokcia biorę połowę ceny łokcia, t. i. połowę $26^{zł.}$ $10^{gr.}$ 9^{de}

co mi daie 5ty iloczyn cząstkowy. Nakoniec za $\frac{1}{4}$ które iest połową połowy, biorę połowę z 13zł. 5gr. $4\frac{1}{2}$de co iest ceną półłokcia, i mam 6ty i ostatni iloczyn cząstkowy. Dodaiąc wszystkie te iloczyny, znayduię 1231zł. 25gr. $15\frac{3}{4}$ de za cenę $46\frac{3}{4}$łok. po 26zł. 10gr. 9de łokieć.

199. Podobnież aby wiedzieć cenę 38sąż. 5st. 8c. gdy 48zł. 28gr. 6de kosztuie sążeń, widzę iż powtarzaiąc 48zł. 28gr. 6de tyle razy ile 1 sążeń zawarty iest w 38sąż. 5st. 8c. znaydę iloczyn szukany. Oto iest wzór działania·

			48zł.	28gr.	6de
			38sąż.	5st.	8c.
1szy	iloczyn	cząstkowy	384	0	0
2gi	—	—	144	0	0
3cr	—	—	19	0	0
4ty	—	—	12	20	0
5ty	—	—	3	24	0
6ty	—	—	0	12	12
7my	—	—	24	14	3
8my	—	—	16	9	8
9ty	—	—	5	13	$2\frac{2}{3}$
	Iloczyn cały		1906zł.	3gr.	$7\frac{2}{3}$de

Mnożę naprzód całą mnożną przez 38. Zaczynam od 48zł. co mi daie dwa pierwsze iloczyny cząstkowe. Przechodzę potém do mnożenia 28gr. i mówię: gdybym miał 1zł. do pomnożenia przez 38, miałbym na iloczyn 38zł. lecz że 28gr. które rozkładam na 15gr. 10gr. i 3gr. ważą tylko połowę, trzecią część i dziesiątą złotego, aby więc mieć od razu w złotych iloczyn z 28gr. przez 38, biorę połowę, trzecią część i dziesiątą 38zł. co mi daie 3ci 4ty i 5ty iloczyn cząstkowy.

Postępuię do mnożenia 6de przez 38 i mówię: gdybym miał grosz do pomnożenia przez 38, iloczyn byłby 38gry lecz 6de. są tylko trzecią częścią grosza, iloczyn więc z 6de. przez 38 zamieniony na grosze zawierać tylko będzie trzecią część 38gr. co mi daie 6ty iloczyn cząstkowy.

Gdybym szukał wartości tylko 38sąż. działanie byłoby skończone, : pozostałoby iedynie wziąć summę wszystkich tych iloczynów szczególnych; lecz trzeba ieszcze znaleźć wartość 5st. i 8c.

Postrzegam iż 5st. rozłożone na 3st. i 2st. są połową i trzecią częścią sążnia, biorąc więc połowę i trzecią część 48zł. 28gr. 6de. ceny sążnia, będę miał wartość pięciu stóp. Te dwa działania daią mi 7my i 8my iloczyn cząstkowy.

Nakoniec, za 8c. które są trzecią częścią dwóch stóp, będę miał trzecią część iloczynu, który znalaziem za 2st. i to iest 9ty iloczyn cząstkowy.

Dodaiąc wszystkie te cząstkowe iloczyny znaydziemy 1906zł. 3gr. $7\frac{2}{3}$de. wartość szukaną.

200. Gdyby się zaś pytano ile za 48zł. 28gr. 6de dostanie pewnego towaru rachuiąc za 1 złoty po 38sąż. 5st. 8c. ? znaleźlibyśmy podobnie postępuiąc, iż na iloczyn wypada 1906sąż. 0st. $8\frac{2}{9}$c. Oto iest wzór tego działania:

			38sąż.	5st.	8c.		
			48zł.	28gr.	6de		
1szy	iloczyn	cząstko:	304	0	0		
2gi	—	—	152	0	0		
3ci	—	—	24	0	0	z rozm.	3st. przez 48
4ty	—	—	16	0	0	—	2
5ty	—	—	5	2	0	—	8c
6ty	—	—	19	2	10	z rozm. mnożnego przez	15gr.
7my	—	—	12	5	$10\frac{2}{3}$		10
8my	—	—	3	5	$4\frac{2}{5}$		3
9ty	—	—	1	1	$9\frac{7}{15}$		1
10ty	—	—	0	2	$7\frac{7}{45}$		6de.
	Iloczyn cały		1906sąż.	0st.	$8\frac{2}{9}$c.		

Mnożę naprzód całą mnożną przez 48. Zaczynam od 38sąż. co mi daie dwa pierwsze iloczyny cząstkowe. Aby 5st. wziąć 48 razy rozkładam ie na 3st. i 2st. t. i. na pół i trzecią część sążnia, i mam zaraz połowę i trzecią część 48sąż. co mi daie 3ci i 4ty iloczyn cząstkowy. Przystępuię do mnożenia 8c. przez 48, a że 8c. iest $\frac{1}{2}$ i $\frac{1}{6}$ stopy, więc będę miał $\frac{1}{2}$ i $\frac{1}{6}$ z 48st. t. i. 24 i 8=32st. czyli 5sąż. i 2st. co mi daie iloczyn 5ty

Aby rozmnożyć 38sąż. 5st. 8c. przez 28gr. uważam iż te są połową, trzecią i dziesiątą częścią złotego, powinienem zatém wziąć połowę, trzecią i dziesiątą część mnożney co mi daie 6ty, 7my i 8my iloczyn cząstkowy. Naostatek aby pomnożyć mnożną przez 6de. uważam ilebym z niey

mógł mieć za grosz 1, i dla tego biorę trzecią część 8go iloczynu cząstkowego, co mi daie 9ty iloczyn przybrany oznaczaiący iż za grosz miałbym $1^{sąż.}\ 1^{st.}\ 9\frac{7}{15}{}^{c}$; więc za $6^{de.}$ które są trzecią częścią grosza, mieć będę tylko $2^{st.}\ 7\frac{7}{45}$ c. co mi daie ostatni iloczyn cząstkowy. Dodaiąc wszystkie te iloczyny znaydę $1906^{sąż.}\ 0^{st.}\ 8\frac{2}{9}{}^{c.}$ na iloczyn cały.

201. Z tego widzimy, iż aby wykonać mnożenie z liczbami wielorakiemi za pomocą części wielokrotnych, trzeba umieć zamieniać poddziały główney iedności czynnika iednego na różne części wielokrotne téyże iedności, i wziąć za każdą z nich części podobne z czynnika drugiego; *summa tych wszystkich części czyli iloczynów cząstkowych, będzie iloczynem całym szukanym.*

Postępowanie to wypływa widocznie z definicyi mnożenia (n° 38).

ZAGADNIENIA.

202. I. Ileż kosztować będzie $0^{sąż.}\ 5^{st.}\ 9^{c.}\ 10^{l.}$ rachuiąc po $0^{zł.}\ 19^{gr.}\ 11^{de}$ sążeń?

II. Ileż za $22^{zł.}\ 18^{gr.}\ 9^{de}$ dostanę pewnego towaru, rachuiąc za złoty $32^{sąż.}\ 4^{st.}\ 4^{c.}$?

III. Kiedy 12 sztuk czyli tuzin pewnego towaru kosztuie $8^{tal.}\ 4^{zł.}\ 12$ gr. ileż kosztować będzie wielki tuzin czyli 12 tuzinów?

IV. Z maiących się płacić $50000^{zł.}$ np. podatku, potrącaią po $2^{gr.}$ i 6^{de} na złotym; ileż potrącenie wynosi, a ile zapłacić istotnie trzeba?

V. Jeżeli w handlu morskim $1^{zł.}$ przynosi rocznie $22^{zł.}\ 20^{gr.}\ 10^{de}$; ileż przyniosą na rok $669^{zł.}\ 4^{gr.}$ i $9^{de.}$?

O DZIELENIU LICZB WIELORAKICH.

203. Aby podzielić liczbę wieloraką przez inną, np. ażeby znaleźć cenę łokcia przypuszczaiąc że $46\frac{3}{4}$ łok. kosztowały $1231^{zł.}\ 25^{gr.}\ 15\frac{3}{4}{}^{de}$; uważam iż cena łokcia zawiera się tyle razy w $1231^{zł.}\ 25^{gr.}\ 15\frac{3}{4}{}^{de}$; ile 1 łokieć w $46\frac{3}{4}$ łok. t. i. 46 i $\frac{3}{4}$ razy, czyli (sprowadziwszy 46 do mianownika 4) $\frac{187}{4}$ razy, pozostaie więc tylko dzielić $1231^{zł.}\ 25^{gr.}\ 15\frac{3}{4}{}^{de.}$ przez $\frac{187}{4}$; to się sprowadza do pomnożenia $1231^{zł.}\ 25^{gr.}\ 15\frac{3}{4}{}^{de.}$ przez $\frac{4}{187}$, co daie $\frac{4927^{zł.}\ 13^{gr.}\ 9^{de.}}{187}$. Iloraz

$26^{zł.}\ 10^{gr.}\ 9^{de.}$ który znayduię uskuteczniaiąc dzielenie iest ceną łokcia.

Oto iest wzór skrócony działania w którém tylko reszty są oznaczone:

zł.

4927 13gr. 9^{de} | 187

1187 | 26zł. 10gr. 9^{de}

65=1950gr.

13

1963

93=1674de

9

1683

0

Podobnież, ażeby znaleźć cenę sążnia, przypuszczaiąc iż $24^{sąż.}\ 2^{st.}\ 8^{c.}$ kosztowały $58^{zł.}\ 20^{gr.}\ 12^{de.}$ uważam iż cena sążnia zawiera się tyle razy w $58^{zł.}\ 20^{gr.}\ 12^{de.}$ ile 1 sążeń w $24^{sąż.}\ 2^{st.}\ 8^{c}$; więc podzieliwszy $24^{sąż.}\ 2^{st.}\ 8^{c.}$ przez 1 sążeń, trzeba dzielić $58^{zł.}\ 20^{gr.}\ 12^{de.}$ przez iloraz z tego dzielenia wypadły.

Aby zaś dzielenie to uskutecznić, uważam iż zamieniaiąc 1 sążeń na cale, mam 72^{c}; a zamieniaiąc $24^{sąż.}\ 2^{st.}\ 8^{c.}$ na cale mam 1760^{cal}. Iloraz więc ilości $24^{sąż.}\ 2^{st.}\ 8^{c.}$ podzielony przez 1 sążeń, iest ułomek ułomek ogólny $\frac{1760}{72}$.

Pozostaie teraz dzielić $58^{zł.}\ 20^{gr.}\ 12^{de.}$ przez $\frac{1760}{72}$, to się sprowadza do pomnożenia $58^{zł.}\ 20^{gr.}\ 12^{de.}$ przez $\frac{72}{1760}$, co czyni $\frac{4225^{zł.}\ 18^{gr.}}{1760}$; iloraz $2^{zł.}\ 12^{gr.}\ \frac{27}{55}{}^{de.}$ który się znayduie uskuteczniaiąc dzielenie, którego tu wzór widzimy, iest ceną sążnia.

4225zł. 18gr. | 1760

705=21150 | 2zł. 12gr. $\frac{27}{55}$de.

18

21168

3568

$48=\frac{864}{1760}\text{de.}=\frac{27}{55}$

204. Widzimy ztąd iż *dla wykonania podobnych działań, trzeba sprowadzać dzielnik do części iego naymnieyszego gatunku danego, potém mnożyć dzielną przez liczbę wyrażaiącą ile razy naymnieyszy gatunek dzielnika zawiera*

się w iego naywiększym danym gatunku, i odbywać dzielenie według prawideł wyżey przepisanych.

Może tu mieć mieysce skrócenie, bo np. ułomek ogólny $\frac{1760}{72}=\frac{220}{9}$; dosyć więc rozmnożyć dzielną przez 9 a dzielić przez 220.

205. Wypada ieszcze dodać uwagę, iż gdy dzielnik iest teyże natury co dzielna, a iloraz ma być ogólny, natenczas dzielna podobnież iak dzielnik musi być wyrażona, w częściach naymnieyszego gatunku iego, inaczey nie możnaby otrzymać ilorazu ogólnego.

Gdyby nawet iloraz miał być mianowany, trzeba podobnie obie liczby przysposobić. W tym ieszcze razie szczególny wzgląd zachodzi, iż gdy reszta z dzielenia pozostała iest ułomkiem iedności gatunku ilorazu, a chcemy dzielenie posunąć i otrzymać iloraz w częściach niższego gatunku; zamienić należy tę resztę na części gatunku bezpośrednie niższego i dzielić podług wskazanych prawideł. Np. gdyby się pytano ile za 7668zł. 11gr. 8dc. będzie zrobiony pewney roboty, rachuiąc po 72zł. sążeń? spostrzegamy iż z natury zadania iloraz powinien być sążnie i części sążnia. Zamieńmy więc dzielną i dzielnik na denary i mieć będziemy 4135166dc. do dzielenia przez 388800dc. co daie na iloraz 106sąż. Reszta $\frac{135866}{388800}$ iest ułomkiem sążnia. Zamieniam ią teraz na stopy, cale, i t. d. i wykonywaiąc dzielenie znaydę ieszcze na iloraz 2st. 1c. $8\frac{2}{15}$ Podobne inż działanie wykonywaliśmy pod n° 197 zamieniaiąc ułomek złotego na grosze i t. d.

206. Mnożenie i dzielenie liczb wielorakich można sprowadzić do mnożenia i dzielenia zwyczaynego z częściami dziesiętnemi, zamieniaiąc w liczbach danych różne poddziały iednosci główney na części dziesiętne.

207. Aby zamienić liczbę wieloraką na ieden tylko gatunek iedności główney z częściami iéy dziesiętnemi, trzeba ią zamienić naprzód na liczbę ułomkową (n° 197) a tę dopiero na dziesiętne (n° 177).

I na odwrót, ażeby części dziesiętne iakiéy iedności głównéy zamienić na liczbę wieloraką, dosyć iest zachować prawidła mnożenia dziesiętnych. Pytaią się np. 0sąż. 65347 ileż czyni stóp, cali i liniy? Mnożę dziesiętne przez 6 zamieniaiąc sążeń na stopy, iloczyn iest 3st. 92082; mnożę części dziesiętne stopy przez 12 zamieniaiąc na cale, i mam

11c. 04984; mnożę części cala przez 12 zamieniaiąc na liniie, i mam 0l. 59808 równe prawie $\frac{3}{5}$l., a zatém ważność, dziesiętnych danych wynosi prawie 0sąż. 3st. 11c. $\frac{3}{5}$l.

Podobnież postępuiąc znaydziemy, iż ieżeli rok astronomiczny ma 365 dni, 24224; tedy zawiera 365 d. 5g. 48', 49" i nieco więcéy.

208. Ztąd łatwo się przekonać możemy, iż gdybyśmy w naszych miarach i wagach mieli podział dziesiętny, rachunek liczb wielorakich w miarę zachowania tego podziału byłby ułatwiony.

209. Łatwo także spostrzedz możemy, iż dzielenie liczb wielorakich może być przywiedzione i do dzielenia ułomków (porówn: n° 197).

Co się tyczy próby czterech działań z liczbami wielorakiemi, ta odbywa się podobnie iak się powiedziało wyżéy pod n° 165 o próbie czterech działań z ułomkami zwyczaynemi. Co do mnożenia i dzielenia, gdy ie uskuteczniać można nie iednym sposobem, więc i te sposoby służyć sobie mogą wzaiemnie za próbę.

ZAGADNIENIA.

210. I. Za $57\frac{5}{8}$tok. pewnego towaru zapłacono 237# 13zł. $8\frac{1}{2}$gr. po ileż płacono łokieć?

II. Rachuiąc czerwony złoty po zł. 18 gr. 24; ileż trzeba czerw: zł. na spłacenie 2500tal. 4zł. 18gr.?

III. Przedsięwzięto kopać kanał 8950sąż. 3st. 6c. długi, szerokości miernéy wszędzie iednakowéy: kopią go na dzień 28sąż. 4st. 3c; iest pytanie ile dni trzeba będzie na wykopanie całego kanału, przypuszczaiąc iż gatunek ziemi w całéy iego rozciągłości iest iednakowy?

IV. Gdy za 7 grzywien 5 uncyy 6 drachm czystego srebra dano 115tal. 3zł. $4\frac{5}{16}$gr., ileż kosztuie grzywna?

V. Wiadomo iż grzywna czystego srebra kosztowała 14 tal. 5zł. 24gr. Jest pytanie ile grzywien kupiono za 115tal. 3zł. $4\frac{5}{16}$gr.?

O PODNOSZENIU DO POTĘG I WYCIĄGANIU PIERWIASTKÓW.

211. Nazywamy *potęgą* (potentia) samą liczbę lub też iloczyny téy liczby pomnożonéy przez nią samą pewną liczbę razy.

Każda liczba iest pierwszą swoią potęgą (prima potentia).

Iloczyn iakiéy liczby pomnożonéy raz przez siebie samą nazywa się drugą potęgą czyli *kwadratem* (quadratum) téy liczby: tak 3×3 czyli 9 iest kwadratem z 3.

Iloczyn iakiéy liczby rozmnożonéy dwa razy następnie przez siebie samą, to iest przez iéy kwadrat, nazywa się trzecią potęgą czyli *sześcianem* (cubus) téy liczby: tak 4×4×4 czyli 4×16=64, iest sześcianem z 4; i tak następnie co do czwartéy, piątéy i d. potęg.

212. Działanie przez które znayduiemy pewną potęgę iakiéy liczby, nazywa się *podnoszenie do potęgi* (formatio potentiæ). Pospolicie wydarza się tylko potrzeba podnoszenia liczb do potęgi drugiéy i trzeciéy. Aby zaś poznać sposoby podnoszenia do tych potęg liczby iakiéykolwiek, należy wiedzieć naprzód potęgi te z liczb poiedynczych, a temi są:

Pierwsza potęga	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2ga poł: czyli kwad:	1	4	9	16	25	36	49	64	81
3cia czyli sześcian	1	8	27	64	125	216	343	512	729 (1)

Postrzegamy iż druga, trzecia, i w ogólności wszystkie potęgi z 1 są 1: bo 1 rozmnożona przez siebie tyle razy ile zechcemy, nie może wydać tylko 1. Jedność sama ma tę własność.

213. Nazywamy *pierwiastkiem* (radix) potęgi, liczbę która pomnożona przez siebie pewną liczbę razy daie potęgę naznaczoną. Pierwiastek pierwszy i potęga pierwsza są sobie równe.

(1) Tablicę tę powinni uczący się umieć na pamięć. Mogą zaś sobie rozciągnąć ią i do następnych potęg. Można im zaraz okazać kwadrat i szescian iconometryczny od którychto figur potęgi maią nazwiska.

Liczba z któréy powstała potęga druga czyli kwadrat nazywa się pierwiastkiem drugim, pierwiastkiem kwadratowym, albo po prostu pierwiastkiem.

Liczba z któréy powstała potęga trzecia czyli sześcian, nazywa się pierwiastkiem trzecim, czyli pierwiastkiem sześciennym, i tak następnie co do czwartéy, piątéy i d. potęg.

214. Działanie które wykonywamy dla znalezienia pierwiastku iakiéy potęgi nazywa się *wyciąganie pierwiastku* (extractio radicis).

215. Podnoszenie do potęg nie ma żadnéy trudności; idzie tylko o pomnożenie pewną liczbę razy przez siebie samą liczby z któréy chcemy uformować potęgę: tak mnożąc 12, raz przez 12, iloczyn 144 daie kwadrat z 12; mnożąc 144 przez 12 iloczyn 1728 daie sześcian z 12.

Także 0,3×0,3=0,09 iest kwadratem z 0,3; 0,09×0,3 =0,027 iest sześcianem z 0,3.

Podobnie $\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{4}{9}$ iest kwadratem z $\frac{2}{3}$; $\frac{4}{9}\times\frac{2}{3}=\frac{8}{27}$ iest sześcianem z $\frac{2}{3}$.

216. Z tego widzimy iż dla uformowania rozmaitych potęg ułomków, trzeba podnieść licznik i mianownik do potęgi żądaney: więc ważność ułomku zmnieysza się w miarę podnoszenia go do wyższych potęg; to zaś zmnieyszanie tém iest znacznieysze im mianownik iest większy od licznika.

217. Gdybyśmy iaką liczbę wynieść chcieli do potęgi piątéy, skraca się działanie mnożąc iéy kwadrat przez siebie, co wyda iuż czwartą potęgę, tę mnoży się ieszcze raz przez tęż liczbę, a będzie piąta szukana potęga; gdyby liczba dana miała być wyniesiona do potęgi szóstéy, dosyć iest iéy trzecią potęgę czyli sześcian rozmnożyć przez siebie; gdyby zaś liczbę iaką trzeba było wynieść do potęgi dziesiątéy, pomnożylibyśmy iéy trzecią potęgę dwa razy następnie, przez siebie, coby iuż dało dziewiątą potęgę, i ieszcze raz przez tęż liczbę, co dałoby dziesiątą potęgę, i t. d.

218. Gdy chcemy oznaczyć wyniesienie iakiéy liczby do potęgi danéy, piszemy z prawéy strony téy liczby nieco u góry cyfrę oznaczaiącą ile razy liczba dana ma być wziętą za czynnik; np. chcąc oznaczyć 7, wyniesione do potę-

gi czwartéy; piszę 7^4; $\frac{3}{5}$ do potęgi czwartéy oznaczymy $(\frac{3}{5})^4$. Liczba 4 zowie się *wykładnikiem* (exponens).

Wyciąganie pierwiastków wymaga prawideł szczególnych. Wyłożymy ie naprzód na pierwiastek kwadratowy, a następnie na sześcienny.

O WYCIĄGANIU PIERWIASTKÓW KWADRATOWYCH.

219. Wyciągnąć pierwiastek kwadratowy z iakiéy liczby iestto znaleźć liczbę która przez siebie rozmnożona daie tę samę z któréy wyciągnąć mamy pierwiastek, ieżeli podana liczba iest kwadratem zupełnym; lub ieżeli nim nie iest, wyda naywiększy kwadrat w niéy zawarty.

220. Gdy liczba dwiema tylko cyframi iest wyrażona, iéy pierwiastek ma tylko iednę: tak pierwiastek z 81 iest 9; pierwiastek z 99 iest ieszcze 9, które w liczbach całych zbliża się naywięcéy poniżéy pierwiastku prawdziwego z 99.

221. Aby wyciągnąć pierwiastek z iakiéy liczby złożonéy z więcéy niż dwóch cyfer, uważam naprzód iż każda liczba złożona z więcéy niż dwóch cyfer ma ich koniecznie więcéy niż iednę w swoim pierwiastku: np. 100, które iest naymniéysze z liczb o trzech cyfrach, ma ich dwie w swoim pierwiastku, który iest 10; więc każda liczba wyrażona więcéy niż dwoma cyframi, ma za pierwiastek liczbę złożoną z dziesiątków i iedności. Uważam także iż każda liczba złożona z więcéy niż czterech cyfer, ma ich koniecznie więcéy niż dwie w swoim pierwiastku; bo 0000, które iest naymniéysze z liczb o pięciu cyfrach, ma za pierwiastek liczbę o trzech cyfrach która iest 100.

Więc, w ogólności, pierwiastek iakiéy liczby która ma więcéy niż dwie cyfry, będzie złożony z dziesiątków i iedności; dziesiątki będą czasem wyrażone kilku cyframi, lecz iedności zawsze tylko iedną (1).

222. To założywszy, szukamy iakie części wchodzą w formowanie kwadratu liczby złożonéy z dziesiątków i iedności; co nam posłużyć będzie mogło do odkrycia pierwiastku iakiéykolwiek liczby, albo przynaymniéy naywiększego kwadratu w niéy zawartego.

(1) Widoczną iest rzeczą, iż iedności rzędów wyższych niż dziesiątki mogą być wyrażone przez iedności dziesiątków.

Zastanawiaiąc się nad formowaniem kwadratu liczby złożonéy z dziesiątków i iedności, iak np. z 34, widzimy, iż aby ią wynieść do kwadratu, mnożymy 1ód 4 przez 4; 2re 30 przez 4; 3cie 4 przez 30 (czyli 30 przez 4); 4te 30 przez 30.

$$\begin{array}{r} 34 \\ 34 \\ \hline 136 \\ 102 \\ \hline 1156 \end{array}$$

Że zaś ostatnie działanie daie kwadrat dziesiątków; trzecie i drugie złączone daie dwa razy iloczyn dziesiątków przez iedności; a pierwsze daie kwadrat iedności: więc kwadrat liczby złożonéy z dziesiątków i iedności zawiera trzy części, to iest: 1ód *kwadrat dziesiątków*, 2re *podwóyny iloczyn dziesiątków przez iedności*, 3cie *kwadrat iedności*.

Jaśniéy to ieszcze widzimy przez mnożenie następuiące:

$$\begin{array}{r} 30 + 4 \\ 30 + 4 \\ \hline 30^2 + 30 \times 4 \\ 30 \times 4 + 4^2 \\ \hline 30^2 + 2\,(30 \times 4) + 4^2 \end{array}$$

223. Daymy iż trzeba wyciągnąć pierwiastek z 3364. Piszę tę liczbę w sposób następuiący:

$$\begin{array}{r|l} 33 \mid 64 & 58 \\ 8 \quad 64 & 108 \\ \hline 0 & \end{array}$$

a że ma więcéy niż dwie cyfry, pierwiastek iéy będzie miał dziesiątki i iedności.

Nie znaiąc ich, wiem, iż 3364 zawiera kwadrat dziesiątków, podwóyny iloczyn dziesiątków przez iedności, i kwadrat iedności.

Kwadrat zaś dziesiątków iest liczbą set, które maią dwa mieysca przed sobą, czyli dwie cyfry z prawéy strony; więc oddzieliwszy kréską dwie cyfry w liczbie 3364 z prawéy strony, część z lewéy zawierać będzie kwadrat dziesiątków. Gdy część ta zawiera tylko dwie cyfry, widzę iż pierwiastek naywiększego kwadratu który ona zamyka nie może mieć tylko iednę cyfrę, i że ta iest 5.

Piszę ią w pierwiastku który tu ma mieysce dzielnika; odeymuię iéy kwadrat 25 od 33, reszta iest 8 do któréy spuszczam przedział 64 i mam liczbę 864.

Odiąwszy kwadrat dziesiątków od 3364, część pozostała 864 zawiera tylko podwóyny iloczyn dziesiątków przez iedności, i kwadrat iedności.

Podwóyny iloczyn dziesiątków przez iedności, iest koniecznie liczbą dziesiątków, która powinna mieć iedno mieysce czyli iednę cyfrę z prawéy strony (1); część 86 będzie więc zawierać podwóyny iloczyn dziesiątków przez iedności: dzieląc więc 86 przez podwóyną liczbę dziesiątków pierwiastku, wypadną na iloraz iedności pierwiastku (n° 96).

Piszę pod kréską 10 które iest podwóyną liczbą 5 dziesiątków. Iloraz liczby 86 podzieloney przez 10 iest 8. Nim napiszę tę cyfrę w pierwiastku, probuię iéy sposobem następuiącym: piszę 8 obok 10, i mnożę 108 przez 8; tym sposobem robię zaraz podwóyny iloczyn dziesiątków przez iedności i kwadrat iedności. Jeżeli iloczyn z 108 przez 8 nie może być odięty od 864, wniosę iż 8 iest za wielkie i sprobuię cyfry bezpośrednie mnieyszéy; lecz widzę iż 864, będące tym iloczynem, może być odięte od 864; 8 więc iest prawdziwą liczbą iedności których szukam: piszę ią zatém w pierwiastku, a że się nic nie zostaie po odcięciu 864 od 864, liczba 58 iest pierwiastkiem zupełnym liczby 3364, która iest kwadratem zupełnym. Bo $58 \times 58 = 3364$.

224. Wypada z powyższych działań, iż aby wyciągnąć pierwiastek z iakiéy liczby trzeba:

1ód *Oddzielić dwie cyfry od prawéy ręki, wziąć kwadrat naywiększy zawarty w pierwszym przedziale od lewéy ręki, pierwiastek tego kwadratu napisać na mieyscu pierwiastku i kwadrat iego odiąć od tegoż przedziału.*

2re *Do reszty spuścić następuiący przedział, naznaczyć kropką przedostatnią iego cyfrę iż iedności nie mogą składać dzielnego, i pozostałą część dzielić przez podwóyną liczbę znalezionych dziesiątków wziętą za dzielnik, iloraz który będzie liczbą iedności położyć obok dzielnika.*

3cie *Doświadczywszy go iż nie iest za wielki, napisać ten iloraz po prawéy stronie dziesiątków pierwiastka i rozmnożywszy przezeń powiększony iuż dzielnik; iloczyn wypadły który będzie zawierał podwóyną liczbę dziesiątków*

(1) Dla tego w liczbie 864 znaczę kropką cyfrę 6; to iest cyfrę przedostatnią.

przez iedności i kwadrat iedności, odiąć od liczby z reszty poprzedzaiącego i całego spuszczonego przedziału uformowaney.

Gdy nie masz reszty, liczba dana iest kwadratem zupełnym; ieżeli iest reszta, będzie ona nadmiarem liczby daney nad kwadrat liczby całéy napisaney w pierwiastku.

225. Podług tego prawidła, wyciąganie pierwiastku liczby złożoney z tylu cyfer z ilu zechcemy, nie ma iuż trudności: tak aby wyciągnąć pierwiastek z 49534, piszę tę liczbę iak następuie:

```
. .
4|95|34 { 222
  95    { 42
 1134    442
  250
```

i postrzegam zaraz, iż pierwiastek będzie złożony z dziesiątków i iedności. Oddzielam więc dwie cyfry od prawéy ręki, i kwadrat dziesiątków iest zawarty w części pozostałéy od lewéy ręki. Gdy ta część 495 ma więcéy niż dwie cyfry; pierwiastek iéy będzie złożony z dziesiątków i iedności; wyciągam ie nie uważaiąc na 34, to iest działam iak gdyby szło tylko o wzięcie pierwiastku z 495; ten pierwiastek który się znayduie iak się pokazało w przykładzie poprzedzaiącym, iest 22.

Spuściwszy do reszty 11 przedział następuiący 34, co mi daie 1134, znaczę kropką przedostatnią cyfrę i biorę 113 za liczbę dzielną; a uważaiąc 22 iako dziesiątki pierwiastka liczby daney 49534, podwaiam te 22 dziesiątki; co mi daie 44 za dzielnik; iloraz iest 2, który piszę obok 22 dziesiątków i obok ich podwóyney liczby 44. Iloczyn liczby 442 przez 2 iest 884. Odeymuiąc go od 1134, zostaie się 250 na resztę i ta liczba iest nadmiarem kwadratu danego nad kwadrat z 222.

Gdyby która dzielna nie zawierała właściwego dzielnika, natenczas napisalibyśmy zero w pierwiastku, tudzież obok dzielnika, który stałby się dzielnikiem następnym ieżeli daléy ciągnąć mamy działanie.

Widzimy z powyższego przykładu, iż iakkolwiek wielka byłaby liczba z któréy mamy wyciągać pierwiastek, znayduiemy następnie cyfry tegoż pierwiastka przez wyciąganie

cząstkowe które odbywamy tym samym sposobem iak gdyby pierwiastek szukany miał tylko zawierać dwie cyfry.

226. Gdy iaka liczba nie iest kwadratem zupełnym, można za pomocą dziesiętnych przybliżyć prawdziwą wartość pierwiastka o tyle ile zechcemy. W tym celu trzeba przydać za przecinkiem z prawéy strony liczby danéy napisanym, liczbę zer podwóyną względem liczby cyfer dziesiętnych, które mieć chcemy w pierwiastku, potém wyciągnąć pierwiastek z liczby tak przygotowanéy nie uważaiąc na przecinek, nakoniec, oznaczyć w pierwiastku znalezionym liczbę cyfer dziesiętnych równą połowie liczby zer przypisanych do liczby danéy. Przydaiąc bowiem 2, 4, 6, i t. d. zer do liczby danéy, powiększyliśmy ią sto, dziesięć tysięcy, miliion i t. d. razy; a zatém z tak powiększonéy liczby otrzymany pierwiastek będzie 10, 100, 1000, i t. d. razy większy od pierwiastku szukanego. Dzieląc go więc przez 10, 100, 1000, i t. d. otrzymamy pierwiastek przez przybliżenie w częściach dziesiętnych, setnych, tysiącznych, i t. d.

Tak, aby mieć pierwiastek z 964, zbliżony mniéy niż o iednę setną, piszę 964,0000; i wyciągam pierwiastek iak gdyby nie było przecinka, ten pierwiastek iest 3104, z resztą którą opuszczam. W tym kształcie iest on sto razy za wielki, ponieważ należy do liczby 10000 razy większéy niż liczba dana: aby go sprowadzić do swéy prawdziwéy wartości, trzeba go sto razy zmnieyszyć; co uskutecznimy oddzielaiąc przecinkiem dwie cyfry z prawéy strony; pierwiastek więc z 964 zbliżony mniéy niż o iednę setną, iest 31,04. Aby się o tém przekonać, dosyć iest przydać tylko iednę setną do pierwiastku znalezionego, to iest, wziąć za pierwiastek 31,05 iego kwadrat będzie większy niż 964. Oto iest wzór działania.

. . .

9|64|00|00		31,04
64		61
30000		62,04
5184		

227. Jeżeli są inż dziesiętne w liczbie danéy do wyciągnienia pierwiastku zbliżonego, należy tylko przydać od prawéy ręki tyle zer ile trzeba do uczynienia w kwadracie przypuszczonym, liczby cyfer dziesiętnych parzystéy i podwóynéy, względem téy liczby dziesiętnych którą mieć chcemy w pierwiastku. Tak, aby wyciągnąć pierwiastek z 69,3 zbliżony mniéy niż o iednę setną, napiszemy 69,3000 i szukać będziemy pierwiastku iak gdyby była liczba 693000. Znalaziszy go, oddzielimy w nim dwie cyfry dziesiętne od prawéy ręki, i będzie 8,32 za pierwiastek z 69,3 zbliżony mniéy niż o iednę setną.

228. Toż samo prawidło służy dla wyznaczenia pierwiastku liczb zawieraiących same tylko dziesiętne: Jeżeli mieć chcemy pierwiastek np. z 0,469 przybliżony mniéy niż o iednę tysiączną; napiszemy naprzód 0,469000 i wyciągniemy pierwiastek iak gdyby była liczba 469000. Pierwiastek naywiększego kwadratu zawartego w téy liczbie iest 684. Pierwiastek więc z 0,469 zbliżony mniéy niż o iednę tysiączną, będzie 0,684.

229. Wyciągamy pierwiastek z ułomku biorąc pierwiastek licznika i pierwiastek mianownika. Tak pierwiastek z $\frac{4}{9}$ iest $\frac{2}{3}$.

Dziesiętne nastręczaią sposób naywygodniéyszy i nayprostszy do znalezienia, przez przybliżenie, pierwiastku ułomka gdy ten nie iest zupełnym kwadratem dla niewymierności iednego z swych wyrazów lub obudwu. W iednym iako i drugim przypadku, zaczynamy od zamiany ułomku danego na dziesiętne tak, ażeby liczba wyrażaiąca ułomek zamieniony miała dwa razy tyle cyfer dziesiętnych ile ich mieć chcemy w pierwiastku. To przygotowanie uczyniwszy, będzie tylko szło, dla znalezienia pierwiastku szukanego, wyciągnąć go z wyrażenia dziesiętnego, na które zamieniliśmy ułomek dany.

Tak, aby znaleźć mniéy niż o iednę setną zbliżony pierwiastek ułomku $\frac{7}{9}$, zamienimy ułomek dany na ilość dziesiętną 0,7777 któréy pierwiastek 0,88 iest pierwiastkiem z $\frac{7}{9}$ przybliżonym mniéy niż o iednę setną.

Gdyby trzeba było wyciągnąć pierwiastek z liczby złożonéy z całości i z ułomku zwyczaynego, zamienilibyśmy ułomek na dziesiętne i wyciągnęli pierwiastek podług (n° 227).

230. Z tego cośmy dopiero powiedzieli okazuje się, iż gdy liczba dana nie iest kwadratem, nie możemy otrzymać iéy pierwiastka dokładnego lecz tylko przez przybliżenie. Pierwiastek natenczas zowie się *liczbą niespółmierną* (numerus incommensurabilis albo irrationalis). Bo choćbyśmy iak naydaléy posuwali wyciąganie pierwiastku za pomocą dziesiętnych, nie znaydziemy nigdy tak małych cząstek aby te służyły za spólną miarę i iedności i pierwiástkowi. W ogólności wszelkie ilości nie maiące spólnéy miary z iednością zowią się *niespółmierne* (incommensurabiles albo irrationales). Przeciwnie wszystkie inne *spółmiernemi* (commensurabiles) nazywamy (1).

231. Kiedy chcemy oznaczyć wyciąganie pierwiastku iakiéy liczby całkowitéy albo ułomkowéy, poprzedzamy tę liczbę znakiem $\sqrt{}$ który się wymawia *pierwiastek*. Tak, aby oznaczyć wyciąganie pierwiastku z 29, pierwiastku z $\frac{3}{5}$, piszemy $\sqrt{29}$; $\sqrt{\frac{3}{5}}$ i wymawiamy pierwiastek z 29; pierwiastek z $\frac{3}{5}$.

ZAGADNIENIA.

232. I. Wynieść do kwadratu 1) 66342; 2) 873,24; 3) $\frac{635}{877}$?

II. Wyciągnąć pierwiastek 1) z 15625, 2) z 998001; 3) z 81162081?

III. Wyciągnąć pierwiastek przybliżony mniéy niż o iednę dziesięciomiliionową 1) z 2; 2) z 3; a mniéy niż o dziesięciotysięczną 3) z 1359,3969; 4) z $\frac{5}{7}$; 5) z $65\frac{43}{47}$?

IV. Znaleźć taką liczbę aby różnica pomiędzy iéy kwadratem a kwadratem z liczby 4, była 48.

V. Dana iest liczba 6, znaleźć inną któréy kwadratu połowa rozmnożona przez kwadrat danéy wydaie iloczyn 25992?

VI. Daną liczbę 6 wynieść do potęgi 16?

(1) Gdy poznamy niżéy znaczenie wyrazu *stosunek*, wtedy nam się wyiaśni, że wszelkich liczb całych lub ułomkowych maiących spólną miarę z iednością to iest liczb *spółmiernych*, może być dokładnie oznaczony stosunek z iednością; podobnego zaś stosunku co do liczb *niespółmiernych* oznaczyć nie można.

O WYCIĄGANIU PIERWIASTKÓW SZEŚCIENNYCH.

233. Wyciągnąć pierwiastek sześcienny z iakiéy liczby, iestto znaleźć liczbę która rozmnożona przez swóy kwadrat, wyda też samę z któréy się ma wyciągnąć pierwiastek, ieżeli dana liczba iest sześcianem zupełnym; lub ieżeli nim nie iest, wyda naywiększy sześcian w niéy zawarty.

234. Jeżeli dana liczba nie ma więcéy nad trzy cyfry, iéy pierwiastek sześcienny będzie mieć tylko iednę; tak pierwiastek sześcienny z 729, iest 9; tenże z 999 iest ieszcze 9, które w liczbach całych zbliża się naywięcéy poniżéy prawdziwego pierwiastku sześciennego z 999.

235. Gdy liczba dana ma więcéy niż trzy cyfry, iéy pierwiastek sześcienny ma ich więcéy niż iednę: tak liczba 1000, która iest naymniéyszą z liczb o czterech cyfrach, ma za pierwiastek sześcienny 10 które ma dwie cyfry. Podobnież liczba wyrażona więcéy niż sześcioma cyframi, ma ich więcéy niż dwie w swoim pierwiastku sześciennym. Tak 1000000, który iest naymniéyszy z liczb o siedmiu cyfrach, ma za pierwiastek sześcienny 100, które ma trzy cyfry.

Więc, w ogólności, pierwiastek sześcienny iakiéy liczby która ma więcéy niż trzy cyfry, będzie złożony z dziesiątków i iedności. Dziesiątki będą czasem wyrażone kilku cyframi, lecz iedności zawsze tylko iedną. Zważmy w iaki sposób w uformowanie sześcianu wchodzą części pierwiastku iego.

236. Dla uformowania sześcianu iakiéy liczby złożonéy z dziesiątków i iedności, iak np. 34, trzeba mnożyć iéy kwadrat 1156 przez 34; czyli co na iedno wychodzi, trzeba mnożyć przez iedności i dziesiątki liczby 34, trzy części z których liczba 1156 iest złożona; to iest: kwadrat dziesiątków, podwóyny iloczyn dziesiątków przez iedności, i kwadrat iedności.

A 1ód kwadrat iedności rozmnożony przez iedności daie sześcian iedności.

2re podwóyny iloczyn dziesiątków przez iedności rozmnożony ieszcze przez iedności, daie podwóyny iloczyn dziesiątków przez kwadrat iedności, czyli podwóyny kwadrat iedności rozmnożony przez dziesiątki.

3cie kwadrat dziesiątków rozmnożony przez iedności, daie raz kwadrat dziesiątków rozmnożony przez iedności.

dności nie mogą składać dzielnéy, i pozostałą część dzielić przez potróyny kwadrat dziesiątków pierwiastka wzięty za dzielnik, a iloraz który będzie liczbą iedności położyć obok dzielnika.

3cie. *Przekonawszy się iż iloraz nie iest za wielki, napisać go po prawéy stronie dziesiątków pierwiastka, i trzy iloczyny, to iest: potróyny kwadrat dziesiątków przez ten iloraz* (iedności), *potróyny kwadrat tego ilorazu przez dziesiątki, i sześcian z tegoż ilorazu dodane w summę; odiąć od liczby z reszty poprzedzaiącego i całego spuszczonego przedziału uformowaney.*

Gdy nie masz reszty, liczba dana iest sześcianem zupełnym; ieżeli iest reszta, będzie ona nadmiarem liczby daney nad sześcian liczby całéy napisanéy w pierwiastku.

239. Podobnie należy postępować przy wyciąganiu pierwiastku sześciennego liczby z ilukolwiek cyfer złożoney. Tak, aby wyciągnąć pierwiastek sześcienny z liczby 126539137, piszę ią iak następuie :

126|539|137 { 502
1539137 { 75
33129 { 7500

750000×2 = 1500000
12×500 = 6000
sześcian z 2 = ... 8
Summa: 1506008

i postrzegam zaraz, iż pierwiastek będzie złożony z dziesiątków i iedności. Oddzielam więc trzy cyfry od prawéy ręki. Sześcian dziesiątków iest zawarty w części pozostałéy od lewéy ręki, to iest w 126539. Gdy zaś ta liczba ma więcéy niż trzy cyfry, pierwiastek iéy będzie złożony z dziesiątków i iedności: wyciągam ie nie uważaiąc 137, to iest, działam iak gdyby tylko szło o znalezienie pierwiastka sześciennego z 126539; ten pierwiastek iest 50, i zostaie 1539.

Do 1539 spuszczam przedział 137, i mam liczbę 1539137. Znaczę kropką trzecią od końca cyfrę i biorę 15391 za dzielną; a uważaiąc 50 iako dziesiątki pierwiastka całéy liczby 126539137, biorę za dzielnik 7500 potróyny kwadrat z 50; dzielę 15391 przez 7500, iloraz iest 2.

Pisząc 2 po 50, liczba ta staie się 50 dziesiątków czyli 500. Mnożę przez 2 potróyny kwadrat z 500; który iest 750000, iloczyn iest 1500000. Mnożę 12 potróyny kwadrat iedności przez 50 dziesiątków, iloczyn iest 6000.

Nakoniec sześcian liczby 2 iedności iest 8; summa tych trzech iloczynów iest 1506008, którą odeymuię od 1539137; a reszta 33129 iest nadmiarem liczby daney nad sześcian z 502.

Widzimy więc, iż iakkolwiek wielka byłaby liczba, znaydziemy łatwo iéy pierwiastek sześcienny, przez wyciągania cząstkowe, które odbywamy iak gdyby liczba sześcienna była złożona z dwóch tylko części, a pierwiastek miał tylko dwie cyfry zawierać.

240. Gdy liczba iaka nie iest sześcianem zupełnym, a chcemy przez przybliżenie za pomocą dziesiętnych znaleźć prawdziwy pierwiastek sześcienny, przypisuiemy za przecinkiem z prawéy strony téy liczby napisanym, trzy razy tyle zer ile chcemy mieć dziesiętnych w pierwiastku; potém wyciągamy pierwiastek z liczby tak przygotowaney, iak gdyby to była liczba całkowita; nakoniec odcinamy w pierwiastku znalezionym, liczbę cyfer dziesiętnych równą trzeciéy części liczby zer przypisanych do liczby daney. Przydaiąc bowiem 3, 6, 9 i t. d. zer do liczby daney zwiększamy ią tysiąc, miliion, biliion, i t. d. razy, a zatém z tak powiększoney liczby otrzymany pierwiastek będzie 10, 100, 1000. i t. d. razy większy od pierwiastku szukanego. Dzieląc go więc przez 10, 100, 1000, i t. d. otrzymamy pierwiastek przez przybliżenie w częściach dziesiętnych, setnych, tysiącznych, i t. d.

Tak, ażeby znaleźć pierwiastek sześcienny z 58 zbliżony mniéy niż o iednę setną, działam iak gdybym miał wziąć pierwiastek sześcienny z 58000000; ten pierwiastek iest 387 z resztą którą opuszczam. W tym kształcie, 387 iest sto razy za wielkie, ponieważ należy do liczby 1000000 razy większéy niż 58. Aby go sprowadzić do prawdziwéy wartości, zmniéyszam go sto razy, odcinaiąc przecinkiem dwie cyfry z prawéy strony. Pierwiastek więc sześcienny z 58 zbliżony mniéy niż o iednę setną iest 3,87;

bo sześcian z 3,88 byłby już większy niż 58. Oto iest wzór działania:

58|000|000 { 3,87
31 000 { 27
3 128000 { 4332
39397

2700× 8 = 21600
192×30 = 5760
8^3 = 512
summa ... 27872

433200× 7 = 3032400
192×380 = 55860
7^3 = 343
summa ... 3088603

241. Gdy są już dziesiętne w liczbie z którey chcemy wyciągnąć pierwiastek sześcienny zbliżony, należy tylko przydać od prawéy ręki tyle zer ile potrzeba do uczynienia w sześcianie przypuszczonym, liczby cyfer dziesiętnych potróynéy względem liczby dziesiętnych którą mieć chcemy w pierwiastku. Tak, dla wyciągnienia pierwiastku sześciennego z 19,54 zbliżonego mniéy niż o iednę setną; napiszę 19,540000 i szukać będę ich pierwiastku, iak gdyby było 19540000. Znalazłszy go oddzielę w nim dwie cyfry dziesiętne, i będzie 2,69 na pierwiast: sześć: z 19,54 mniéy niż o iednę setną zbliżony.

242. Toż samo prawidło służy do wyciągania pierwiastku sześciennego, liczb zawieraiących same tylko dziesiętne. Aby mieć n. p. pierwiastek sześcienny, z 0,6 zbliżony mniéy niż o iednę setną, napiszę 0,600000 i wyciągnę z nich pierwiastek sześcienny iak gdyby była liczba 600000. Pierwiastek naywiększego sześcianu zawartego w téy liczbie, iest 84; pierwiastek więc sześcienny z 0,6 zbliżony mniéy niż o iednę setną, iest 0,84.

243. Wyciągamy pierwiastek sześcienny z ułomku biorąc pierwiastek sześcienny z licznika i pierwiastek sześcienny z mianownika. Tak pierwiastek sześcienny z $\frac{27}{64}$ iest $\frac{3}{4}$.

Jeżeli mamy wyciągnąć przez zbliżenie pierwiastek sześcienny ułomku który nie iest sześcianem zupełnym dla niewymierności iednego z swych wyrazów lub obudwu, zaczynamy od zamiany ułomku na dziesiętne tak, ażeby liczba wyrażaiąca ułomek zamieniony, miała trzy razy tyle dziesiętnych ile ich mieć chcemy w pierwiastku; a pozostanie tylko wyciągnąć pierwiastek szukany z ilości dziesiętnéy na którą zamieniliśmy ułomek dany. Tak aby mieć, mniéy niż o iednę tysiączną zbliżony pierwiastek sześcienny z $\frac{4}{9}$, zanimy ułomek dany na wyrażenie dziesiętne 0,444444444 którego pierwiastek sześcienny 0,763 iest pierwiastkiem z $\frac{4}{9}$ mniéy niż o iednę tysiączną zbliżonym.

Jeżeli idzie o wyciągnienie pierwiastku sześciennego z liczby całkowitéy połączonéy z ułomkiem zwyczaynym, należy zamienić ułomek na dziesiętne i wyciągnąć pierwiastek podług n° 241.

244. Widzimy więc iż co się wyżéy powiedziało (n° 230) o niespółmierności pierwiastków kwadratowych, zastosować należy i do pierwiastków sześciennych, a w ogólności i do pierwiastków innych potęg.

245. Gdy chcemy oznaczyć iż trzeba wyciągnąć pierwiastek sześcienny z iakiéy liczby całkowitéy lub ułomkowéy, poprzedzamy te liczbę znakiem $\sqrt[3]{}$.

Tak aby oznaczyć wyciąganie pierwiastku sześciennego z 125, tudzież z $\frac{5}{7}$, piszę $\sqrt[3]{125}$; $\sqrt[3]{\frac{5}{7}}$. Wymawiamy: pierwiastek sześcienny z 125; pierwiastek sześcienny z $\frac{5}{7}$.

246. Umiejąc wyciągać pierwiastek kwadratowy i pierwiastek sześcienny, można wyciągnąć pierwiastek czwarty, pierwiastek szósty, pierwiastek ósmy, dziewiąty, dwunasty szesnasty, ośmnasty, dwudziesty czwarty, i t. d. i w ogólności pierwiastek z liczby któréy wykładnik iest potęgą z 2, lub potęgą z 3, lub iloczynem potęgi z 2 przez potęgę z 3.

Otrzymuiemy pierwiastek czwarty przez dwa wyciągania następne pierwiastku kwadratowego; pierwiastek szósty przez dwa wyciągania następne, iedno pierwiastka kwadratowego, a drugie sześciennego; pierwiastek ósmy przez trzy wyciągania następne pierwiastku kwadratowego; pierwiastek dziewiąty przez dwa wyciągania następne pierwiastku sześciennego; pierwiastek dwunasty, przez trzy wyciągania następne dwa pierwiastku kwadratowego, a iedno pierwiastku sześciennego, i t. d. (n° 217).

Naprzykład, niechby potrzeba było wyciągnąć pierwiastek czwarty, szósty i dwunasty z 4096; będzie

$\sqrt[4]{4096}=8$; ponieważ $\sqrt{4096}=64$, a $\sqrt{64}=8$.

$\sqrt[6]{4096}=4$; ponieważ $\sqrt{4096}=64$, a $\sqrt[3]{64}=4$

$\sqrt[12]{4096}=2$, ponieważ $\sqrt{4096}=64$, $\sqrt{64}=8$, $\sqrt[3]{8}=2$.

Zobaczymy poniżéy iak za pomocą logarytmów można wyciągać pierwiastek piąty, siódmy, dziesiąty (1), i t. d.

ZAGADNIENIA.

247. I. Wynieść do sześcianu 1) 5208; 2) 37,24; 3) $\frac{84}{127}$?

II. Wyciągnąć pierwiastek sześcienny 1) z 68099136; 2) z 20537900; 3) z 97908438529?

III. Wyciągnąć $\sqrt[3]{}$ przybliżony mniéy niż o iednę dziesięciomiliionową 1) z 3; 2) z 4; a mniéy niż o iednę dziesięciotysiączną 3) z 48,5624; 4) z $\frac{7}{8}$; 5) z $29\frac{11}{13}$?

IV. Dana iest liczba 8, znaleźć inną któréy różnica sześcianu z sześcianem danéy iest 1216?

V. Dana iest liczba 9, znaleźć inną któréy sześcianu połowa podzielona przez sześcian danéy, wydaie iloraz 4?

VI. Wyciągnąć $\sqrt[16]{}$ z 15258789o625?

O STOSUNKACH, PROPORCYIACH I POSTĘPACH.

WIADOMOŚCI POPRZEDNICZE.

248. Wszelkie wielkości poznać możemy tylko przez porównanie iednych z drugiemi. W arytmetyce porównywamy ie tylko tyle, ile są wyrażone przez liczby. Każda nawet liczba iest oznaczeniem iakiegoś porównania.

(1) Z liczby z któréy mamy wyciągnąć pierwiastek dziesiąty, wyciągnąwszy pierwiastek kwadratowy, będzie iuż tylko potęga piąta, a zatém pozostanie tylko wyciągnąć pierwiastek piąty. To się rozumie i o innych potęgach których wykładniki nie są liczbami pierwotnemi.

249. Wypadek który znayduiemy porównywaiąc dwie ilości iednegoż gatunku nazywamy *stosunkiem* (ratio).

250. Można porównywać dwie ilości, albo uważaiąc o ile iedna przewyższa drugą, lub ile razy iedna zawiera drugą. Tak mogę porównywać 4 do 8 albo uważaiąc o ile liczba 8 przewyższa 4, lub ile razy zawiera 4.

251. Dwie ilości które porównywamy nazywamy *wyrazami* stosunku (termini rationis), wyraz który piszemy lub wymawiamy pierwszy, nazywamy *poprzednikiem* (antecendens) a drugi *następnikiem* (consequens).

252. Kiedy porównywamy dwie ilości uważaiąc o ile iedna przewyższa drugą, stosunek zawisł na różnicy którą znayduiemy *odeymuiąc poprzednik od następnika* i nazwiemy go *stosunkiem różnicowym* albo *arytmetycznym*. Tak stosunek różnicowy między liczbami 4 i 6, który piszemy 4 . 6 iest 6—4=2; stosunek 10 . 7 iest 7—10=—3. Możnaby odeymować następnik od poprzednika lecz zatrzymamy iednostaynie sposób pierwszy (1).

253. Więc w każdym stosunku różnicowym, następnik równy iest summie z poprzednika i stosunku (n° 57) np. 6=4+2; 7=10—3.

254. Kiedy porównywamy dwie ilości, uważaiąc ile razy iedna zawiera drugą, stosunek zawisł na ilorazie któréy znayduiemy *dzieląc następnik przez poprzednik*, i nazwiemy go *stosunkiem ilorazowym* lub *ieometrycznym* albo prosto *stosunkiem*.

Tak stosunek ilorazowy liczb 5 i 20 który piszemy 5 : 20 iest $\frac{20}{5}=4$; a stosunek 9 : 3 iest $\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$. Możnaby dzielić poprzednik przez następnik; lecz zatrzymamy iednostaynie sposób pierwszy (2).

(1) Gdybyśmy brali różnicę między poprzednikiem i następnikiem, t. i. odeymowali następnik od poprzednika, natenczas za powiększeniem poprzednika lub zmnieyszeniem następnika stosunekby się powiększał, i przeciwnie; lecz podług nas zwiększa się za powiększeniem następnika lub zmnieyszeniem poprzednika, i przeciwnie.

(2) Gdybyśmy dla znalezienia stosunku dzielili poprzednik przez następnik, tedy za powiększeniem poprzednika lub zmnieyszeniem następnika, powiększałby się stosunek, i przeciwnie; lecz podług nas stosunek zwiększa się za powiększeniem następnika lub zmnieyszeniem poprzednika, i przeciwnie.

255. Więc w każdym stosunku ilorazowym następnik równy iest iloczynowi z poprzednika i stosunku (n° 84) np. $20=5\times4$; $3=9\times\frac{1}{3}$.

156. Łatwo tu postrzedz możemy, że następnik i poprzednik iest to samo co dzielna i dzielnik, albo co licznik i mianownik; stosunek zaś to samo co iloraz albo ważność ułomka. Iloraz więc, ułomek i stosunek znaczą toż samo lecz pod różnym względem.

157. Dwa stosunki równe między sobą składaią *proporcyią*. Nazywamy *proporcyią różnicową* lub *arytmetyczną* (proportio arithmetica), ieżeli dwa stosunki są różnicowe; nazywamy zaś *proporcyią ilorazową* lub *ieometryczną* (proportio geometrica) albo tylko *proporcyią*, ieżeli stosunki są ilorazowe; np. stosunek różnicowy liczb 4 i 6, iest równy stosunkowi liczb 9 i 11, czyli co na iedno wychodzi 6—4=11—9. Mogę więc mówić 4 iest do 6, iak 9 iest do 11, co piszemy sposobem następuiącym; 4 · 6 : 9 · 11.

Podobnież 7—10=9—12, więc 10 · 7 : 12 · 9. Kropka będąca między dwoma wyrazami każdego stosunku oznacza i wymawia się *iest do*, a dwie kropki albo też znak równości (=) znayduiące się między dwoma stosunkami oznaczaią i wymawiaią się *iak*.

Stosunek ilorazowy liczb 5 i 20, iest równy stosunkowi liczb 6 i 24; to iest iż $\frac{20}{5}=\frac{24}{6}$; powiem więc 5 iest do 20, iak 6 iest do 24, co piszemy tak; 5 : 20 :: 6 : 24. Podobnież $\frac{3}{9}=\frac{7}{21}$; więc 9 : 3 :: 21 : 7. Dwie kropki będące między dwoma wyrazami każdego stosunku oznaczaią i wymawiaią się *iest do*, a cztery kropki, albo też znak równości (=) znayduiące się między dwoma stosunkami oznaczaią i wymawiaią się *iak*.

258. Ponieważ każdy stosunek składa się z dwóch wyrazów, proporcyia więc składa się z czterech, z których pierwszy i trzeci są poprzednikami, a drugi i czwarty są następnikami.

259. Gdy w dwóch stosunkach ilorazowych pierwszy poprzednik iest do swego następnika, iak drugi poprzednik iest swego następnika, mówimy *iż dwa ostatnie wyrazy są w stosunku prostym* dwóch pierwszych. Gdy zaś pierwszy poprzednik iest do swego następnika, iak drugi następnik do swego poprzednika, mówimy natenczas iż dwa ostatnie

wyrazy są *w stosunku odwrotnym* dwóch pierwszych. Liczby 4 i 8 są w stosunku prostym 3 i 6; liczby 14 i 7 są w stosunku odwrotnym 5 i 10.

260. Nazywamy *skrayne* pierwszy i ostatni wyraz proporcyi; drugi i trzeci nazywaią *średniemi* (1).

261. Jeżeli drugi wyraz proporcyi będący następnikiem pierwszego stosunku iest oraz poprzednikiem drugiego, proporcyia nazywa się *ciągłą* (continua), tak 3 · 5 : 5 · 7 iest proporcyią różnicową ciągłą którą piszemy tak, $\dot{-}$ 3 · 5 · 7 · Proporcyia 2 : 4=4 : 8 iest proporcyią ilorazową ciągłą, którą piszemy tak, $\dot{::}$ 2 : 4 : 8.

Znak $\dot{-}$ napisany przed proporcyią różnicową ciągłą, a znak $\dot{::}$ przed proporcyą ilorazową ciągłą, oznacza iż wymawiaiąc proporcyią, trzeba powtórzyć dwa razy wyraz w środku, który nazywaią *średni proporcyionalny* (medius proportionalis) albo tylko średni (to iest: trzeba wymawiać proporcyią tak, iak gdyby była napisana w sposobie proporcyi zwyczayney). Wszystkie wyrazy proporcyią ciągłą składaiące nazywaią się *ciągłoproporcyionalne*.

162. Nazywamy *postępem różnicowym czyli arytmetycznym* (progressio arithmetica) ciąg wyrazów które wzięte następnie, maią między sobą iednakową różnicę; a nazywamy *postępem ilorazowym czyli ieometrycznym* (progressio geometrica) ciąg wyrazów które podzielone następnie ieden przez drugi, daią ten sam iloraz.

Ciąg $\dot{-}$ 3 . 6 · 9 · 12 · 15, i t. d. iest postępem różnicowym. Różnicę 3 znayduiącą się między wyrazami następnemi, nazywamy *stosunkiem postępu* (ratio progressionis).

Ciąg $\dot{::}$ 2 . 4 : 8 : 16 : 32, i t. d. iest postępem ilorazowym. Iloraz 2 znayduiący się z podzielenia wyrazów następnych ieden przez drugi, zowiemy *stosunkiem postępu*.

Znak $\dot{-}$ poprzedzaiący postęp różnicowy, i znak $\dot{::}$ poprzedzaiący postęp ilorazowy, oznaczaią iż wymawiaiąc postęp, trzeba powtórzyć dwa razy każdy wyraz, wyiąwszy pierwszy i ostatni.

263. Postępy mogą być *rosnące albo maleiące* (*wstępuiące* albo *sstępuiące*, crescentes vel decrescentes). Postęp iest rosnący, gdy wyrazy następuią zwiększaiąc się: postęp

(1) Gdy się mówi dla krótkości *skrayny*, *skrayne*; *średni średnie*; łatwo się domyśleć można *wyraz*, *wyrazy*.

różnicowy i postęp ilorazowy wyżéy położone są rosnące.

Postęp iest maleiący, gdy wyrazy następnią zmnieyszaiąc się; np. ∴ 19 · 15 · 11 · 7 · 3 iest postępem różnicowym maleiącym; ∴ 64 : 32 : 16 : 8 : 4 : 2 iest postępem ilorazowym maleiącym. (1).

Wyłożymy teraz własności szczególne proporcyy i postępów tak różnicowych iak i ilorazowych.

O WŁASNOŚCIACH PROPORCYY I POSTĘPOW RÓŻNICOWYCH.

264. *W każdéy proporcyi różnicowéy summa wyrazów skraynych iest równa summie wyrazów średnich.*

Naprzykład, w proporcyi 4 6 : 7 · 9; 4+9 czyli 13 summa skraynych,=6+7 czyli 13, summie średnich. W proporcyi 3 · 1 : 7 · 5; 3+5 czyli 8; summa skraynych, =1+7 czyli 8 summie średnich.

Toż się rozumie o każdéy innéy proporcyi różnicowéy; bo w takiéy proporcyi każdy następnik iest równy summie z swego poprzednika i z różnicy spólnéy; więc na miéysce każdego następnika można położyć summę z iego poprzednika, i z różnicy spólnéy. Po takiéy zaś zamianie, summa skraynych i summa średnich znayduią się złożone z tychże samych ilości, któremi są dwa poprzedniki i stosunek spólny; a zatém obie te summy są równe (2) więc *w każdéy proporcyi różnicowéy summa* i t. d.

265. Więc 1od. *w każdéy proporcyi różnicowey ciągłéy summa skraynych iest równa średniemu dwa razy wziętemu.*

Bo np. gdy proporcyia różnicowa ciągła ∴ 3 · 7 . 11 iest taż sama co 3 . 7 : 7 · 11, będzie na summę skraynych 11+3 czyli 14=7+7 czyli średniemu dwa razy wziętemu.

266. Więc 2re. *łatwo iest poznać czwarty wyraz proporcyi różnicowéy któréy trzy inne są znane.* Jeżeli wyraz którego szukamy iest skrayny, znaydziemy go odeymuiąc od summy średnich skrayny wiadomy; ieżeli wyraz którego szukamy iest średni, znaydziemy go odeymuiąc od summy skraynych średni wiadomy (1); np. ieżeli mam trzy wyrazy 5, 7, 9, proporcyi różnicowéy, a 5 iest iednym ze skraynych, szukaiąc drugiego skraynego dodaię średnie 7, 9, i od ich summy 16, odeymuię 5, reszta 11 będzie skraynym szukanym; tak iż proporcyia zupełna będzie 5 . 7 : 9 · 11, albo 11 . 7 : 9 . 5.

Gdy trzy wyrazy 3, 7, 9, proporcyi różnicowéy są dane, a 7 iest iednym średnim, ieżeli żądaią drugiego średniego; dodam skrayne 3, 9, i od ich summy 12 odeymuię 7: reszta 5 będzie średnim żądanym; tak iż proporcyia zupełna będzie 3 · 5 : 7 · 9, albo 3 · 7 : 5 · 9

267. Jeżeli idzie o wyraz średni proporcyi różnicowéy ciągłéy, znaydziemy go *biorąc połowę skraynych.* Tak ażeby znaleźć wyraz średni proporcyi różnicowéy ciągłéy któréy 4 i 8 są skraynemi, dodaię te dwie liczby, ich summa iest 12, któréy połowa 6 iest średnim szukanym. Proporcyia więc zupełna iest ∴ 4 · 6 · 8, lub ∴ 8 · 6 · 4.

268. *Ile razy cztery liczby iak* 6, 5, 4, 3, *są takie, iż summa skraynych iest równa summie średnich, takie cztery liczby składaią proporcyią różnicową.*

Albowiem, gdy 6+3=5+4, będzie, odeymuiąc 3 z iednéy i z drugiéy strony, 6=5+4—3; ieżeli w tym wypadku odeymiemy 5 z iednéy i drugiéy strony, będzie 6—5=4—3; więc 5 · 6=3 · 4 (nº 257). Więc *ile razy cztery liczby* i t. d.

(1) Jest ieszcze trzeci gatunek proporcyy i postępów które się zowią *harmoniczne*, lecz te mniéy rozciągłego będąc użytku nie zaymuią zwykle mieysca w pospolitych arytmetykach, i dla tego ie opuszczamy. Chcący poznać ie niech czyta między innemi. *Traité complet d'Arith. par Trincano.* Paris 1781 kar. 504.

(2) W proporcyi różnicowéy 4 · 6 : 7 · 9, iest 6=4+2 a 9=7+2. Położywszy 4+2 na mieysce 6, i 7+2 na mieysce 9, proporcyia poprzedzaiąca zamienia się na tę, 4 · 4+2 : 7 . 7+2. Summa zaś 4+7+2 skraynych, iest złożona z tychże ilości co summa 4+2+7 średnich. W proporcyi 3 . 1 : 7 . 5, iest 1=3—2, a 5=7—2, proporcyia więc zamienia się na 3 . 3—2 : 7 · 7—2. Jest zaś summa 3+7—2 skraynych, złożona z tychże samych ilości co summa 3—2+7 średnich.

(1) Gdybyśmy od summy skraynych odięli ieden skrayny, otrzymalibyśmy drugi skrayny na różnicę. Że zaś summa średnich iest równa summie skraynych, więc odeymuiąc od summy średnich skrayny wiadomy, znaydę skrayny szukany. Gdybym od summy średnich odiął ieden średni, otrzymałbym na różnicę drugi średni. Że zaś summa skraynych iest równa summie średnich; więc odeymuiąc od summy skraynych średni wiadomy, znaydę średni szukany.

269. Więc 1od. *Jeżeli summa dwóch liczb iest równa summie dwóch innych, można wziąć dwie pierwsze za skrayne a dwie drugie za średnie wyrazy proporcyi różnicowéy. I tak, ponieważ* 10+5=8+7; wnoszę iż, 10 · 8 : 7 · 5 lub 5 · 8 : 7 · 10.

Więc 2re. *ieżeli cztery liczby są w proporcyi różnicowéy, składać ią także będą, iakiekolwiek odmiany czynić z niemi będziemy, byleby była równość między summą wyrazów skraynych i summą wyrazów średnich.*

Odmiany zaś te mogą być:

1od. Co do samego mieysca, iak np. ztąd że: 8 · 6 = 7. 5; mieć będziemy:

1e.
$$\begin{cases} 8 \cdot 7 = 6 \cdot 5 \\ 7 \cdot 8 = 5 \cdot 6 \\ 7 \cdot 5 = 8 \cdot 6 \\ 5 \cdot 7 = 6 \cdot 8 \\ 5 \cdot 6 = 7 \cdot 8 \\ 6 \cdot 5 = 8 \cdot 7 \\ 6 \cdot 8 = 5 \cdot 7 \end{cases}$$

2re. Dodaiąc iednakowe ilości do wyrazów pierwszego lub do wyrazów drugiego stosunku, lub do samych poprzedników lub następników; albo też odeymuiąc iednakowe ilości od wyrazów pierwszego lub drugiego stosunku, lub od samych poprzedników lub następników. I tak:

2e.
$$\begin{cases} 8+3 \cdot 6+3 = 7 \cdot 5 \\ 8 \cdot 6 = 7+3 \cdot 5+3 \\ 8+3 \cdot 6 = 7+3 \cdot 5 \\ 8 \cdot 6+3 = 7 \cdot 5+3 \\ 8-3 \cdot 6-3 = 7 \cdot 5 \\ 8 \cdot 6 = 7-3 \cdot 5-3 \\ 8-3 \cdot 6 = 7-3 \cdot 5 \\ 8 \cdot 6-3 = 7 \cdot 5-3 \end{cases}$$

3e. Dodaiąc iednakowe ilości do wszystkich wyrazów proporcyi, lub odeymuiąc ie od nich; albo też mnożąc lub dzieląc przez iednakowe ilości wszystkie wyrazy proporcyi. I tak:

3e.
$$\begin{cases} 8+3 \cdot 6+3 = 7+3 \cdot 5+3 \\ 8-3 \cdot 6-3 = 7-3 \cdot 5-3 \\ 8 \times 2 \cdot 6 \times 2 = 7 \times 2 \cdot 5 \times 2 \\ \frac{8}{2} \cdot \frac{6}{2} = \frac{7}{2} \cdot \frac{5}{2} \end{cases}$$

We wszystkich bowiem tych przypadkach, summa wyrazów skraynych równa iest summie średnich.

270. Nakoniec, ieżeli dodamy do siebie wyrazy odpowiadaiące dwóch lub więcéy proporcyy różnicowych, lub odeymiemy od siebie wyrazy odpowiadaiące dwóch takich proporcyy; summy lub reszty ztąd wypadłe będą także w proporcyi różnicowéy; np. maiąc dwie proporcyie różnicowe:

$$\begin{array}{r} 5 \cdot 8 = 4 \cdot 7 \\ 1 \cdot 2 = 3 \cdot 4 \\ \hline 6 \cdot 10 = 7 \cdot 11 \end{array}$$

summy odpowiadaiących wyrazów są;

różnice zaś wyrazów odpowiadaiących są;

$$4 \cdot 6 = 1 \cdot 3$$

Widzimy bowiem iż te summy i te różnice są w proporcyi różnicowéy.

Stosunki wypadaiące z dodania wyrazów odpowiadaiących w dwóch lub więcéy stosunkach różnicowych danych zowią się *stosunki różnicowe złożone.*

Przeydźmy do postępów różnicowych.

271. *W każdym postępie różnicowym, wyraz którykolwiek równy iest pierwszemu powiększonemu stosunkiem tyle razy wziętym, ile wyrazów poprzedza ten o który idzie.*

Bo postęp różnicowy iest ciągiem wyrazów takich, iż różnica między następnym a poprzednim iest zawsze ta sama. Więc.

1e. Drugi wyraz postępu równy iest pierwszemu powiększonemu stosunkiem, to iest pierwszemu więcéy raz stosunek.

2e. Trzeci wyraz postępu równy iest drugiemu powiększonemu stosunkiem, więc równy iest pierwszemu więcéy dwa razy stosunek.

3e. Czwarty wyraz postępu równy iest trzeciemu powiększonemu stosunkiem; więc równy iest pierwszemu więcéy trzy razy stosunek, i tak daléy (1); więc *w każdym postępie różnicowym wyraz którykolwiek, i t. d.*

(1) W postępie rosnącym: 18 . 21 . 24 . 27 . 30; i t. d. iest 1e. 21=18+3=18+raz 3=18+1×3;
2e. 24=21+3=18+2 razy 3=18+2×3, i t. d.
W postępie różnicowym maleiącym ÷ 18 . 15 . 12 . 9 . 6, i iest
1e. 15=18−3=18+1 raz −3=18+1×−3;
2e. 12=15−3=18+2 razy −3=18+2×−3, i t. d.

Biblioteka Gimnazjum męsk. im. J. I. Kraszewskiego w Białej Podl. odgórskiego

272. Więc, *w każdym postępie różnicowym który ma zero za pierwszy wyraz, wyraz którykolwiek równy iest stosunkowi wziętemu tyle razy ile wyrazów poprzedza ten o który idzie.*

273. Prawidło ustanowione (n° 271) służy do włożenia między dwa wyrazy dane iakiekolwiek liczby wyrazów średnich, któreby były z danemi w postępie różnicowym.

Jeżeli trzeba np. złączyć 11 i 19 przez trzy liczby któreby były w postępie różnicowym z 11 i 19, widzę iż ten postęp będzie złożony z pięciu wyrazów, i że znaiąc pierwszy, pozostaie mi tylko do uformowania następnych znaleźć stosunek postępu. Wiem zaś iż piąty i ostatni wyraz 19 składa się z pierwszego wyrazu 11, więcéy 4 razy stosunek (n° 271); zatém ieżeli od 19 odeymę 11; reszta 8 składa się ze stosunku wziętego 4 razy. Więc ieżeli podzielę tę resztę przez 4, iloraz 2 iest stosunkiem postępu. Oznaczam więc średnie szukane. Pierwszy $=11+2=13$; drugi $=11+(2\times2)=15$; a trzeci $=11+(2\times3)=17$.

Postęp więc różnicowy który te trzy wyrazy średnie składaią ze skraynemi 11 i 19, iest

$\div$ 11 · 13 · 15 · 17 · 19.

274. W ogólności: *ażeby włożyć pomiędzy dwie liczby podane pewną liczbę średnich równoróżnicowych, potrzeba liczbę która ma być pierwszym wyrazem postępu odiąć od liczby która ma być ostatnim iego wyrazem i różnicę tę podzielić przez liczbę maiących się włożyć średnich zwiększoną o 1, a iloraz wypadły będzie stosunkiem który maiąc można iuż łatwo złożyć postęp*, n. p. ażeby włożyć pomiędzy 0 i 1, dziewięć średnich równoróżnicowych, gdy 0, ma być pierwszym wyrazem postępu a 1 ostatnim, będzie stosunek $=\frac{1-0}{10}=\frac{1}{10}$; postęp więc wypadnie.

$\div$ 0 · 0,1 · 0,2 · 0,3 · 0,4 · 0,5 · 0,6 · 0,7 · 0,8 · 0,9 · 1.

Widzimy iż między dwie liczby iakożkolwiek bliskie siebie, można zawsze włożyć tyle średnich równoróżnicowych ile się podoba.

275. *Summa wszystkich wyrazów iakiegokolwiek postępu różnicowego równa iest połowie iloczynu z summy skraynych przez liczbę wyrazów, albo iloczynowi z połowy summy skraynych przez liczbę wyrazów, albo iloczynowi z summy skraynych przez połowę liczby wyrazów.*

Wziąwszy bowiem iakikolwiek postęp różnicowy np. $\div$ 1 · 3 · 5 · 7 · 9 · 11, i wystawiwszy sobie że ten sam napisany iest odwrotnie tak, iż ostatni wyraz staiąc się pierwszym napisany iest pod pierwszym, przedostatni staiąc się drugim napisany iest pod drugim, i t. d. iak tu widzimy:

$\div$ 1 · 3 · 5 · 7 · 9 · 11
$\div$ 11 · 9 · 7 · 5 · 3 · 1

ieżeli teraz dodamy wyrazy odpowiadaiące, znaydziemy wszędzie iednakową summę, to iest summę skraynych; co widoczną iest rzeczą co do pierwszéy i ostatniéy summy: co zaś do innych łatwo postrzedz, iż iak drugi wyraz pierwszego postępu = wyrazowi pierwszemu *więcéy* stosunek, tak drugi wyraz drugiego postępu=pierwszemu swemu wyrazowi *mniéy* tenże stosunek, czyli że summa tych dwóch wyrazów = pierwszemu iednego postępu+stósunek i pierwszemu drugiego postępu — stosunek, to iest, pierwszemu iednego postępu+pierwszy drugiego postępu, czyli co na iednoż wychodzi,=dwom skraynym postępu danego.

Summa trzecich wyrazów równa będzie podobnie pierwszemu wyrazowi iednego postępu+dwa razy stosunek i pierwszemu drugiego postępu—dwa razy stosunek, czyli pierwszemu iednego postępu + pierwszy drugiego postępu, to iest, dwom skraynym postępu danego, i t. d.

Powtarzaiąc więc summę skraynych postępu danego tyle razy ile iest w nim wyrazów, otrzymamy dwa razy summę wszystkich wyrazów postępu. Więc, *summa wszystkich wyrazów iakiegokolwiek postępu różnicowego, i t. d.*

Tak summa wszystkich wyrazów postępu różnicowego

$\div 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 15 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 27 = \frac{(3+27)\times7}{2}$ czyli,

$\frac{30\times7}{2} = \frac{30}{2}\times7 = 30\times\frac{7}{2}$.

276. Poiąwszy dobrze poprzedzaiącą teoryią o postępach różnicowych, łatwo będzie rozwiązać następuiące zagadnienia:

1e. Maiąc wiadome *skrayne* (1) i *summę wyrazów* postępu różnicowego, ażeby znaleźć *liczbę wyrazów*, trzeba podzielić ich summę przez połowę summy skraynych: n. p. gdy wiadome są skrayne 5 i 15, tudzież summa wyrazów 60; liczba wyrazów $= \frac{60}{10} = 6$.

277. 2e. Maiąc wiadome *skrayne* i *liczbę wyrazów*, ażeby znaleźć *stosunek*, trzeba wyraz pierwszy odiąć od ostatniego, a resztę podzielić przez liczbę wyrazów zmnieyszoną o 1; np. gdy wiadome są skrayne 5 i 15, tudzież liczba wyrazów 6; stosunek będzie $= \frac{15-5}{6-1} = \frac{10}{5} = 2$ (porówn. n° 274). Odwrotnie.

278. 3e. Maiąc wiadome *skrayne* i *stosunek* postępu różnicowego, ażeby znaleźć *liczbę wyrazów*, trzeba odiąć wyraz pierwszy od ostatniego i podzielić resztę przez stosunek, a do ilorazu wypadłego dodać 1; np. gdy wiadome są skrayne 5 i 15, tudzież stosunek 2, liczba wyrazów będzie $\frac{15-5}{2} = \frac{10}{2} = 5$ powiększona o 1, to iest 6.

279. 4e. Maiąc wiadome *liczbę wyrazów*, *stosunek* i *wyraz ostatni*, ażeby znaleźć pierwszy, trzeba odiąć od ostatniego stosunek tyle razy wzięty ile iest wyrazów mniey iednym; np. gdy liczba wyrazów iest 6, stosunek 2, a wyraz ostatni 15; odeymuię od 15 stosunek 2 pięć razy wzięty, to iest 10, i mam 5 na wyraz pierwszy postępu.

280. 5e. Maiąc wiadome *liczbę wyrazów*, ich *summę* i wyraz *ieden ze skraynych*, ażeby znaleźć *drugi skrayny*, trzeba podzielić summę przez połowę liczby wyrazów i odiąć od ilorazu skrayny wiadomy. Tak ieżeli liczba wyrazów iest 6, ich summa 60, a wyraz pierwszy postępu iest 5; ostatni $= \frac{60}{3} - 5 = 20 - 5 = 15$.

Gdyby dany był ostatni wyraz 15; pierwszy byłby $= \frac{60}{3} - 15 = 20 - 15 = 5$.

281. 6e. Maiąc wiadome *liczbę wyrazów*, ich *summę* i *stosunek*, oznaczyć każdy wyraz w szczególności? Wypada znaleźć naprzód wyraz pierwszy. Podzieliwszy summę wyrazów przez połowę ich liczby, iloraz będzie summą skraynych. Że zaś ostatni wyraz = pierwszemu + stosunek tyle razy wzięty ile iest przed nim wyrazów, więc summa

(1) To iest wyrazy: pierwszy i ostatni postępu.

skraynych = podwóynemu pierwszemu + stosunek tyle razy wzięty, ile iest wyrazów mniey iednym. Więc ieżeli od znalezionéy summy skraynych odeymiemy ten iloczyn ostatni, a potém weźmiemy połowę reszty, ta będzie pierwszym wyrazem. Znaiąc wyraz pierwszy i stosunek łatwo iuż oznaczyć wszystkie wyrazy postępu; np. dana liczba wyrazów 6, ich summa 60, stosunek 2; będzie naprzód $\frac{60}{3} = 20$ summie skraynych; 20—(2+5)=10 podwóynemu pierwszemu. Zatém pierwszy wyraz iest 5, który iuż maiąc, łatwo iest złożyć cały postęp.

ZAGADNIENIA.

282. I. Znaleźć czwarty wyraz proporcyi różnicowéy którey wiadome są trzy $10 \cdot 8 = 15 \cdot x$; tudzież $3 \cdot x = 6 \cdot 8$? (1).

II. Znaleźć wyraz trzeci ciągłoproporcyionalny różnicowy do dwóch drugich $\div 24 \cdot 36 \cdot x$; tudzież $\div 22 \cdot 14 \cdot x$?

III. Znaleźć wyraz średni proporcyi różnicowéy ciągłéy którey wiadome są skrayne $\div 12 \cdot x \cdot 6$; tudzież $\div 5 \cdot x \cdot 17$?

IV. Wynaleźć setny wyraz postępu $\div 1 \cdot 4 \cdot 7 \ldots$ i t. d. tudzież 25ty postępu $\div 82 \cdot 79 \cdot 76 \ldots$ i t. d.

V. Włożyć między 4 i 32 sześć średnich równo różnicowych; tudzież ośm średnich między 45 i 9?

VI. Wieleż uderzeń zrobi młotek zegara godzinnego od godziny pierwszéy zrana, aż do 12stéy południowéy włącznie? a ileż zrobi gdyby wciąż bił od pierwszéy do 24 godziny?

VII. Ileż amb czyli połączeń 2ch liczb znayduie się w loteryi liczbowéy składaiącéy się z 90 numerów?

VIII. Pewien młodzieniec siedząc w kompanii, w odległości 6 sążni od szpaleru złożonego ze 100 drzew oddalonych o 3 sążnie od siebie, mówi: oto iest 100 iabłek które składam, założę się że w 2ch godzinach rozniosę te iabłka biorąc po iedném i kładąc u spodu każdego

(1) Ilości szukane niewiadome oznaczaią się pospolicie przez ostatnie głoski alfabetu, iakoto: x, y, z.

drzewa. Jest pytanie czy ten młodzieniec mógł wygrać zakład?

IX. Ponieważ ciało spadaiąc przebiega w 1 sekundzie 15 stóp, w 2éy 3 razy 15, w 3ciéy 5 razy 15, i tak daléy, w postępie iloczynu z 15×szereg liczb nieparzystych, 1 . 3 . 5 i t. d. iakążby drogę przebiegło spadaiąc przez minutę?

X. Znaiąc powyższą prawdę; ieżeli kamień w studnią wpuszczony w 6″ spada do wody, iakże głęboka iest studnia?

XI. Grabarz maiący kopać studnię zgodził się tak: aby mu za pierwszy sążeń głębokości zapłacono zł. 3, za drugi zł. 5, za trzeci zł. 7. i tak daléy w postępie różnicowym. Stało się iż skończywszy robotę za ostatni sążeń wziął 41 zł. ileż sążni kopał?

2) gdyby maiąc kopać studnię na 20 sążni głęboką zgodził się od całéy roboty zł. 400, lecz zachorowawszy po skończeniu sążnia osmego, nie mógł iuż kończyć roboty; ileż mu się za zrobioną iuż iéy część należy?

Dla większéy wprawy weźmy ieszcze zagadnienie które się da zastosować do różnych przypadków w rachunku postępów różnicowych:

XII. Zapłacono summę pewną w 12stu ratach które się przewyższały porówno o 10tal. a z których:

1) pierwsza była 100tal. Jakaż była ostatnia rata i iaka cała summa wypłacona we wszystkich ratach? lub

2) z których ostatnia była 210tal. Jakaż była pierwsza i iaka summa wszystkich? lub

3) niewiadoma przewyżka rat, lecz pierwsza była 100 a ostatnia 210tal. O ileż się przewyższały raty i iaka była cała summa? lub

4) niewiadoma liczba rat, lecz pierwsza była 100 a ostatnia 210tal. Ileż było rat, i iaka cała summa? lub

5) wiadoma summa 1860tal. lecz niewiadoma liczba rat, z których pierwsza była 100 ostatnia zaś 210tal. Jakaż była liczba rat i ich różnica? lub

6) wiadoma taż summa i liczba rat 12, z których pierwsza była 100tal. Jakaż była ostatnia rata i różnica rat? lub

7) wiadoma taż summa i liczba rat z których ostatnia była 210tal. Jakaż była pierwsza rata i różnica stała? lub

8) wiadoma taż summa, liczba rat i różnica 10tal. Jakaż była pierwsza a iakaż ostatnia rata?

O WŁASNOSCIACH PROPORCYY I POSTĘPÓW ILORAZOWYCH (GEOMETRYCZNYCH).

283. *W każdey proporcyi ilorazowéy, iloczyn skraynych iest równy iloczynowi średnich,.*

Naprzykład, w proporcyi 8 : 16 = 6 : 12; 8×12 czyli 96 iloczyn skraynych, =16×6 czyli 96 iloczynowi średnich; i w téy drugiéy, 15 : 5 = 6 : 2; 15×2 czyli 30 iloczyn skraynych, =5×6 czyli 30 iloczynowi średnich.

Taż sama własność ma mieysce we wszelkiéy innéy proporcyi ilorazowéy; bo w takiéy proporcyi każdy następnik iest równy iloczynowi z swego poprzednika przez spólny stosunek; więc na mieysce każdego następnika można położyć iego poprzednik rozmnożony przez spólny stosunek. Ze zaś po téy zamianie, iloczyn skraynych i iloczyn średnich znayduią się złożone z tych samych czynników, któremi są dwa poprzedniki i spólny stosunek; więc te dwa iloczyny są równe (1); więc *w każdéy proporcyi ilorazowéy, iloczyn* i t. d.

284. Więc 1e. *W każdéy proporcyi ilorazowéy ciągłéy iloczyn skraynych iest równy kwadratowi z wyrazu średniego.* Bo np. proporcyia ciągła ∴ 4 : 6 : 9 będąc ta sama co 4 : 6 = 6 : 9, daie 4×9 czyli 36 iloczyn skraynych =6×6 czyli 36, kwadratowi z wyrazu średniego 6.

285. 2e. *Łatwo iest znaleźć czwarty wyraz proporcyi ilorazowéy któréy trzy inne są wiadome.* Jeżeli wyraz którego szukamy iest skrayny, podzielimy iloczyn średnich przez skrayny wiadomy; iloraz będzie skraynym szukanym: ieżeli wyraz niewiadomy iest średni, znaydziemy go dzieląc iloczyn skraynych przez średni wiadomy (2). Naprzykład

(1) Pierwsza proporcyia w któréy 16=8×2, i 12=6×2, staie się 8 : 8×2 = 6 : 6×2. Jest zaś 8×6×2 iloczyn skraynych złożony z tych samych czynników co iloczyn średnich 8×2×6. Druga proporcyia w któréy 5=15×$\frac{1}{3}$; i 2=6×$\frac{1}{3}$, staie się 15 : 15×$\frac{1}{3}$ =6 : 6×$\frac{1}{3}$. Jest zaś 15×6×$\frac{1}{3}$ iloczyn skraynych, z tych samych czynników złożony co iloczyn średnich 15×$\frac{1}{3}$×6.

(2) Dzieląc iloczyn skraynych przez ieden skrayny wypada na iloraz drugi skrayny. Że zaś iloczyn średnich iest ten sam co iloczyn

gdy trzy wyrazy 4, 8, 12, iakiéy proporcyi są dane, a 4 iest iednym ze skraynych; ieżeli żądaią drugiego skraynego, rozmnożę średnie 8 i 12 ieden przez drugi i podzielę przez 4 ich iloczyn 96, iloraz 24 będzie skraynym żądanym: tak iż proporcyia zupełna będzie 4 : 8 = 12 : 24, lub

24 : 8 = 12 : 4. Jeżeli znamy trzy wyrazy 5, 15, 21, proporcyi ilorazowéy, a 15 iest iednym ze średnich, szukaiąc drugiego średniego, rozmnożę skrayne 5 i 21 ieden przez drugi, i podzielę przez 5, ich iloczyn 105, iloraz 8 będzie średnim szukanym; tak iż proporcyia zupełna będzie

5 : 7 = 15 : 21, lub 5 : 15 = 7 : 21.

286. Jeżeli idzie o wyraz średni proporcyi ciągłéy, znaydziemy go *biorąc pierwiastek z iloczynu skraynych.* Tak ażeby znaleźć wyraz średni proporcyi ciągłéy któréy 4 i 9 są skraynemi, mnożę 4 przez 9, iloczyn iest 36, którego pierwiastek 6 iest średnim szukanym: tak iż proporcyia zupełna iest $\frac{\cdot:\cdot}{\cdot\cdot}$ 4 : 6 : 9 lub $\frac{\cdot:\cdot}{\cdot\cdot}$ 9 : 6 : 4.

287. *Ile razy cztery liczby iak* 10, 5, 8, 4, *są takie iż iloczyn skraynych równa się iloczynowi średnich, takie cztery liczby składaią proporcyią ilorazową.*

Bo gdy $5\times8=4\times10$, będzie podzieliwszy przez 10 oba iloczyny, $\underset{10}{5\times8}=4$; ieżeli teraż podzielimy przez 8 obie strony, będzie $\frac{5}{10}=\frac{4}{8}$; więc 10 : 5 = 8 : 4 (n° 257). Więc, *ile razy cztery liczby* i t. d.

288. Więc, 1°. Gdy dwa iloczyny są równe, można z nich zawsze wyprowadzić proporcyią ilorazową, biorąc za skrayne dwa czynniki iednego z iloczynów a za średnie dwa czynniki drugiego iloczynu. Tak ztąd, że $24\times3=36\times2$, wnoszę iż 24 : 36 = 2 : 3, lub iż, 2 : 3 = 24 : 36.

289. Więc 2°. Jeżeli cztery liczby są w proporcyi ilorazowéy, składać ią także będą, gdy iakiekolwiek odmiany czynić z niemi będziemy, byleby była równość między iloczynem skraynych a iloczynem średnich.

skraynych, więc dzieląc iloczyn średnich przez skrayny wiadomy, znaydziemy skrayny szukany. Dzieląc iloczyn średnich przez ieden średni wypada na iloraz drugi średni. Że zaś iloczyn skraynych iest ten sam co iloczyn średnich, więc dzieląc iloczyn skraynych przez średni wiadomy, znaydziemy średni szukany.

Odmiany zaś te mogą być:

1od. Zmieniaiąc samo mieysce; np. ztąd że: 8 : 4 = 6 : 3 wnoszę iż:

$$\begin{cases} 8:6=4:3 \\ 6:8=3:4 \\ 6:3=8:4 \\ 3:6=4:8 \\ 3:4=6:8 \\ 4:3=8:6 \\ 4:8=3:6 \end{cases}$$

2°. Mnożąc lub dzieląc przez iednakową liczbę oba wyrazy pierwszego lub wyrazy drugiego stosunku, albo same poprzedniki lub same następniki. I tak:

$$\begin{cases} 8\times5 : 4\times5 = 6 : 3 \\ 8 : 4 = 6\times5 : 3\times5 \\ 8\times5 : 4 = 6\times5 : 3 \\ 8 : 4\times5 = 6 : 3\times5 \\ \frac{8}{5} : \frac{4}{5} = 6 : 3 \\ 8 : 4 = \frac{6}{5} : \frac{3}{5} \\ \frac{8}{5} : 4 = \frac{6}{5} : 3 \\ 8 : \frac{4}{5} = 6 : \frac{3}{5} \end{cases}$$

3ie. Dodaiąc następniki do poprzedników i stosuiąc ie do następników lub poprzedników; albo odeymuiąc następniki od poprzedników i stosuiąc ie do następników lub poprzedników. I tak:

$$\begin{cases} 8+4 : 4 = 6+3 : 3 \\ 8+4 : 8 = 6+3 : 6 \\ 8-4 : 4 = 6-3 : 3 \\ 8-4 : 8 = 6-3 : 6 \end{cases}$$

4te. Dodaiąc do siebie same poprzedniki i same następniki lub też odeymuiąc ie od siebie, i summy ich lub różnice stosuiąc do wyrazów pierwszego lub drugiego stosunku. np.

$$\begin{cases} 8+6 : 4+3 = 8 : 4 \\ 8+6 : 4+3 = 6 : 3 \\ 8-6 : 4-3 = 8 : 4 \\ 8-6 : 4-3 = 6 : 3 \end{cases}$$

We wszystkich bowiem tych przypadkach iloczyn skraynych równa się iloczynowi średnich.

290. *W iakimkolwiek zbiorze stosunków ilorazowych równych, summa wszystkich poprzedników tak się ma do summy wszystkich następników, iak którykolwiek poprzednik do swego następnika, lub iak summa pewnéy liczby poprzedników, do summy takiéyże liczby odpowiadaiących następników.*

Niech będzie, na przykład, zbiór stosunków równych $2:4=3:6=5:10$ i t. d. będzie 1e. $2+3+5:4+6+10=5:10$, lub $=3:6$, lub nakoniec $=2:4$.

Będzie 2e. $2+3+5:4+6+10=2+3:4+6$; w każdéy bowiem z tych dwóch proporcyy, iloczyn skraynych iest równy iloczynowi średnich.

291. Wniesiemy z téy saméy przyczyny, iż *w iakimkolwiek zbiorze stosunków ilorazowych równych, summa iakiéykolwiek liczby poprzedników ma się do summy takiéyże liczby odpowiadaiących następników, iak którykolwiek poprzednik do swego następnika, albo iak summa innéy iakiéykolwiek liczby poprzedników do summy takiéyże liczby odpowiadaiących następników.*

292. *Jeżeli rozmnożymy lub podzielimy cztery wyrazy iakiéy proporcyi ilorazowéy przez cztery wyrazy iednéy lub kilku proporcyy ilorazowych, poprzednik przez poprzednik i następnik przez następnik, iloczyny lub ilorazy stąd wypadaiące są w proporcyi.* Proporcyia bowiem polega na równości dwóch stosunków. To założywszy, 1ód. rozmnóżmy porządkiem wyrazy iakiéy proporcyi np.

$$2:4=3:6.$$

przez wyrazy innéy proporcyi np.

$$5:15=7:21$$

Iloczyny odpowiadaiące są:

$$10, 60, 21, 126.$$

Jest zaś stosunek 10 do 60 równy stosunkowi 21 do 126, ponieważ $\frac{60}{10}=\frac{126}{21}$; więc 1ód. iloczyny 10, 60, 21, 126 składaią proporcyią, to iest:

$$10:60=21:126.$$

2e. Podzielmy porządkiem wyrazy proporcyi

$$2:4=3:6:$$

przez wyrazy proporcyi

$$5:15=7:21.$$

Ilorazy ztąd wypadaiące są

$$\frac{2}{5}, \frac{4}{15}, \frac{3}{7}, \frac{6}{21}.$$

Jest zaś stosunek $\frac{2}{5}$ do $\frac{4}{15}$ równy stosunkowi $\frac{3}{7}$ do $\frac{6}{21}$; ponieważ $\frac{\frac{4}{15}}{\frac{2}{5}}=\frac{6}{21}$; więc, 2e. ilorazy $\frac{2}{5}, \frac{4}{15}, \frac{3}{7}, \frac{6}{21}$, składaią proporcyią, to iest mam

$$\frac{2}{5}:\frac{4}{15}=\frac{3}{7}:\frac{6}{21}.$$

Dowodzenie to miałoby mieysce gdybyśmy mieli do pomnożenia lub podzielenia porządkiem cztery wyrazy iakiéy proporcyi przez wyrazy dwóch, lub trzech, lub i t. d. proporcyy; wniesiemy więc w ogólności, iż *mnożąc lub dzieląc porządkiem wyrazy iakiéy proporcyi przez wyrazy odpowiadaiące iednéy lub kilku proporcyy, iloczyny lub ilorazy będą w proporcyi.*

Stosunki wypadaiące z dwóch lub więcéy stosunków ilorazowych rozmnożywszy poprzednik przez poprzednik i następnik przez następnik, nazywaią się *stosunki ilorazowe złożone.*

293. Więc *kwadraty, sześciany, i t. d. wyrazów proporcyi ilorazowéy są także w proporcyi*: bo te rozmaite potęgi są tylko iloczynami wyrazów proporcyy rozmnożonych porządkiem pewną liczbę razy przez siebie; ztąd że,

$2:4=3:6$, wniesiemy

1e. że $4:16=9:36$

2e. że $8:64=27:216$ i t. d.

Stosunki ilorazowe tak składane ze stosunków równych, nazywaią się *dwumnożne, tróymnożne*, i t. d.

294. Odwrotnie *pierwiastki kwadratowe, sześcienne, i t. d. wyrazów proporcyi ilorazowéy są także w proporcyi:* bo gdyby pierwiastki nie składały proporcyi kiedy ią ich potęgi składaią, trzebaby przypuścić że dwa stosunki nierówne, rozmnożone porządkiem pewną liczbę razy przez siebie, dałyby na iloczyny stosunki równe, co mieysca mieć nie może. I tak z tego, że

$$4:16=9:36,$$

i $8:64=27:216$,

wniosę, że $2:4=3:6$.

Stosunki w iakich są między sobą pierwiastki kwadratowe, sześcienne, i t. d. wyrazów składaiących stosunki ilorazowe, nazywaią się względem tych ostatnich *dwudzielnemi, tróydzielnemi*, i t. d.

Przeydźmy do teoryi postępów ilorazowych.

295. *W każdym postępie ilorazowym, wyraz którykolwiek równy iest pierwszemu rozmnożonemu przez stosunek*

wyniesiony do potęgi oznaczonéy liczbą wyrazów które poprzedzaią ten o który idzie.

Bo postęp ilorazowy iest ciągiem wyrazów, które podzielone następnie ieden przez drugi, daią tenże sam iloraz. Więc 1e. drugi wyraz postępu równy iest pierwszemu rozmnożonemu przez stosunek.

2e. trzeci wyraz postępu równy iest drugiemu rozmnożonemu przez stosunek, więc równy iest pierwszemu rozmnożonemu przez drugą potęgę stosunku.

3e. czwarty wyraz postępu równy iest trzeciemu rozmnożonemu przez stosunek; więc równy iest pierwszemu rozmnożonemu przez trzecią potęgę stosunku; i tak daléy (1); więc, *w każdym postępie ilorazowym, wyraz którykolwiek*, i t. d.

296. Więc, *w każdym postępie ilorazowym którego pierwszym wyrazem iest* 1, *wyraz którykolwiek równa się stosunkowi wyniesionemu do potęgi oznaczonéy liczbą wyrazów które poprzedzaią ten o który idzie.*

297. Zasada wyłożona (n° 295) służy do włożenia między dwa wyrazy dane iakiékolwiek liczby wyrazów średnich któreby były z niemi w postępie ilorazowym.

Chcę np. złączyć 4 i 128 przez cztery liczby któreby były w postępie ilorazowym z 4 i 128. Widzę iż postęp ten złożony będzie z sześciu wyrazów, i że, znaiąc pierwszy, uformuię bez trudności następne, skoro wynaydę stosunek postępu. Że zaś szósty i ostatni wyraz 128, składa się z pierwszego wyrazu 4 rozmnożonego przez stosunek wyniesiony do potęgi piątéy (n° 295); zatém ieżeli podzielę 128 przez 4, iloraz 32 który znaydę, będzie złożony z piątéy potęgi stosunku. Więc, ieżeli wyciągnę pierwiastek piąty z 32, ten pierwiastek który iest 2 będzie stosunkiem postępu (2). Przystępuię teraz do wyznaczenia średnich

(1) W postępie rosnącym ∴ 32 : 64 : 128 : 256 : 512, i t. d. iest 1e. $64 = 32 \times 2$, 2e. $128 = 64 \times 2 = 32 \times 2 \times 2 = 32 \times 4$ które iest kwadratem z 2. 3e. $256 = 128 \times 2 = 32 \times 2 \times 2 \times 2 = 32 \times 8$ które iest sześcianem z 2, i t. d. W postępie maleiącym ∴ 32 : 16 : 8 : 4 : 2, i t. d. iest 1e. $16 = 32 \times \frac{1}{2}$, 2e. $8 = 16 \times \frac{1}{2} = 32 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = 32 \times \frac{1}{4}$ które iest kwadratem z $\frac{1}{2}$, 3e. $4 = 8 \times \frac{1}{2} = 32 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = 32 \times \frac{1}{8}$ które iest sześcianem z $\frac{1}{2}$, i t. d.

(2) Przypuszczam iż są w pamięci potęgi liczb poiedynczych wyższe od sześcianu.

szukanych. Pierwszy $= 4 \times 2 = 8$; drugi $= 4 \times 4 = 16$; trzeci $= 4 \times 8 = 32$; czwarty $= 4 \times 16 = 64$. Postęp więc który te cztery średnie formuią z 4 i 128, iest

∴ 4 : 8 : 16 : 32 : 64 : 128.

298. W ogólności, *ażeby włożyć pomiędzy dwie liczby dane pewną liczbę średnich równoilorazowych, trzeba podzielić liczbę maiącą być wyrazem ostatnim przez liczbę maiącą być wyrazem pierwszym, a z wypadłego ilorazu wyciągnąć pierwiastek stopnia oznaczonego liczbą maiących się włożyć średnich zwiększoną o* 1. *Pierwiastek znaleziony będzie stosunkiem który maiąc, łatwo iuż potrafimy złożyć postęp.*

Tak maiąc włożyć pomiędzy dwie liczby 6 i 48 pięć średnich ilorazowych, gdy 6 ma być pierwszym wyrazem postępu a 48 ostatnim; dzielę 48 przez 6, a z ilorazu 8 wyciągam $\sqrt[6]{}$. Pierwiastek ten iest: 1,41419.... Postęp więc szukany będzie ∴ 6 : 8,48514 : 11,99960 : 16,96961 : 23,99823 : 33,93809 : 48 (1). Z tego widzimy, iż między dwie liczby iakiekolwiek można zawsze włożyć tyle średnich równoilorazowych ile się podoba, bądź dokładnie bądź przez przybliżenie.

299. W wyłożonéy dotąd teoryi stosunków, proporcyy i postępów różnicowych i ilorazowych, porównywaiąc działania arytmetyczne między sobą, postrzegamy tę odpowiadaiącą sobie własność, iż co się otrzymuie w stosunkach różnicowych przez dodawanie, odeymowanie, mnożenie lub dzielenie liczb, to samo otrzymuie się w stosunkach ilorazowych przez mnożenie, dzielenie, wynoszenie do potęg lub wyciąganie pierwiastków; a zatém, że działaniom dodawania lub odeymowania w stosunkach różnicowych odpowiadaią działania mnożenia lub dzielenia w stosunkach ilorazowych, działaniom zaś mnożenia lub dzielenia w pierwszych, że odpowiadaią, działania wynoszenia do potęg lub wyciągania pierwiastków w drugich.

(1) Przedostatni wyraz 33,93809 rozmnożony przez stosunek dałby wprawdzie tylko 47,99... z resztą którą pomijam. Wyciąganie tu pierwiastków staie się działaniem dosyć trudném, lecz wkrótce zobaczymy iak za pomocą logarytmów może być nader łatwém.

Wymienione własności wypływaią z natury tych stosunków; iak bowiem stosunek różnicowy znayduie się przez odeymowanie, a ilorazowy przez dzielenie; tak wszystko co wykonywać mamy przez odeymowanie w stosunkach różnicowych, powinniśmy wykonywać przez dzielenie w ilorazowych; a zatém, wszystko co wykonywać mamy przez dodawanie w pierwszych, powinniśmy wykonywać przez mnożenie w drugich; wszystko co wykonywamy przez mnożenie w łamłych, powinniśmy w tych wykonywać przez wynoszenie do potęg; nakoniec, wszystko co wykonywamy przez dzielenie w iednych, powinniśmy wykonać przez wyciąganie pierwiastków w drugich.

O téy prawdzie w dalszym ciągu iaśniéy się ieszcze przekonamy.

300. Tak, gdybyśmy chcieli wiedzieć iloczyn wszystkich wyrazów iakiego postępu ilorazowego, trzebaby iloczyn skraynych wynieść do potęgi oznaczonéy przez liczbę wyrazów postępu, i z téy potęgi wyciągnąć pierwiastek kwadratowy: np. w postępie ∴ 3 : 6 : 12 : 24 : 48, iloczyn wszystkich wyrazów $= (3 \times 48)^5$ czyli 144 wyniesione do potęgi piątéy, która iest 61917364224, a iéy pierwiastek kwadratowy = 248832, i liczba ta iest iloczynem szukanym (1). Gdybyśmy z iloczynu skraynych mieli złożyć potęgę parzystą np. szóstą, ósmą, i t. d. natenczas, ponieważ z niéy potrzebaby było potém wyciągnąć pierwiastek kwadratowy, oszczędza się pracy formuiąc tylko potęgę przez połowę mniéyszą, to iest trzecią, czwartą; i t. d. a ta byłaby iuż równą iloczynowi szukanemu.

301. Lecz częściéy zdarza się potrzeba wiedzieć iak się znayduie summa wyrazów iakiego postępu ilorazowego. Z tego zaś cośmy powiedzieli pod n° 299 wynika, iż summa ta nie ma działania odpowiadaiącego w postępie różnicowym. Aby ią otrzymać, *trzeba ostatni wyraz pomnożyć przez stosunek, odjąć od tego iloczynu pierwszy wyraz i podzielić resztę przez stosunek zmnieyszony iednością.*

Bo wziąwszy np. postęp ∴ 1 : 2 : 4 : 8 : 16 : 32 : 64 : mnóżmy iego wyrazy przez 2, będzie postęp ∴ 2 : : 32 : 64 : 128 : 256, którego summa wyrazów iest

(1) Tu okazanie téy prawdy nieco przydłuższe a daiące się ześdź rozumowaniem analogicznem rozumowaniu pod n° 275.

oczywiście dwa razy większa od summy wyrazów pierwszego. Odjąwszy zatém pierwszy od drugiego, zostanie 256—1 na summę żądaną.

Gdybyśmy mieli postęp którego stosunek iest 3, np. ∴ 1 : 3 : 9 : 27 : 81 : 243, rozmnożywszy go przez stosunek, będzie ∴ 3 : 9 : 27 : 81 : 243 : 729, postęp, którego summa wyrazów iest widocznie trzy razy większa od summy wyrazów pierwszego. Odjąwszy więc pierwszy od drugiego, będzie 729—1 równać się ieszcze podwóyney summie wyrazów postępu pierwszego. Zatém podzieliwszy 728 przez 2, to iest przez stosunek zmnieyszony iednością, otrzymamy 364 summę szukaną.

Gdyby stosunek był 4, znaleźlibyśmy przez rozumowanie podobne, iż aby mieć summę szukaną trzebaby pomnożyć przez 4 wyraz ostatni, odjąć od iloczynu wyraz pierwszy i podzielić resztę przez 3; a zatém słusznie wnieść możemy iż, *aby mieć summę wszystkich wyrazów iakiego postępu ilorazowego, trzeba*, i t. d.

Tak summa wszystkich wyrazów postępu ilorazowego ∴ 3 : 12 : 48 : 192 : 768 : 3072

$$= \frac{(3072 \times 4) - 3}{4 - 1} = \frac{12288 - 3}{3} = \frac{12285}{3} = 4095.$$

Gdyby postęp był maleiący, np. ∴ 2187 : 729 : 243 : 81 : 27 : 9, którego stosunek iest $\frac{1}{3}$, zachodziłoby nieco trudności w znalezieniu summy iego wyrazów podług powyższego prawidła, Znaydziemy ią iednak łatwo, uważaiąc iakoby postęp był odwrotnie rosnący zacząwszy od ostatniego wyrazu aż do pierwszego którybyśmy uważali za ostatni. Podany np. postęp uważaiąc iak gdyby był rosnący ∴ 9 : 27 : ... 2187, summa wyrazów iego $= \frac{(2187 \times 3) - 9}{3 - 1}$

$$= \frac{6561 - 9}{2} = \frac{6552}{2} = 3276.$$

Zupełna teoryia o postępach tak różnicowych iak ilorazowych iedna z nayciekawszych i nayużyteczniéyszych w początkach Matematyki, wykładana iest w Algiebrze. Mówiliśmy tu tylko tyle o niéy, ile wypadało naówić w traktacie Arytmetyki systematycznym.

ZAGADNIENIA.

302. Znaleźć czwarty wyraz proporcyi $4 : 12 = 6 : x$; tudzież $5 : 15 = x : 24$?

II. Znaleźć wyraz trzeci ciągłoproporcyionalny do dwóch drugich $\therefore 4 : 10 : x$, tudzież $\therefore 48 : 12 : x$?

III. Znaleźć wyraz średni proporcyi ciągłéy $\therefore 2 : x : 32$; tudzież $\therefore 36 : x : 4$?

IV. Znaleźć wyraz 33ci postępu $\therefore 3 : 6 : 12 \ldots$ i t. d. tudzież 8my postępu $\therefore 15309 : 5103 : 1701 \ldots$. i t. d.

V. Pewny graiący o skwitowanie lub drugie tyle (à quitte ou double) przegrał dziesięć razy raz po raz. Przy zaczęciu téy gry winien był drugiemu zł: 3. Ileż stracił w ostatniéy przegranéy?

VI. Włożyć 1) pięć średnich proporcyionalnych między 4 i 2916; tudzież 2) siedm między 768 i 3?

VII. Pewny człowiek chce przedać swego konia za summę oznaczoną przez 32 gwoździe u podków. Żąda tylko szeląg za pierwszy gwoździ, 2 szelągi za drugi, 4 za trzeci i t. d. za każdy gwoździ dwa razy więcéy niż za poprzedzaiący. Jakaż będzie cena konia?

VIII. Gdyby iedno ziarno pszenicy zasiane, 20 tylko ziarn każdego roku wydawało, ileż zboża z iednego ziarna za lat 10 mogłoby się rozmnożyć?

IX. *Sheram* ieden z królów Indyi tak był ucieszony z gry Szachów którą *Sessa* wynalazł, iż mu pozwolił żądać wszystkiego co mu się podoba za nagrodę, choćby i połowę iego królestwa. *Sessa* odpowiedział, iż byłby kontent gdyby dostał ziarno zboża za pierwszą przegródkę szachownicy, 2 za drugą, 4 za trzecią, i t. d. zawsze podwaiaiąc aż do sześćdziesiątéy czwartéy. Jakaż iest liczba ziarn zboża które *Sessa* miał odebrać?

X. Znaleźć iloczyn wyrazów postępu $\therefore 2 : 6 : 18 \ldots$ 4374 z ośmiu wyrazów złożonego?

O REGULE TRZECH.

303. Własność proporcyi ilorazowéy o iakiéy wspomnieliśmy wyżéy (n° 283) obeymuie regułę którą dla iéy użyteczności nazwano *złotą* (regula aurea), a którą pospolicie *regułą trzech* (regula trium) zowiemy. Przedmiotem reguły trzech iest znalezienie iednego wyrazu proporcyi któréy trzy inne wyrazy są wiadome.

Gdy wyraz szukany powiększa się albo zmniéysza w miarę powiększania się lub zmniéyszania wyrazu z którym on iest w związku, w tym przypadku mówimy, iż *wyrazy odpowiadaiące są w stosunku prostym* (ratio directa). Jeżeli zaś wyraz szukany zwiększa się w miarę iak się zmniéysza ilość z którą on iest w związku, albo gdy się zmniéysza w miarę iak się ta ilość powiększa, natenczas mówimy, że *wyrazy odpowiadaiące są w stosunku odwrotnym* (ratio inversa) (n° 259).

Naprzykład gdyby się pytano, ile pewnéy roboty może być dokonanéy przez pewną liczbę robotników, widoczną iest samo przez się rzeczą, iż robota iest w stosunku prostym liczby robotników; bo im więcéy robotników, tém więcéy będzie dokonanéy roboty; im mniéy robotników tém mniéy dokonanéy roboty. Lecz gdyby się pytano o długość czasu roboty wyznaczonéy, widzimy iż iest w stosunku odwrotnym robotników; bo im mniéy będzie robotników tém więcéy trzeba czasu, a im więcéy robotników tém mniéy czasu (1).

Można więc względnie do stosunku prostego lub odwrotnego wyrazów odpowiadaiących rozróżnić dwa gatunki reguły trzech; to iest, reguły trzech *prostéy* i reguły trzech *odwrotnéy*.

Reguła trzech iest wtenczas *prosta*, gdy wyrazy odpowiadaiące idą od *więcéy* do *więcéy*, lub od *mniéy* do *mniéy*; iest *odwrotna*, gdy wyrazy odpowiadaiące idą od *więcéy* do *mniéy*, lub od *mniéy* do *więcéy*.

Reguła trzech bądź prosta, bądź odwrotna, może być *poiedyncza* albo *składana* (simplex *vel* composita); iest poiedyncza, gdy są tylko trzy wyrazy wiadome; iest składana, gdy ich iest więcéy niż trzy. Co wszystko wyiaśnimy w przykładach.

Przykład I. 25 robotników zrobiło 32 łokci pewnéy roboty; ileż iéy zrobi 50 robotników w tym samym czasie?

(1) W tym i podobnych przykładach przypuszczamy że robotnicy wszyscy z iednakową usilnością pracnią.

Widzimy iż im więcéy będzie robotników tém więcéy będzie roboty; wyrazy odpowiadaiące idą od więcéy do więcéy: reguła więc iest prosta, i przywodzi się do znalezienia czwartego wyzazu proporcyi 25robot. 50robot. czyli 25 : 30 = 32łok. : xłok.

$x = \frac{32 \times 50}{25} = \frac{1600}{25} = 64$ łokci.

W rzeczy saméy, ieżeli 25 robotników zrobiło 32 łokci roboty pewnéy, 50 robotników powinni iéy zrobić dwa razy więcéy, to iest 64 łokci w tym samym czasie (1).

Przykład II. Jeżeli 12 łokci iakiego sukna kosztowało 240zł. ileż kosztować będzie 4 łokcie tegoż sukna?

Im mniéy będzie łokci tém mniéy kosztować będą: wyrazy odpowiadaiące idą od mniéy do mniéy, reguła więc iest prosta i przywodzi się do znalezienia czwartego wyrazu proporcyi 12łok. 4łok. czyli 3 : 1 = 240 : $x^{zł.} = \frac{240 \times 1}{3} = 80^{zł.}$

Liczba ta iest wyrazem szukanym: bo gdy 12 łokci kosztowały 240 zł. trzecia część 12 łokci powinna kosztować trzecią część 240 zł.

304. *Przykład III.* Jeżeli 20 ludzi spotrzebowali pewny zapas żywności w 16 dniach, w ilużby dniach 40 ludzi tenże zapas spotrzebowali?

Im więcéy iest ludzi tém mniéy być musi dni; wyrazy odpowiadaiące idą od więcéy do mniéy; reguła więc trzech iest odwrotna, i sprowadza się do znalezienia trzeciego wyrazu niewiadomego téy proporcyi 20 : 40 (lud. lud.) czyli 1 : 2 = x : 16dni; więc $x = \frac{16 \times 1}{2} = 8$d. Jakoż dwa razy więcéy ludzi spotrzebuią też samę żywność w dwa razy krótszym czasie.

Przykład IV. Kupuię na podszewkę 8 łokci materyi szerokiéy na $\frac{2}{3}$ łokcia, ileżby mi potrzeba było łokci innéy materyi szerokiéy na $\frac{2}{5}$ łok. na tęż podszewkę?

(1) W stosunku 25 : 50 można oba wyrazy podzielić przez 25 (nº 289) i byłoby 1 : 2 = 32 : $x = \frac{32 \times 2}{1} = 64$ łokci. Nie należy zapominać o podobném skracaniu gdzie go użyć można pamiętaiąc zawsze iż pierwszy z drugim lub z trzecim wyrazem daie się skracać.

Im materyia iest węższa tém więcéy trzeba łokci: reguła więc iest odwrotna i przywodzi się do znalezienia trzeciego wyrazu niewiadomego proporcyi $\frac{2}{3} : \frac{2}{5} = x^{łok.} : 8$łok

więc $x = \frac{8 \times \frac{2}{3}}{\frac{2}{5}} = \frac{144}{6} = 24$łok; liczba znaleziona łokci iest prawdziwa, trzeba bowiem trzy razy więcéy łokci kiedy iest materyia trzy razy węższa.

305. W dwóch poprzedzaiących przykładach chcąc ażeby wyraz niewiadomy x był na końcu, trzeba odwrócić pierwsze stosunki; a będzie w pierws: przykł: 2 : 1 = 16 : x czyli 1 : 1 = 8 : x; w drugim będzie $\frac{2}{5} : \frac{2}{3}$ czyli rozmnożywszy oba wyrazy przez 3, $\frac{2}{5} : 2$, albo rozmnożywszy ie ieszcze przez 3, będzie 2 : 6 = 8 : x, i t. d.

306. *Przykład V.* 5 ludzi, pracuiąc przez 8 dni zrobili 42 łokci pewnéy roboty, ileż iéy zrobi 10 ludzi przez 16 dni?

Ta reguła trzech iest składana; widzimy bowiem, iż stosunek między łokciami roboty zależy od dwóch stosunków, t. i. od stosunku między liczbą ludzi pracuiących i między dniami roboty, i że powinien być równy stosunkowi złożonemu z obudwu tych stosunków.

Ażeby uskutecznić należycie to złożenie, biorę każdy z tych stosunków oddzielnie; i tak uważaiąc stosunek ludzi mówię: im więcéy ludzi tém więcéy zrobią, mam więc 5 : 10 = 42 : $x = \frac{420}{5} = 84$łok. Uważam teraz że im więcéy dni tém więcéy będzie roboty, mam więc 8 : 16 czyli 1 : 2 = 84 : $x = \frac{84 \times 2}{1} = 168$łok.

307. Okazaliśmy wyżéy (nº 292) iż mnożąc porządkiem kilka proporcyy otrzymuiemy proporcyią ze stosunków złożonych. Aby zastosować tę prawdę, weźmy dwie powyższe proporcyie nie szukaiąc ważności x którą daie pierwsza: będziemy mieli.

$$5 : 10 = 42 : x$$
$$8 : 16 = x : x'$$

$$5 \times 8 : 10 \times 16 = 42 \times x : x \times x'$$

Gdy x iest czynnikiem w obu wyrazach drugiego stosunku można go wypuścić, będzie więc

$5\times 8 : 10\times 16 = 42 : x'$; więc $x' \frac{10\times 16\times 42}{5\times 8} =$

$\frac{2\times 2\times 42}{1\times 1} = 168.$

Moglibyśmy byli zaraz skrócić stosunki w napisanych proporcyiach, i tak można było zaraz napisać

$$1 : 2 = 42 : x.$$

oraz . . . $1 : 2 =$ i t. d.

308. W poprzedzaiącym przykładzie obadwa stosunki dane wpływały sposobem prostym na wypadek, lecz weźmy inny przykład: 24 robotników zrobiło 36 łokci pewnéy roboty w 14 dniach pracuiąc codziennie po 12 godzin; ileż trzeba robotników do zrobienia 30 łokci téyże roboty w 10 dniach gdy po 8 godzin na dzień pracować będą?

Dla ułatwienia poznania danych stosunków, układam ie w sposób następuiący:

24 robot.	36 łok.	14 dni,	12 god.
x . . .	30 . . .	10 . . .	8 . . .

Widzę, że im mniéy łokci tém mniéy trzeba robotników; lecz im mniéy dni tém więcéy trzeba robotników dla dokonania oznaczonéy roboty, również im mniéy godzin. Dwa więc ostatnie stosunki są odwrotne, a gdy czwarty wyraz ma być na końcu, muszę ie odwrócić, piszę zatém

$$\begin{aligned} 36 : 30 &= 24 : x \\ 10 : 14 &= x : x' \\ 8 : 12 &= x' : x'' \end{aligned}$$

czyli skróciwszy stosunki

$$\left.\begin{matrix} 6 : 5 \\ 5 : 7 \\ 4 : 6 \end{matrix}\right\} = 24 : x''$$

a znosząc ieszcze czynniki spólne przekréślone w obu wyrazach pierwszego stosunku, będzie;

$4 : 7 = 24 : x''$ lub

$1 : 7 = 6 : x''$; więc $x'' = \frac{7\times 6}{1} = 42$ liczbie robotników.

Odbywana w ten sposób reguła służy do rozwiązywania z równą łatwością reguły trzech złożonéy z ilukolwiekbądź stosunków prostych lub odwrotnych, a przeto zadań z pozoru nayzawikłańszych. Na przykład:

140 Robotników których siłę oceniono na 10 stopni, pracuiąc 234 dni po $7\frac{1}{2}$ godz. codzienie, na ziemi twardéy na stopni 7: usypali groblę 450 sąż. długą, sążeń i 4 stopy wysoką, a 3 sążnie i 2 stopy szeroką. Jakaż będzie długość grobli usypanéy przez 200 robotników maiących 11 stopni siły i pracuiących na ziemi 11 stopni twardéy, po $6\frac{1}{2}$ god. co dzień przez 378 dni. Grobla zaś ma być 2 sążnie 3 stopy wysoka, a 4 sążnie i stopa szeroka.

Ułożywszy porządkiem wszystkie dane wyrazy iak następuie:

robot.	st. siły	dni		godz.	sąż. dł.	sąż.	st. wys.
140 ..	10 ...	234 ..	po ..	$7\frac{1}{2}$ ..	450 ..	1 ..	4 ..
200 ..	11 ...	378 ..		$6\frac{1}{2}$ ..	x ..	2 ..	3 ..

sąż.	st. szer.	st. tward.
3 ..	2 ...	7.
4 ..	1 ...	11.

postrzegam, iż stosunek między sążniami długości zawisł od wszystkich innych zachodzących tu stosunków, bo z nich się składa. Napisawszy go z prawéy strony iak niżéy widzimy 450: x; układam z lewéy strony stosunki odpowiadaiące, bacząc na to czy wpływaią na wyraz czwarty w stosunku prostym lub odwrotnym, i wyrażam zaraz w liczbach iednogatunkowych te, które były podane w liczbach wielorakich, iest więc:

$$\left.\begin{matrix} 140 : 200 \\ 10 : 11 \\ 234 : 378 \\ \frac{15}{2} : \frac{13}{2} \\ 15 : 10 \\ 25 : 20 \\ 11 : 7 \end{matrix}\right\} = 450 : x \quad \text{sąż.}$$

czyli skracaiąc wyrazy

$$\left.\begin{matrix} 7 : 10 \\ 10 : 11 \\ 13 : 21 \\ 15 : 13 \\ 3 : 2 \\ 5 : 4 \\ 11 : 7 \end{matrix}\right\} = 450 : x \quad \text{sąż.}$$

a znosząc czynniki spólne poprzekréślane w ułożonych stosunkach; będzie

$$225 : 168 = 450 : x \quad \text{czyli}$$
$$1 : 168 = 2 : x = \frac{168 \times 2}{1} = 336^{\text{sąż.}}$$

309. Łatwo stąd spostrzedz możemy, iż wynalezienie wyrazu niewiadomego w regule trzech bądź poiedynczéy bądź złożonéy, sprowadza się zawsze do pomnożenia dwóch średnich a podzielenia ich iloczynu przez wyraz skrayny, co się zawsze iednakim sposobem odbywa; ściśle więc mówiąc iest tylko ieden gatunek reguły trzech, chociaż iest liczba prawie nieskończona zagadnień do których ią można stosować: takiemi są zagadnienia *procentu, odtrącania, spółki,* i t. d. o których niżéy mówić będziemy.

310. Czasem stosunki zachodzące w regule trzech składanéy nie są dane wyraźnie, wtenczas trzeba ie z warunków zagadnienia wyprowadzić i podług reguły ułożyć; np. dla 4 ludzi za 60zł. żywności wystarcza na 4 miesiące, gdyby żywność zdrożała o $\frac{1}{4}$ ceny, dla iluż ludzi wystarczy żywności za 200zł. na 6 miesięcy?

Postrzegam iż za więcéy pieniędzy więcéy będzie żywności dla ludzi, lecz im dłuższy czas z niéy żyć maią, tém ich mniéy być musi, równie im żywność iest droższa. Stosunek zaś pierwszéy ceny żywności, do drugiéy iest iak $1 : \frac{5}{4}$.

Układam więc wyrazy iak następuie:

$$\left.\begin{array}{r} 60 : 200 \\ 6 : 4 \\ \frac{5}{4} : 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{lud. lud.} \\ = 4 : x \end{array}$$

Skracaiąc i uskuteczniaiąc, znaydę $x = 7\frac{1}{6}$, to iest, iż żywność wystarczyć może dla 7 ludzi, i dla 8go zostaie $\frac{1}{6}$ téy kwoty którą na swoie wyżywienie przez 6 miesięcy wydaćby powinien, czyli ósmy ten człowiek mógłby żyć za tę kwotę $\frac{1}{6}$ sześciu miesięcy, zatém $\frac{6}{6} = \frac{2}{3}$ iednego miesiąca, t. i. 20 dni.

311. Proba zagadnień rozwiązanych przez regułę trzech bądź poiedynczą bądź składaną, uskutecznioną być może biorąc wyraz wynaleziony za wiadomy, a wyraz ieden z wiadomych za niewiadomy.

312. Trzeba iednak zawsze być ostrożnym w układaniu reguły 3ch, czasem bowiem zagadnienia które na pozór zdaią się do niéy należyć wcale przez nią rozwiązanemi być nie mogą. I tak gdyby zadano iż 100 żołnierzy uchodzą na dzień 6 mil, ileż uydzie na 1 dzień 1000 żołnierzy? Zastanowiwszy się spostrzegamy łatwo, iż 100, lub 1000, lub 2000 i t. d. żołnierzy razem idąc, tęż samą drogę odprawią co ieden żołnierz. Nie można więc ułożyć proporcyi $100 : 6 = 1000 : x$; chyba, gdyby żołnierze byli w różnych mieyscach lub w różne mieysca iść mieli, a chciano wiedzieć summę drogi przez wszystkich odbytéy przypuszczaiąc każdemu iednakową prędkość.

Podobnież gdyby podano: iż kamień spadaiąc w 1 sekundzie przebiega 15 stóp; ileż przebieży spadaiąc przez 4 sekund. Nie można tu ułożyć proporcyi. Wiemy bowiem z doświadczeń fizycznych, iż ciało iakie spadaiąc przebiega w 2éy sek. 3 razy tyle co w pierwszéy, w 3éy sek. iuż 5 razy tyle co w pierwszéy, i t. d.

Są więc przypadki w których rachunek nie może być podciągnięty pod regułę 3ch lubo do niéy zdaie się należyć, gdyż nie zawsze wyraz szukany powiększa się lub zmnieysza w miarę iak się powiększa lub zmnieysza wyraz do którego on się odnosi, i przeciwnie. Że zaś nie zawsze łatwo iest rozeznać podobne przypadki, naylepsza więc wtéymierze reguła iest: *gruntownie poiąć całe zadanie i to tylko rachować co dobrze rozumiemy.*

ZAGADNIENIA.

313. I. Za $40\frac{1}{2}$cet. pewnego towaru, dano $68\frac{5}{8}$#; ileż będzie tego samego towaru za $45\frac{3}{4}$#?

II. Rzemieślnik robiący w 9 dniach 21,9 łok. pewnéy roboty, ileżby potrzebował czasu do zrobienia iéy 42,75 łok. przypuściwszy iżby robił zawsze iednakowym sposobem?

III. Pewna osoba ieżdżaiąc $7\frac{1}{2}$ mil na dzień, potrzebuie do odprawienia drogi 20 dni; lecz chce odprawić tęż drogę w 12 dniach, ileż mil na dzień ma ieździć?

IV. Rachuiąc czerwony złoty po 18zł. trzeba na zapłacenie długu 324 czer. zł; gdy na spłacenie tego długu od-

dano 300 czerw. zł. w złocie, po ileż złotych rachowano dukat?

V. Pewny gospodarz oddawszy na polu dziesięcinę ze swoich snopków, zwiózł ich 702 do stodoły. Ileż miał wszystkich snopków, a ile dziesięcina wynosiła?

VI. Pewne miasto miało utrzymywać 1000 żołnierzy przez 3 miesiące, a 500 przez 4 miesiące; później przysłano rozkaz, ażeby wszyscy ci żołnierze iednakowy czas w temże mieście pozostali, z zastrzeżeniem iednak, iżby miasto tyle tylko poniosło kosztów iak gdyby pierwszy rozkaz był uskuteczniony. Jakże długą pozostaną w mieście, oba te oddziały woyska?

VII. Zapłacono za $23^{sąż.}$ $5^{st.}$ $4^{c.}$ pewnéy roboty $43^{zł.}$ $10^{gr.}$ $12^{de.}$ ileżby trzeba zapłacić po téy saméy cenie za $77^{sąż.}$ $3^{st.}$ $8^{c.}$

VIII. Ugodzono furmana do przewiezienia $50^{cet.}$ towaru o 28 mil, lecz że okazała się potrzeba aby umówioną liczbę cetnarów tylko o 22 mil przewiózł; ileż mu za to można ieszcze przyłożyć cetnarów towaru?

IX. 8 Ludzi z których każdy zrobił $3^{łok.}$ pewnéy roboty na dzień, zyskali razem $1500^{zł.}$ za dni 40; ileż 12 ludzi robiąc każdy na dzień po $4^{łok.}$ téyże roboty zyskają za dni 45?

X. Iluż robotników trzeba do wymurowania muru na $256^{stóp}$ długiego, $4\frac{1}{6}^{st.}$ szerokiego a $12\frac{1}{2}^{st.}$ wysokiego, gdy ten w tym samym czasie ma być wymurowany, w iakim 3 robotników wymurowali mur na $16^{st.}$ długi, $2\frac{1}{2}^{st.}$ szeroki, a $6\frac{1}{4}^{st.}$ wysoki?

XI. Pewny furman zgodził się na przewiezienie 30 beczek trunku o 20 mil za 100 tal. Innym razem przewieźć miał 70 beczek tegoż trunku o 30 mil; lecz że droga pogorszyła się bardzo, podwyższył o $4^{tą}$ część cenę przewozu. Ileż mu teraz przypadnie zapłacić talarów?

XII. 20 robotników przez 18 dni po $9^{god.}$ codzień pracuiąc wykopali $360^{sąż.}$ rowu, $4\frac{2}{3}^{łok.}$ szerokości, $3\frac{3}{4}^{łok.}$ głębokości i wzięli za tę robotę $190^{tal.}$ $4^{zł.}$ $24^{gr.}$; 54 robotników przez 60 dni po $10^{godz.}$ codzień pracuiąc, ileż wykopią sążni rowu na $7\frac{1}{2}^{łok.}$ szerok: a $2\frac{2}{5}^{łok.}$ głębokości, i wieleż za tę robotę wezmą?

XIII. Funt ołowiu spadaiąc z pewnéy wysokości w 1 sekundzie przebiega 15 stóp; 100 ℔ ołowiu spadaiąc z teyże wysokości ileż w $1''$ przebiegą?

XIV. Jeżeli ieden koń uciągnie $10^{cet.}$ wieleż cetnarów uciągnie 12 koni przypuszczaiąc równie mocne konie i równie dobrą drogę?

O REGULE ŁAŃCUCHOWÉY.

314. *Reguła łańcuchowa* (regula catenaria) iest tylko szczególnym gatunkiem reguły trzech składanéy. Dla tego zaś ią nazywaią łańcuchową że stosunki w nią wchodzące składaią nieiako ogniwa; znayduiemy w niéy bowiem stosunek między dwoma ilościami ze stosunku który ma iedna z tych dwóch do innéy; ta inna do trzeciéy, trzecia do czwartéy i t. d. aż do stosunku między iedną z wiadomych i ostatnią niewiadomą.

Wiedząc np. że $22^{łok.}$ polskich czynią $19^{łok.}$ berlińskich, 19 zaś łok. berliń: idzie na $15^{łok.}$ bawarsk: a $35^{łok.}$ bawarskich na 51 hamburskich; ieżeli chcę doyść wiele $50^{łok.}$ polskich uczynią łokci hamburskich? piszę proporcyie:

ł. pol.	ł. ber.	ł. pol.	ł. ber.
22 :	19 =	50 :	x
ł. ber.	ł. baw.	ł. ber.	ł. baw.
19 :	15 =	x :	x′ (1)
ł. baw.	ł. hamb.	ł. baw.	ł. hamb.
35 :	51 =	x′ :	x″

czyli gubiąc czynniki spólne w ułożonych stosunkach i skracaiąc ie (n° 307) będzie

$$\left.\begin{array}{r} 22 : 3 \\ 7 : 51 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{ł. pol.} \quad \text{ł. hamb.} \\ = 50 : x'' \end{array}$$

ł. pol. ł. hamb.

zatém $154 : 153 = 50 : x''$

a więc $x'' = \frac{7650}{154} = 49675$ łok. hamb.

W przykładzie tym zachodziło pytanie, 50 łok. pol. ile uczynią łok. hambur. Liczby te można nazwać głównemi

(1) Napisaliśmy tu 22. : 19; wszakże widzimy w tym razie iż 22 ł. pol. wyrównywaią 15 ł. baw., można było więc prosto napisać stosunek 22 : 15.

zagadnienia. Pierwszą nazwiemy *główną wiadomą*, drugą *główną niewiadomą*. Zważmy ieszcze, że między danemi muszą się znaleźć koniecznie dwie liczby inne tegoż samego gatunku, co wspomnione dopiero dwie liczby główne.

315. W układaniu stosunków trzeba pamiętać iż należy zaczynać od liczby tego gatunku co główna wiadoma, a skończyć ostatni stosunek na liczbie gatunku co główna niewiadoma. Pośrednie zaś stosunki tak mają być ułożone aby ie zawsze ten gatunek liczb zaczynał, na iakim się kończy poprzedzaiący stosunek. Tym sposobem dane stosunki formuią proporcyie takie, iż wyraz niewiadomy pierwszéy staie się iednym z wiadomych w drugiéy, wyraz niewiadomy w drugiéy staie się iednym z wiadomych w trzeciéy, i t. d.

316. Używamy téy reguły szczególniéy w zamianie miar, wag i pieniędzy iednego kraiu na miary, wagi i pieniądze drugiego, w rachunkach wexlowych, i t. p.

Gdy mamy pod ręką tablice porównania miar i wag używanych w różnych kraiach, natenczas zagadnienia tego gatunku rozwiązać możemy wprost przez regułę trzech poiedynczą.

I tak, co do powyższego przykładu, ieżeli wiem że łokcie polskie maią się do hamburskich iak 190 : 189 znaydę

ł. pol. ł. ham.

od razu przez proporcyią 190 : 189 = 50 : x, że x = 49,736: odpowiedź różniąca się od pierwszéy tylko o 61 części tysiącznych, i to dla tego że stosunki w poprzedzaiącém zagadnieniu są wzięte przez przybliżenie.

317. Reguła łańcuchowa służy także do rozwiązania wielu zagadnień w rachunkach procentu (o których niżéy powiemy), w rachunkach mnożeń i dzieleń liczb wielorakich, i t. d.

Przykład: 7 łokci pewnéy roboty kosztuie 13zł. pytaią się ile przypadnie zapłacić za piętnaście sążni téyże roboty? układam stosunki w ten sposób:

sąż.		łok.				
1	:	3		sąż.		zł.
łok.		zł.	= 15	:	x	
7	:	13				

7 : 39 = 15 : x = $\frac{39 \times 15}{7} = 83\frac{4}{7}$zł.

318. W regule łańcuchowéy a mianowicie w zagadnieniach podobnego rodzaiu iak poprzedzaiące, to iest, w które wchodzą liczby wielorakie, trzeba się często domyślać stosunków pośrednich i dla dopełnienia warunków przepisanéy (n° 315) reguły, przybierać podziały głównéy iedności. Tak gdyby się pytano po czemu wypada arkusz papieru do pisania kiedy 3 bele kosztuię 20#? układam stosunki w sposób następuiący:

ark.		libra			
24	:	1			
liber		ryza			
20	:	1			
ryz		bela			
10	:	1		ark.	gł.
bel		#	=	1	: x
3	:	20			
#		zł.			
1	:	18			
zł.		gr.			
1	:	30			

czyli skróciwszy 4 : 3 = 1 : x, które = $\frac{3}{4}$gr.

319. Niechby się pytano: na wiele tygodni wystarczy 5ciu ludziom pewna żywność, gdy ta sama wystarcza 10ciu ludziom na dni 80? ułożywszy wyrazy:

lud.		dni.			
10	:	80		lud.	tyg.
dni		tyg.	= 5	:	x
7	:	1			

wypada 7 : 8 = 5 : x, x = $\frac{40}{7} = 5\frac{5}{7}$ tygodni,

co iest przeciw oczywistości, gdyż dwa razy mnieyszéy liczbie ludzi, powinna wystarczyć ta sama żywność na 2 razy dłuższy czas.

Wnieśmy stąd, iż często zagadnienie zdaiące się być podobne do rozwiązania przez regułę łańcuchową, nie może być przez nią rozwiązane, co się zdarza gdy zachodzą stosunki odwrotne, i wtenczas zagadnienie rozwięzuiemy za pomocą reguły trzech składanéy, skoro tylko iest dostateczna liczba warunków danych, co z łatwością poznaiemy pisząc zadanie w sposób podany pod n° 308.

320. Uważmy teraz iż gdy w regule trzech składanéy a zatém i w łańcuchowéy dla znalezienia wyrazu niewia-

domego, trzeba iloczyn średnich dzielić przez iloczyn skraynych wiadomych, więc gdybyśmy drugi stosunek proporcyi, ark. gr.
w przykładzie pod nº 318, 1 : x napisali odwrócony nad stosunkami z lewéy strony, mielibyśmy tyle stosunków iedne pod drugiemi podpisanych ile iest warunków

gr.	ark.
x	1
ark.	libr.
24	1
liber.	ryza
20	1
ryz.	bela
10	1
bel.	#
3	20
#	zł.
1	18
zł.	gr.
1	30

tak, iż po skróceniu według prawideł, podzieliwszy iloczyn wypadły z wyrazów drugiéy kolumny czyli następników, przez iloczyn wypadły z wyrazów pierwszéy czyli z poprzedników wiadomych, znaleźlibyśmy tęż samę odpowiedź co i podług pierwszego sposobu.

Taki sposób układania stosunków we dwie kolumny bądź w regule trzech składanéy, bądź w łańcuchowéy zowie się po niemiecku *kettensatz* albo *reesische Regel* od wynalazcy Holendra P. *Rees*. Wszakże sposób ten powszechnie w handlu używany a nawet podawany iako nie zawisły od reguły proporcyi, iest prawie zupełnie mechanicznym i podlega omyłkom zwłaszcza kiedy zachodzą stósunki odwrotne (nº 319) do których także chcą go rozciągać. Jest on pozornie łatwieyszy i krótszy od rachunku za pomocą proporcyi, lecz i ten nie iest trudnym skoro się go porządnie i na rozum uczymy. Nadto rachunek za pomocą proporcyi ćwiczy w myśleniu, a na rozumowaniu oparty zabezpiecza od błędu. W nimto szczególniéy obeymuiemy razem całe zadanie, cel iego i wewnętrzny związek, poznaiemy czyli warunki dane są dostateczne lub nie; widzimy

zaraz potrzebne ku rozwiązaniu działania, i sposoby skrócenia drogi do celu który z pewnością osiągamy.

321. Co się tyczy proby zagadnień przez regułę łańcuchową rozwiązanych, tę uskutecznić możemy podobnie iak mówiliśmy pod nº 311.

322. Wspomnieliśmy wyżéy (nº 316) o zamianie miar, wag, i t. d. za pomocą tablic ich porównania. Wypada teraz powiedzieć o użyciu takowych tablic.

Gdy miary wielkości, wagi i monety w różnych kraiach a nawet i w znacznieyszych miastach iednego kraiu znayduią się rozmaite: przeto dla porównania ich między sobą musiano ie porównywać z pewną iaką tegoż rodzaiu miarą.

I tak, do porównania miar liniiowych czyli długości, używano prawie powszechnie dawnéy stopy paryzkiéy czyli francuzkiéy podzielonéy na 144 lub 1440 cząstek równych nazwanych *liniiami*.

Do porównania powierzchni, używano téyże stopy kwadratowéy; a do porównania obiętości cała sześciennego téy stopy.

Do porównania wag, używano grzywny kolońskiéy podzielonéy na 65536 cząstek równych (*Richtpfennig*), albo funta amszterdamskiego (*Troysgewicht*) podzielonego na 10240 części równych nazwanych *essami*, albo nakoniec dawnego funta paryzkiego nazwanego wagą grzywny (*poids de marc*) dzielącego się na 9216 *granów* (*grains*).

Stosownie do tych podziałów miar uważano ile obranych części znaydowało się w stopach, łokciach, korcach, funtach i t. d. innych kraiów, i układano tablice służące do poznania wzaiemnych stosunków między temiż miarami i do zamiany iednych na drugie.

323. Jakoż wiedząc, iż iakich cząstek np. stopa francuzka ma 144, takich stopa reńska zawiera 139,13; wiem iuż ich stosunek do siebie, to iest: że stopa paryzka tak się ma do reńskiéy, iak 144 : 139,13 czyli
st. par. st. reń.
1 : 1 = 14400 : 13913.

Więc stopa paryzka $= \frac{14400}{13913} = 1{,}035003$ stopy reńskiéy,
a stopa reńska $= \frac{13913}{14400} = 0{,}96618$ stopy paryzkiéy.

Skoro więc mamy stopy paryskie do zamienienia na reńskie, rozmnożmy tylko 1,035003 przez liczbę stóp pa-

ryzkich a iloczyn będzie liczbą stóp reńskich. Przeciwnie ieżelibyśmy stopy reńskie zamienić chcieli na paryskie, rozmnożylibyśmy 0,96618 przez liczbę daną stóp reńskich, a iloczyn byłby liczbą stóp paryskich.

Łatwo także iest poznać iż 13913 stóp paryskich wyrównywaią długości 14400 stóp reńskich: gdyż 14400 cząstek stopy paryskiéy wzięte 13913 razy, daią tęż samę długość, iak 13913 takichże cząstek stopy reńskiéy wzięte 14400 razy.

324. Maiąc więc tablice takiego porównania miar i wag w iakichkolwiek cząstkach równych, wiedzieć zawsze możemy ile trzeba iednych miar na drugie, odwróciwszy tylko stosunek. I na témto właśnie porównaniu zależy użycie tablic. Podobne tablice umieściliśmy przy końcu tego dziełka, porównywnaiąc w nich miary i wagi z cząstkami nowych miar francuzkich o których układzie przyłączona iest także osobna wiadomość.

325. Jeżeli stosunek o iakim mówimy, wyrażony iest wielkiemi liczbami, a nie idzie o zupełną ścisłość; można go bez znacznego uchybienia skrócić w wyrażeniu za pomocą sposobu podanego pod n° 173. Znayduiąc np. że
milimetry
łokieć lipski ma 565,2 a łokieć hamburski 572,97; zmnieyszymy naprzód te liczby dzieląc ie przez 3, będzie stosunek łokcia lipskiego do łokcia hamburskiego = 1884 : 1909,9

ł. lip. ł. hamb. ł. lip. ł. hamb.

czyli 1 : 1 = 18840 : 19099; więc $1 = \frac{18840}{19099} = 0{,}986439$,

ł. hamb. ł. lip.

a przeciwnie $1 = \frac{19099}{18840} = 1{,}013747$; łokci zaś lipskich 19099 = 18840 hamburskich.

Maiąc więc np. 120 łok. lipsk. zamienić na łokcie hamburskie, ułożę proporcyią:

ł. lip ł. hamb. ł. lip. ł. hamb.

19099 : 18840 = 120 : x ; x znaydziemy = 118,37.

Uważaiąc teraz stosunek 19099 : 18840 iako ułomek $\frac{18840}{19099}$ (n° 256), szukam iego wyrażenia prostszego przestaiąc podług okoliczności na więcéy lub mniéy krótszém. I tak znaydę odpowiadaiące ułomki $\frac{72}{73}$, $\frac{73}{74}$, $\frac{218}{221}$, $\frac{291}{295}$, i t. d. Mogę więc za pierwszy stosunek wziąć 73 : 72, albo 74 : 73, lub też 221 do 218 i t. d. Wypadki zawsze będą te same w liczbach całych, i tylko w częściach setnych, tysięcznych i t. d. mało odmienne. Równie otrzymalibyśmy tę samę odpowiedź gdybyśmy pomnożyli 0,986439 przez 120, to iest, części łokcia hamburskiego którym się równa łokieć lipski przez liczbę łokci lipskich.

326. Należy ieszcze uważać, iż znayduią się tablice, w których porównywaią ile iakich miar idzie na pewną obraną: natenczas oczywista iest iż porównanie będzie biorąc prosto liczby przy każdéy miarze napisane. Np. ieżeli na 1000# bawarskich trzeba 1133,04 amszterdamskich, a 1195 berlińskich, widzimy iż 1133,04# amszterd. = 1195# berlińsk. Wiedząc także, iż na czystą grzywnę kolońską srebra rachuie się sztuk 86,688 iednozłotowych polskich a 42,55 szylingów angielskich, wniosę iż 86688 złotych polskich = 42550 szyling. angielskich.

327. Naostatek uczynimy ieszcze uwagę, iż w zamianie miar, pieniędzy, i t. p. z korzyścią użyć można ułomków złożonych czyli *ułomków z ułomków*.

Na przykład: rossyyski rubel srebrny waży $\frac{95}{2}$ sztywerów holenderskich, sztywer waży $\frac{1}{20}$ zł. hol. ten iest $\frac{2}{5}$ tal. hol. ten zaś waży $\frac{71}{50}$ tal. prusk. który iest $\frac{1}{3}$ dukata wiedeńskiego; iakiż iest stosunek rubla do dukata wiedeńskiego?

Wysłowienie okazuie, iż rubel iest $\frac{95}{2}$ z $\frac{1}{20}$ z $\frac{2}{5}$ z $\frac{71}{50}$ z $\frac{1}{3}$ dukata wiedeńskiego: mnożąc te ułomki przez siebie (n° 166) będzie ułomek $\frac{1349}{3000}$ na ważność rubla względem dukata wiedeńskiego.

Znaiąc tę ważność, łatwo iest znaleźć ile iakakolwiek liczba rubli ważyć będzie dukatów wiedeńskich. W tym razie dosyć iest pomnożyć licznik znalezionego ułomku przez podaną liczbę rubli, a iloczyn podzielić przez mianownik; iloraz okaże liczbę dukatów szukaną. I tak np. 250 rubli ross. uczynią 112 i $\frac{5}{12}$# wiedeńsk.

Powyższe zagadnienie możnaby ieszcze i tak wysłowić: 2 ruble rossyyskie czynią 95 sztywerów holenderskich, tych 20 czyni 1 złoty holend. 5 zł. holend. czynią 2 tal. holend. tych zaś 50 czyni 71 tal. pruskich, których 3 idzie na dukat wiedeński; 250 rubli ross. ileż więc uczynią dukatów wiedeńskich?

Gdybyśmy ułożyli dane stosunki we dwie kolumny (n° 320) to iest, gdybyśmy pisali następnie mianowniki powyższych ułomków po lewéy stronie linii a liczniki po prawéy, nakoniec x położyli z lewéy a 250 z prawéy znaleźlibyśmy ten sam wypadek.

To nas naprowadza na myśl, że rachunek zwany *kettensatz* nie iest czém inném tylko rachunkiem za pomocą ułomków z ułomków. Oparty więc na ich teoryi może mieć tę pewność na któréy mu zbywa.

ZAGADNIENIA.

328. I. Gdy 113 łok. berliń. czynią 120 łok. rossyysk. a 64 łok. rossyy: czynią 79 łok. pol. wieleż 50 łok. ber. uczynią łokci polskich?

II. 58 frydrychsdorów ileż uczynią dukatów w złocie, rachuiąc 16 tal: na 3 frydrychsdory a $12\frac{1}{2}$ tal: na 4# w złocie?

III. Jeżeli 86 łok. pol. czynią 97 łok. litewsk. 54 łok. litewsk. idzie na 59 rossyysk. 32 rossyysk. na 33 amszterd. tych 31 na 24 lipsk. tych 15 na 13 berlińsk. tych 7 na 6 wiedeńsk. tych 29 na 30 amszterd. tych 177 na 105 bawarskich; 128 łok. pol. ileż uczynią bawarskich?

IV. Jeżeli 13 tal. holendersk. czyni 33 zł. reńskie, a 72 zł. reńskie idzie na 35 portugalskich *millerées*, tych zaś 7 na 34 liry florenckie, tych 35 na 27 franków francusk. tych 611 na 28 funtów szterlingów, tych 68 na 399 dukatów neapolitańsk. tych 55 na 59 rubli srebrnych rossyyskich; ileż 1222 tal. holenderskich uczynią srebrnych rubli rossyyskich?

V. Wieleż kosztuie 8℔ hamburskich pewnego towaru, gdy tegoż 3℔ berlińskie kosztuią 10zł.

VI. Ileż talarów kosztować będzie bela papieru do pisania, gdy arkusz kosztuie 2 szelągi?

VII. Ileż łutów pewnego towaru dostać można za gr. 3 kiedy 5℔ tego towaru kosztuią 8tal.?

VIII. Jeżeli gdański ankier wina kosztuie 18tal. po czemuż wypada przedawać nowy garniec warszawski chcąc mieć zysku 12# na 100 (co piszemy tak, $12\frac{0}{0}$).

IX. Ileż trzeba zapłacić za 650 łok. sukna, którego łokieć 1 chcą przedawać po 12 zł. z zarobkiem $20\frac{0}{0}$, lubo na na swóy łokieć przedaiąc tracą 2 łokcie na sto, albo $2\frac{0}{0}$?

X. Ileż zapłacić przypadnie za 240℔ pewnego towaru którego funt przedaią po zł. 1 gr. 12 chcą zarobić $12\frac{0}{0}$, lubo ważąc na swóy funt tracą $2\frac{1}{2}$℔ na $\frac{0}{0}$?

XI. 54 łok. lipsk. idzie na 53 łok. warsz, 180 zaś łok. lip. pewnéy materyi kosztowało 75# w złocie rachuiąc# po zł. 20. Po ileż zł. trzeba będzie przedawać łokieć polski téy materyi aby zarobić $15\frac{0}{0}$ mimo tego że w miarze straci się 2 łok. na $\frac{0}{0}$?

XII. Przyiaciele Platona wykupuiąc go z niewoli, dali 3000 drachm; ileż to czyni tal. wiedząc że 61 drachm czyni 64 franki, a 128 franków idzie na 207 zł. pol?

XIII. Mury Ateńskie od portu Falereyskiego miały długości 35 stadiów a 40 do portu Pireyskiego. Mury te złączone były na końcach trzecim poiedynczym 60 stadiów długim. Uważaiąc te mury poiedynczo, iakaż ich długość w miłach ieograficznych rachuiąc na stadium 135 kroków których mila ma 6000?

XIV. Podług P. *Condamine* góra Chimborako wysoka iest na 3217 sążni paryskich (*toises*). Znaiąc z dołączonych przy końcu dziełka tablic metrologicznych stosunek miar francuskich z polskiemi, znaleźć ile ta wysokość czyni stóp polskich?

O REGULE PROCENTU.

329. *Reguła procentu* (regula trium usuræ) iest regula 3ch zastosowana do wyznaczenia *procentu* czyli kwoty należącéy się za pieniądze pod pewnemi warunkami pożyczone które zowiemy kapitałem, lub do wyznaczenia kapitału z wiadomego procentu i t. p. (1).

Przykład 1. Ileż przyniosą procentu na rok 3575zł. rachuiąc po 5 od sta rocznie, to iest: iż 100zł. przynoszą w roku 5zł. co piszemy tak: $5\frac{0}{0}$.

Widoczną iest samo przez się rzeczą, że im więcéy kapitału, tém więcéy będzie procentu; iest więc proporcyia:

	kap.	kap.	pro.	pro.
	100	: 3575 =	5	: x
czyli	20	: 3575 =	1	: x
czyli nakoniec	4	: 715 =	1	: x; a zatém

$x = \frac{715}{4} = 178\frac{3}{4}$zł.

(1) Pożyczaiący komu pieniędzy nazywa się *Wierzycielem*, a ten który od niego pożycza, *dłużnikiem*.

Można ieszcze rozwiązać ten przykład uważaiąc iż 5 iest $\frac{1}{20}$ ze 100, a zatém procent od iakiéykolwiek summy na taką miarę czyli iak zowią *stopę* pożyczonéy będzie, biorąc tylko z niéy $\frac{1}{20}$. I tak $\frac{1}{20}$ z 3575zł. iest $178\frac{3}{4}$zł. wypadek zgodny z powyżéy znalezionym.

330. Gdyby się ieszcze spytano ile podany kapitał przyniesie procentu w lat 3? oczywista iest, iżby trzeba wziąć znaleziony procent roczny 3 razy i wypadłby procent szukany $536\frac{1}{4}$zł.

Procent taki od którego się nie rachuie procentu nazywaią *procentem prostym*, i ażeby go znaleźć z wielu lat od iakiego kapitału mnożymy procent roczny przez liczbę lat; gdy zaś procent każdego roku przyłączaią do kapitału ażeby sam przynosił także procent na rok następuiący, natenczas mówimy iż się rachuie *procent* od *procentu* i taki nazywaią *procentem składanym*.

331. *Przykład* II. Gdyby kto na końcu roku odebrał 7208zł. kapitału z procentem po $6\frac{8}{8}$, a pytaią się ile iest samego kapitału, a ile procentu? należy uważyć iż 106zł. kapitału z rocznym procentem, zawiera kapitału zł. 100, trzeba więc ułożyć proporcyią:

kap. z pr. kap. z pr. kap. kap.
106 : 7208 = 100 : x; znaydziemy na

odpowiedź 6800zł. kapitału, które odięte od 7208zł. pokażą procent 408zł. Lub gdybyśmy ułożyli proporcyią

kap. z pr. kap. z pr. proc. proc.
106 : 7208 = 6 : x, znaleźlibyśmy na

odpowiedź procent 408zł. a ten odięty od od 7208zł. okazałby kapitał.

332. Gdyby kapitał był połączony z procentem kilkoletnim prostym, wzięlibyśmy za pierwszy wyraz proporcyi 100zł. kapitału z procentem tyloletnim iaki podano w zagadnieniu. np. Gdyby odebrano 5880zł. kapitału razem z procentem po $5\frac{8}{8}$ ośmioletnim, a pytaią się ile iest samego kapitału a ile procentu? skoro tu procent 8 letni od

kap. z pr. kap. z pr. kap. kap.
sta iest 40zł. układam proporcyią, 140 : 5880 = 100 : x;

i znayduię na odpowiedź 4200 które odięte od 5880zł. pokażą procent ośmioletni 1680zł.

kap. z pr. kap. z pr. proc. proc.
Gdybyśmy zaś ułożyli proporcyią, 140 : 5880 = 40 : x;

znaleźlibyśmy procent ośmioletni 1680 taki sam iak wyżéy.

333. W regule procentu mogą zachodzić i odwrotne stosunki. Np. osoba A pożyczyła osobie B 488tal. na 8 miesięcy bez procentu; na iak długi czas B może pożyczyć tamtéy 640tal. także bez procentu chcąc iéy uczynność bez zobopólnéy krzywdy nagrodzić?

Uważam iż im więcéy ma nawzaiem osoba B pożyczyć osobie A, tém na krótszy czas pożyczenie być powinno; ma więc być wyraz 4ty mniéyszy, a zatém układam proporcyią:

tal. tal. m. m.
620 : 488 = 8 : x. Skracaiąc i uskuteczniaiąc wypada $x = 6\frac{1}{10}$ mcy.

334. Gdyby osoba A pożyczywszy osobie B 300tal. po 2ch miesiącach przydała 400tal. po 6ciu zaś odebrała 200tal. naostatek po 8u miesiącach, rachuiąc zawsze od daty pierwszéy pożyczki, odebrała wszystko; a teraz się pytaią na iak długi czas B może pożyczyć tamtéy 600tal?

W tym przypadku trzeba obrachować zysk iaki osoba B miała z używania wspomnionych kwot odnosząc go do zysku z iednéy summy przez czas określony np. przez miesiąc. A naprzód 300tal. używała ona przez 2 miesiące, tyle więc niemi zyskuie ile przez miesiąc 2 razy większą summą t. i. 600 talarami. Od końca 2go miesiąca do końca 6go a zatém przez 4 miesiące używała 700tal, tyle więc niemi zyskuie ile przez miesiąc 4 razy większą summą t. i. 2800 talarami. Od końca 6go do końca 8go mca t. i. przez 2 miesiące, miała tylko 500tal. z tych więc tyle ma zysku, ile na 1 miesiąc z 2 razy większéy summy to iest, z 1000tal. Z wziętych więc różnemi czasy kwot od osoby A, tyle zyskuie, iak gdyby miała od niéy na miesiąc dane

tal. tal. tal. tal.
600 + 2800 + 1000 = 4400. Zagadnienie więc sprowadza się na gatunek poprzedzaiącego, idzie bowiem oto: iak długo osoba B może pożyczyć osobie A 600tal. gdy od téy pożyczyła na miesiąc 4400tal. bez procentu? Odpowiedź iest, na $7\frac{1}{3}$ miesięcy.

335. Nader często zachodzi w rachunku procentów reguła 3ch składana. Np. gdyby się pytano ile 2000zł. powinno przynieść procentu w 29 miesięcy rachuiąc rocznie po $5\frac{8}{8}$?

Widzimy że procent zwiększa się w stosunku kapitału i czasu, będzie więc

$$\left.\begin{matrix} \text{kap.} & \text{kap.} \\ 100 & : 2000 \\ \text{m.} & \text{m.} \\ 12 & : 29 \end{matrix}\right\} = 5 : x.$$

skracaiąc i uskuteczniaiąc, wypada $x = 241\frac{2}{5}$zł.

Lecz ieżeliby się spytano: iak długo być maią na procencie 3000zł. aby po 6^0_0 przyniosły 790zł? widzę iż im więcéy ma przynieść iaki kapitał, tém dłużéy musi być na procencie, lecz im większy iest kapitał, tém krócéy będzie dla przyniesienia pewnego procentu (n° 333). Układam więc stosunki:

$$\left.\begin{matrix} \text{pr.} & \text{pr.} \\ 6 & : 790 \\ \text{k.} & \text{k.} \\ 3000 & : 100 \end{matrix}\right\} \begin{matrix} \text{rok.} & \text{lat.} \\ = 1 & : x \end{matrix}$$

skróciwszy i uskuteczniwszy, znaydę $x = 4$lat 4mcy i 20dni.

Przeydźmy do zagadnień procentu złożonego.

336. *Przykład I.* Kapitał 1500zł. ileż wyniesie po 3 latach, rachuiąc po 20^0_0 z procentem od procentu? (1).

Możnaby naprzód porachować od 1500zł. procent roczny i ten przydawszy do nich, uważać ie iako zwiększony na drugi rok kapitał: od którego znowu znaleziony procent dodać do tegoż kapitału, aby go mieć zwiększony na rok 3ci; od tego zaś kapitału wzięty ieszcze procent roczny przydawszy do niego, znaleźlibyśmy odpowiedź 2592zł. Podamy iednak na rozwiązanie podobnych przykładów sposob dogodnieyszy.

337. Znaydźmy ile kapitał 1zł. wynosić będzie po 3ch latach rachuiąc procent od procentu. Gdy procent iest 20^0_0, będzie rocznie od złotego iednego $\frac{1}{5}$ zł.; zatém 1 zł. wynosi po skończonym roku $1 + \frac{1}{5}$ zł. czyli $\frac{6}{5}$ zł. czyli $\frac{6}{5}$ części z 1. A tak kapitał 1 zł. oddany na procent po 20^0_0 wynosi na końcu roku $\frac{6}{5}$ z 1 t. i. $\frac{6}{5}$ tego co wynosił na początku roku. Wi-

(1) Procent w tym przykładzie wzięty tak wysoki nazywa się *lichwą* i iest prawem zakazany.

dzimy więc iż *aby znaleźć ile iaka summa dana na podobny procent wynosi na końcu roku, dosyć iest pomnożyć ią przez* $\frac{6}{5}$ zł. Dane na procent $\frac{6}{5}$ zł. na drugi rok, wynoszą na końcu roku $\frac{6}{5} \times \frac{6}{5}$ zł.; te $\frac{6}{5} \times \frac{6}{5}$ zł. dane na procent na 3 rok, wynoszą na końcu tegoż roku $\frac{6}{5} \times \frac{6}{5} \times \frac{6}{5}$ zł. czyli $1 \times \frac{6}{5} \times \frac{6}{5} \times \frac{6}{5}$ zł. czyli $1 \times (\frac{6}{5})^3$ t. i. $= 1 \times \frac{216}{125}$.

338. Łatwo spostrzegamy w takim razie postęp zwiększania się kapitału i wyprowadzamy regułę ogólną, iż *aby otrzymać ważność kapitału 1 zł. po pewnéy liczbie lat, trzeba wziąć ułomek który wyraża ile 1zł. wynosi na końcu roku i rozmnożyć kapitał 1zł. przez ten ułomek wzięty za ogólny czynnik tyle razy, ile iest iedności w liczbie lat, czyli wyniesiony do potęgi oznaczonéy liczbą lat. Iloczyn będzie ważnością złotego po czasie danym. Aby więc znaleźć ważność iakiego kapitału po pewnéy liczbie lat, dosyć iest rozmnożyć ważność 1zł. po czasie danym przez liczbę złotych kapitału.*

Rozwiążmy za pomocą tego sposobu przykład poprzedzaiący. Gdy 1 zł. po 3 latach wynosi $\frac{216}{125}$ zł. (n° 337); 1500 zł. wynosić będą po 3 latach 1500 razy $\frac{216}{125}$ zł. t. i. 2592.

339. *Przykład II.* Chcą wiedzieć ile wynosić będą 1500 zł. po 3 latach i 5 miesiącach, dane na podobny iak wyżéy procent?

Wiemy iuż ile dany kapitał wynosi po kilku latach (n° 338), trzeba tylko znaleźć zwiększenie się iego w 5 miesiącach.

Procent od 1 zł. iest $\frac{1}{5}$ zł. za 12 mcy, a zatém $\frac{1}{60}$ zł. za miesiąc a $\frac{5}{60}$ zł. czyli $\frac{1}{12}$ zł. za 5 mcy. Więc 1 zł. wynosi po 5 miesiącach $1 + \frac{1}{12}$ zł. czyli $\frac{13}{12}$ zł. czyli $1 \times \frac{13}{12}$. A zatém iakikolwiek kapitał dany podług warunków o iakich mowa zwiększa się na końcu 5 mcy $\frac{13}{12}$ zł. razy. Że zaś 1 zł. po 3 latach wynosi $\frac{216}{125}$ zł.

zł.
więc 1 po 3 latach i 5 miesiącach wynosi $\frac{216}{125} \times \frac{13}{12}$ t. i. $\frac{234}{125}$
zł. zł. zł.
(1); a zatém 1500, wynosić będą 1500 razy $\frac{234}{125}$ czyli 2808.

340. Niechby odebrał kto 2592zł. kapitału z 3 letnim procentem składanym po 20/0, a pytają się iaki był iego kapitał pierwiastkowy?

Uważam iż gdy podany kapitał w tym przykładzie iest iloczynem z ważności 1 zł. po danym czasie przez liczbę złotych kapitału pierwiastkowego (n° 338); ieżeli go więc podzielę przez ważność 1 zł. wziętą po tymże czasie, iloraz okaże liczbę złotych kapitału pierwiastkowego. I tak, ieżeli podzielę 2592 zł. przez ważność 1 zł. po trzech latach która iest $\frac{216}{125}$ (n° 337), iloraz, $2592 \times \frac{125}{216}$ t. i. 1500 będzie liczbą złotych kapitału pierwiastkowego; zatém 2592zł. kapitału z 3 letnim procentem składanym po 20/0 daią 1500zł. kapitału pierwiastkowego.

Jeżeli w 3 lata i 5 miesięcy odebrano 2808zł. kapitału w raz z procentem składanym po 20/0, a pytaią się o kapitał pierwiastkowy? Podzielę 2808zł. przez ważność 1zł. po tymże czasie która iest $\frac{234}{125}$ (n° 339); iloraz, $2808 \times \frac{125}{234}$ t. i. 1500zł. okazuie iż 2808zł. kapitału wraz z procentem składanym za 3 lata i 5 miesięcy, daią 1500zł. kapitału pierwiastkowego.

341. Użyty sposób mnożenia wartości 1zł. po danym czasie przez liczbę złotych kapitału pierwiastkowego dla znalezienia kapitału wraz z procentem składanym; i przeciwnie, dzielenia kapitału złączonego z procentem składanym, przez wzmiankowaną wartość 1zł. dla znalezienia kapitału pierwiastkowego, może być wygodnie zastosowany do zagadnień procentu prostego.

342. Wtenczas nawet gdy od wielu różnych kapitałów przychodzi obrachowywać procent podług iednakowéy stopy, może mieć mieysce skrócenie następuiące: znaleźć 1od procent od 1zł. a następnie przez proste dodawanie albo mnożenie, procent od 2zł. od 3, i t. d. aż do 9 włącznie np. ieżeli procent od 1zł. zł. 0,06

2	. .	0,12
3	. .	0,18
4	. .	0,24 i t. d.

aby wziąć procent roczny od 4223zł, dosyć iest wziąć podług téy tabelli procent od 4000zł. który będzie . . . 240zł. (n° 19)

od	200	12
od	20	1,2
od	3	0,18

Summa 253,38 czyli zł. 253 gr. 10$\frac{2}{5}$.

Niżéy zobaczymy ile za pomocą logarytmów rozwiązanie zagadnień ściągaiących się do procentu złożonego ułatwioném być może.

ZAGADNIENIA.

343. I. Dano na procent 25000zł. po 5/0; ileż będzie procentu za rok?

II. Gdy iest procentu rocznego 1250zł. biorąc po 5/0 iakiż będzie kapitał?

III. Gdy od 25000zł. iest rocznego procentu 1250zł. po ileż brano od sta?

IV. Gdy odebrano w roku 26250zł. kapitału z procentem po 5/0; iakiż iest kapitał i iaki procent roczny?

V. 1) Kupił ktoś towaru za 4500zł. przedał go zaś za 6000zł. ileż zarobił na 0/0?

2) Przeciwnie ieżeli kupił za 6000zł. a przedał za 4500zł. ile na 0/0 stracił?

VI. Chcą posłać do Paryża wexel (1) na 2000zł. bankier daiący wexel żąda 2/0. Ileż więc trzeba zapłacić bankierowi?

(1) Podzieliliśmy bowiem licznik 216 przez 12, a wypadek rozmnożyli przez 13.

(1) Wexlem nazywaią piśmienne zobowiązanie się do oddania iakiéy kwoty na czas oznaczony. Zobowiązanie się tém słowem oznaczone podług prawa ściśle dopełnione być musi pod osobistą odpowiedzialnością. Krótką ale dokładną naukę o wexlach znaleźć można w *Allgemeine deutsche Real-Encyclopädie (Conversations-Lexicon)*.

VII. Dano na procent 36000zł. po 7%, ileż będzie prowizyi za lat 6, mcy 9 i dni 18?

VIII. Gdy procent iest 17136zł. za lat 6, mcy 9 i dni 18 biorąc po 7%, iakiż iest kapitał?

IX. Gdy 36000zł. w lat 6, mcy 9, dni 18, przyniosły procentu 17136zł. po ileż brano od sta?

X. Gdy odebrano w lat 6, 9 mcy, 18 dni 53136zł. kapitału z procentem po 7%, iakiż iest kapitał i iaki procent?

Podane wyżéy zagadnienia wysłowialiśmy iednakowym sposobem, lecz możnaby ie wysłowiać sposobem rozmaitym. Zagadnienie np. ostatniego gatunku może być tak wysłowione: iakiż kapitał w 15 lat biorąc po 6% wypadnie na 21600zł. nie rachuiąc procentu od procentu? Wszak pewną iest rzeczą, iż prawdy dokładnie poznane ze strony z któréy widzimy nayblizszy między niemi związek, iakkolwiek nam się potém nasuną, łatwiéy a nawet ogólniéy poznane być mogą, bo ie do pierwszych w związku o nich powziętych znaiomości odnosić możemy. Przyzwyczaiony prostym sposobem zagadnienia wysłowiać, i w znacznie zawikłanych prostuiąc wysłowienie znaydzie porządek, a następnie łatwo ie rozwiąże: często bowiem rozdrabniane bywaią okoliczności zadania, dla uczynienia go na pozór trudném i łączone nawet uwagi obce zagadnieniu arytmetycznie uważanemu, które aby z łatwością rozwiązać, trzeba od niego odłączyć to wszystko co istotnych iego warunków nie składa i przywieśdź do nayprostszego wysłowienia. Często także wysłowiaią zagadnienie iak nayzwięźléy pomiiaiąc nawet istotne warunki których się iednak po zastanowieniu nad wysłowieniem domyśléć można.

XI. Jak długo być maią na procencie 36000zł. aby po 7% przyniosły 17136zł?

XII. 36000zł. w 7 lat, 4 miesiące przyniosły 13200zł. procentu; 1) 27000zł. w 10 lat 5 miesięcy ileż *procentu* przyniosą? lub 2) żeby w 10 lat 5 miesięcy urosło procentu $14662\frac{1}{2}$zł. iakiż ma być *kapitał?* lub 3) 27000zł. aby przyniosły $14666\frac{1}{2}$zł. procentu, *iakże długo* być maią na procencie?

XIII. Gdy pewny kapitał złączony z procentem prostym wynosił 2460zł. po 5 miesiącach, a 2592zł. po 16 miesiącach; iakiż iest sam kapitał i iaki procent od niego.

XIV. Osoba A pożyczyła osobie B 500# na 7 miesięcy bez procentu; 1) na iak długo B może pożyczyć tamtéy $1166\frac{2}{3}$# także bez procentu, chcąc iéy uczynność bez zobopólnéy krzywdy nagrodzić? lub 2) iakąż kwotę B może pożyczyć osobie A na 3 miesiące aby wyrównać uczynność?

XV. Osoba A pożyczyła osobie B 500tal; po 3ch miesiącach przydaie iéy 300tal, a po 7 miesiącach odbiera 400, po 10 miesiącach przykłada znowu 500tal, po 13 miesiącach rachuiąc zawsze od dnia pożyczki, odebrała wszystko; 1) na iak długo B może pożyczyć osobie A 800tal. żeby iéy uczynność bez zobopólnéy krzywdy odsłużyć? 2) iakąż kwotę B może pożyczyć osobie A na $10\frac{3}{4}$ miesięcy żeby odsłużyć iéy uczynność?

XVI. Osoba A pożyczyła osobie B 1800tal na 6 miesięcy, lecz nazaiutrz rozpoznawszy że iéy ta kwota na własne użycie prędzéy będzie potrzebna 1) żeby ią wcześniéy odebrać bez uszkodzenia zapewnionéy umową korzyści osobie B, przydaie iéy 900tal. iakże długo B obie te summy może zatrzymać? lub 2) aby ią za 4 miesiące odebrać, ileż musi przydać osobie B żeby zapewnionéy umową dla niéy korzyści dorównać?

XVII. Osoba A ma wypłacić osobie B 2400tal. po 8 miesiącach. Wypłaca zaś iéy po 3 miesiącach 900tal; iakże długo może resztę zatrzymać?

XVIII. 100000zł. kapitału za lat 5 po 5% rachuiąc procent od procentu, ileż przyniosą kapitału z procentem?

XIX. Jeżeli po pięciu latach odebrano kapitału $12762\frac{5}{32}$zł. wraz z procentem składanym po 5%; iakiż był pierwiastkowy kapitał?

XX. 1) 60000zł. kapitału ileż wyniesie po 4 latach i 4 miesiącach razem z procentem składanym po 8%? i przeciwnie 2) ieżeli po 4 latach 4 miesiącach odebrano kapitału wraz z procentem składanym po 8%, $8380\frac{1874}{17625}$zł.; iakiż był kapitał pierwiastkowy?

O REGULE ODTRĄCANIA PROCENTU.

344. *Reguła odtrącania procentu* (*ademptio usurae, Escompte, Rabattrechnung*) zależąca od reguły trzech, iest działanie przez które znayduiemy ilość iaką trzeba odtrącić

od summy która przed oznaczonym terminem ma być wypłaconą.

Na przykład: pewny kupiec bierze towaru za 500zł. które się obowięzuie za rok wypłacić, z warunkiem iednak iż skoro prędzéy zapłaci, będzie mógł odtrącić 10/0 rocznie. Zdarza się iż w 3 lub 4 dni potém chce zapłacić. Ileż tedy ma dać zamiast 500zł. któreby dał gdyby płacił w swoim terminie, to iest za rok?

Mógłby kto mówić: że kiedy ze 100 wytrąca się 10, z 500 wytrąci się 50, a zatém że kupiec powinien teraz zapłacić 450zł.; co iednak byłoby z krzywdą wierzyciela a z zyskiem kupuiącego, bo ten odtrącaiąc dziś sobie 10/0 od całego długu czyli kapitału, odtrącałby także procent i od 50zł. których nie daie.

Łatwo się iednak przekonać możemy o ile chybia rzetelności taki rachunek. Gdy bowiem 450zł. dodane na końcu roku do swego procentu który tu iest 45zł. uczyniłyby tylko 495zł. przyniosłszy przez rok 5zł. zamieniłyby się na końcu roku na 550zł. 5zł. więc iest w tym razie stratą z iednéy a zyskiem z drugiéy strony. Nie iestto w prawdzie strata znaczna przy małéy summie, lecz znaczną być może przy wielkiéy.

Ażeby w tym rachunku zachować należną sprawiedliwość, zważyć potrzeba iż 500zł. maiące być wypłacone po roku, składaią się właśnie z kapitału i z procentu 10/0; zagadnienie więc to sprowadza się do gatunku iego o iakim mówiliśmy pod n° 331 i proporcyią należy ułożyć:

110 : 100 = 500 : x

czyli 11 : 10 = 500 : x, które = $454\frac{6}{11}$zł.

Gdybyśmy ułożyli proporcyią

110 : 10 = 500 : x

czyli 11 : 1 = 500 : x, x byłoby = $45\frac{5}{11}$zł.

Nie trudno iest teraz przekonać się o dokładności tego rachunku. Wziąwszy procent 10/0 osobno od każdego z tych wypadków, będzie procent od pierwszego $45\frac{5}{11}$zł., od drugiego $4\frac{6}{11}$zł.; procenta te złączone w końcu roku z kwotami które ie wydaią, uczynią 500zł. i 50zł., po tyle też właśnie powyżsi kontraktuiący w końcu roku mieć powinni.

345. Gdyby się pytano ile osoba B maiąca za lat 4 oddać osobie A 2000zł., ma iéy oddać zaraz wytrącaiąc sobie procent po $5\frac{1}{2}$ od sta?

Zastanowiwszy się, postrzegam iż 2000zł. na końcu 4 lat oddane zawieraią razem kapitał i procent. Zagadnienie więc to wychodzi na zagadnienie pod n° 332, to iest ażeby znaleźć kapitał który wzięty z procentem 4letnim czyni 2000zł. Wziąwszy zatém za pierwszy wyraz sto zł. kapitału z procentem 4letnim który tu iest 22, będę miał proporcyią

122 : 2000 = 100 : x, x = $1639\frac{21}{61}$zł.

W ogólności: *w każdém zagadnieniu tego gatunku trzeba uważać summę maiącą się spłacić po pewnym czasie iako kapitał złączony razem z procentem prostym lub składanym po tymże czasie*, i stosownie do warunków podług n° 332 lub 340 zagadnienie rozwiązać.

346. Lecz nie tak iest łatwo wyrachować kwotę do spłacenia w czasie oznaczonym, gdyby summa częściami miała być przez znaczny przeciąg czasu spłacana. Naprzykład: gdyby osoba A miała wypłacać co rok osobie B 2000zł., a to przez lat 10; ileż ma dziś oddać wytrąciwszy sobie procent po 5/0?

Aby rozwiązać to zagadnienie trzeba naprzód obrachować korzyść w końcu oznaczonego czasu zapewnioną iednéy i drugiéy osobie, a potém szukać kwot, które dziś wzięte wyrównywałyby tymże korzyściom w czasie oznaczonym.

Jeżeli uważymy rzecz ze strony osoby A, zastanówmy się, że ta maiąc wypłacać osobie B 2000zł. razy 10, co czyni 20000zł., ma zysk następuiący: pierwszych 2000zł. które w końcu roku pierwszego wypłaci, używać będzie rok 1; drugich 2000zł. które w końcu roku drugiego wypłaci, używałaby lat 2, i t. d.... ostatnich 2000zł. które w końcu roku dziesiątego wypłaci, używałaby lat 10. A że procent roczny od 2000zł. po 5/0 iest 100zł.; więc osoba A miałaby ten procent od wypłaconéy summy pierwszéy, raz ieden, od drugiéy razy 2.. i t. d. od dziesiątéy razy 10. Idzie więc o zebranie tych procentów których liczba = summie wyrazów postępu różnicowego to iest = (1 + 10) × 5 = 55 (n° 275). Procent więc roczny od 2000zł. czyli zł. 100 wzięte razy 55 to iest 5500zł. iest zyskiem iaki osoba A przez wspomnione wypłaty w końcu lat 10 na sobie zapewniony. Jeżeli zatém osoba B chce dziś odebrać co iéy się słusznie należy, a nie pozbawiać osoby A korzyści do iakiéy ona ma prawo, powinna iéy oddać taką summę którąby

w lat 10 z procentem po $5\frac{0}{0}$ urosła do 5500zł. Powyższym więc rozbiorem sprowadzone zostało zagadnienie do tego: iaki ma być kapitał ażeby w lat 10 z procentem po $5\frac{0}{0}$ wyszedł na 5500zł.?

Odpowiedź podług n° 332, znaydziemy przez proporcyią

k. z pr. k. k. z pr. k.
150 : 100 = 5500 : x;

znalezione na czwarty wyraz $3666\frac{2}{3}$zł. odpowiadaią warunkom; bo od téy kwoty procent roczny $183\frac{1}{3}$ wzięty razy 10 uczyni $1833\frac{1}{3}$zł. a te dodane do $3666\frac{2}{3}$zł. uczynią 5500zł.

Gdybyśmy znalezioną część dla osoby A to iest $3666\frac{2}{3}$zł. odjęli od kapitału 20000zł. który ma wypłacić osobie B w 10 latach, reszta $16333\frac{1}{3}$zł. będzie kwotą iaką ma dzisiay wypłacić osobie B, i iaka odpowiada warunkom, iak zaraz zobaczymy.

Jeżeli uważać będziemy rzecz ze strony osoby B, postrzeżemy, iż ta wziąwszy na końcu pierwszego roku pierwsze 2000zł. używać ich będzie do czasu ukończenia interesu lat 9, a zatém miałaby z nich procent razy 9; drugie 2000zł. któreby na końcu drugiego roku odebrała, przyniosłyby iéy procent razy 8... i t. d.... przedostatnie 2000zł. które na końcu dziewiątego roku odbierze, przyniosłyby iéy tylko raz procent. Trzeba więc i w tym razie znowu zebrać procenta których liczba = summie wyrazów postępu różnicowego to iest $(9+1)\times 4\frac{1}{2}=45$. Wziąwszy więc 100zł. 45 razy, będzie z samego procentu 4500zł. Że zaś osoba B odbiera nadto w tym czasie i kapitał który wynosi 20000zł., więc ogółem na końcu dziesiątego roku ma korzyści 24500zł. Powinna więc taką dziś wziąć summę, ażeby ta z procentem po $5\frac{0}{0}$ urosła za lat 10 na 24500zł. Summę tę podług powyższego prawidła znaydziemy $16333\frac{1}{3}$zł. Procent roczny od niéy po $5\frac{0}{0}$ który iest $816\frac{1}{3}$zł. weźmy dla sprawdzenia 10 razy, będzie procent 10letni $8166\frac{2}{3}$zł. które dodane do $16333\frac{1}{3}$zł. czynią na końcu 10go roku 24500zł. iak być powinno.

347. Gdyby się wspomnione osoby umówiły w ten sposób, ażeby A wstrzymawszy zapewnioną sobie podług powyższych warunków korzyść, wypłaciła razem osobie B należącą kwotę; kiedyż wypłacenie ma nastąpić?

Rozwiązalibyśmy zagadnienie obrachowawszy iak powyżéy, ile ma mieć korzyści, osoba A na końcu roku 10go, a natenczas zagadnienie sprowadza się do następuiącego: iak długo 20000zł. maią być na procencie po $5\frac{0}{0}$ aby przyniosły 5500zł.? odpowiedź znaydziemy podług n° 335 lat $5\frac{1}{2}$.

Łatwo się teraz przekonać możemy o słuszności tego rachunku i na stronę osoby B. Wiemy bowiem z powyższego, iż na końcu 10go roku powinna mieć korzyści z samego procentu 4500zł. Weźmy procent po $5\frac{0}{0}$ od 20000zł. przez lat $4\frac{1}{2}$ które są dopełnieniem oznaczonego czasu, procent ten iest zupełnie 4500zł.

348. Jeżeli w iakim przedmiocie trzy osoby A, B, C, podaią swe proiekta: A np. chce dać 18200zł. zaraz; B 20000zł. w tym sposobie, 4000 zaraz, a potém co rok po 4000 przez 4 lata; C 21000zł. zaraz, potém co rok po 3000 przez lat 6. Któryż z podanych proiektów iest nayzyskowniéyszy?

Jakożkolwiek powyższe zagadnienie zdawałoby się tu należyć i w rzeczy saméy gdybyśmy wartość proiektowanych kapitałów sprowadzić chcieli podług danych warunków do wartości teraźniéyszéy, wypadałoby użyć teoryi w tym rozdziale wskazanéy. Lecz gdy w tym razie idzie tylko o proste poznanie stosunku korzyści z iednéy strony, dosyć iest odnieść każde podanie proiektu do iednakowego czasu, iak tu do końca roku 6go, a łatwo zaraz wartość ich porównamy. Wziąwszy więc iakiś stały procent np. $5\frac{0}{0}$, znaydziemy że kapitały powyższe spłacone podług warunków w oznaczonym czasie, przyniosą procenta następuiące: kapitał osoby A zł. 5460, osoby B 3600, osoby C 3150. Te złączone z właściwemi kapitałami okażą iż kapitał pierwszy na końcu 6go roku urośnie do 23660zł. 2gi do 23600 a 3ci do 24150. Trzeci więc podany proiekt iest nayzyskowniéyszy a 2gi naymniéy zyskowny.

ZAGADNIENIA.

349. I. Osoba A winna zapłacić osobie B 16200zł. za rok bez procentu; ileżby teraz powinna zapłacić wytrąciwszy sobie procent roczny po $5\frac{0}{0}$?

II. Dowiadnie się ktoś że bankier odebrał assygnacyią na wypłacenie mu 3000zł. za 6 miesięcy, lecz że potrzebuie pieniędzy, udaie się do bankiera; ileż ma bankier zaraz wypłacić wytrącaiąc sobie 5^{0}_{0} na rok?

III. Pewna osoba maiąca prawo odebrania od drugiéy zł. 600 za 3 miesiące, żąda wypłacenia sobie zaraz z odtrąceniem procentu. Chcą iéy zapłacić tylko 564 zł. iakże wysoki odtrącaią procent?

IV. Pewna osoba daie na siebie kartę kupcowi na 2854zł. maiące być za rok wypłacone; lecz na końcu 7 miesięcy przychodzi uiścić się z długu. Kupiec zezwala na zmniéyszenie długu, odbiera go bowiem przed terminem. Rachowano za procent w karcie po 6^{0}_{0}. Jest pytanie za iakąż summę powinien kupiec oddać kartę?

V. A ma wypłacić osobie B 45000zł. po 12 latach skończonych; 1) ileż dziś zapłacić ma wytrąciwszy sobie procent po 5^{0}_{0}? lub 2) zgadzaią się, ażeby A po 4 latach wypłaciła dług; ileż iéy dać przypadnie gdy sobie wytrąci procent po 5^{0}_{0}?

VI. Zagadnienie toż samo co wyżéy, tylko dodany warunek żeby mieć wzgląd na procent od procentu?

VII. Osoba A ma wypłacić osobie B 45000zł. w 15tu po sobie idących latach, to iest co rok po 3000zł. lecz 1) chcąc się pozbyć tego długu i nie płacić 15 razy, pyta się ile dziś oddać ma wytrąciwszy sobie procent po 6^{0}_{0}? lub 2) obie przystaią, ażeby osoba A razem te 45000zł. wypłaciła; kiedyż wypłacenie nastąpić powinno? lub 3) obie zgodziły się ażeby osoba A po pierwszych 3 latach cały dług wypłaciła: ileż na końcu 3 lat dać powinna wytrąciwszy sobie procent po 5^{0}_{0}?

Nayczęściéy iednak zdarzaią się nierówne kwoty i w nierównych terminach do wypłacenia, np.

VIII. Ma ktoś 800tal. wypłacić w ten sposób: 300tal. po 4 miesiącach, 400tal. po 6, a 100tal. po 8, uważaiąc czas rachowany zawsze od zaczęcia umowy; lecz wolałby od razu dług zapłacić, co przyięto; kiedyż wypłacenie ma nastąpić?

IX. Pewny kupiec winien za towary 3600zł. zapłacić w ten sposób: 600zł. zaraz, 800 za 3 miesiące, 200 za 8 miesięcy, a resztę w końcu roku, rachuiąc od czasu zaciągnionego długu; lecz umawiaią się żeby dług razem był wypłacony, w iakimże czasie wypłata nastąpi?

X. Pewny kupiec winien drugiemu za towary summę 6480tal. które ma wypłacić w 4ch ratach, to iest, czwartą część zaraz, $\frac{1}{3}$ po 3 miesiącach, $\frac{1}{3}$ po 6, resztę w końcu roku; lecz 1) chce wszystko od razu wypłacić; kiedyż wypłatę słusznie uiści? lub 2) przystaią oba ażeby dłużnik po 2ch miesiącach cały dług spłacił; ileż wtedy ma dać wytrąciaiąc sobie umówiony procent po 8^{0}_{0}?

XI. Dłużnik który winien 3000tal. umówił się z wierzycielem, że 1500tal. zapłaci mu za 2 lata, w rok potém 1000tal. a w rok ieszcze resztę; lecz na końcu pierwszego roku wierzyciel mu proponuie, iż ieżeli zechce wypłacić zaraz cały dług, gotów iest odtrącić mu procent po 8^{0}_{0}; dłużnik na propozycyią przystaie. Trzeba wiedzieć ile ma zaraz wypłacić?

XII. Ma ktoś 1000zł. w 3 terminach wypłacić, t. i. $\frac{1}{4}$ téy kwoty po 4 mcach, $\frac{1}{5}$ po 7 mcach, a resztę na końcu roku, rachuiąc czas od zawarcia umowy; lecz on płaci $\frac{1}{2}$ długu po 3ch. a $\frac{1}{8}$ po 5 mcach; pytam się iak długo reszty może ieszcze nie wypłacić?

XIII. Obowiązany płacić czynsz wieczny 4200zł. od kapitału 42000zł. chce się zbyć tak wielkiego ciężaru. Przyięto warunek ażeby w 2 latach zupełnie się wypłacił, to iest w 2 równych wypłatach na końcu każdego roku. Jakaż ma być każda wypłata maiąc wzgląd na procent od procentu?

XIV. Chcą podobnież umieszczony kapitał 3310zł. spłacić w 3 równych wypłatach na końcu każdego roku; iakaż ma być każda wypłata?

XV. Proponuią pewnemu kupcowi 30 łokci materyi iednego gatunku na $\frac{9}{4}$ łokci szerokości za 720zł. gotowizną; lub 50 łokci materyi drugiego gatunku na $\frac{8}{4}$ łokci szerokości za 1200zł. wypłacić się maiące za 2 lata. Gatunek 1széy materyi ma się do gatunku 2éy iak 16 : 15. Procent uważa się po 10^{0}_{0} ze względem na procent od procentu. Trzeba wiedzieć które kupno zyskowniejsze dla kupca?

O REGULE SPÓŁKI.

350. Gdy reguła 3ch służy do podzielenia zysku lub straty proporcyonalnie do składki każdego spólnika, natenczas

ią nazywaią *regułą spółki* (regula societatis). Reguła ta służy w ogólności do podzielenia liczby iakiéy na części proporcyionalne liczbom danym.

Reguła spółki może być także poiedyncza albo składana; iest poiedyncza kiedy liczby do których maią być proporcyionalne części szukane, są wprost dane przez zagadnienie; iest składana gdy te liczby nie są wprost wystawione lecz dopiero trzeba ie oznaczyć składaiąc zachodzące stosunki. Wyiaśniamy to w przykładach.

Przykład I. Dwie osoby składaią się: pierwsza daie 100zł, 2ga 200zł. zyskuią razem 150zł. ileż każdéy z zysku przypada?

Ponieważ każdy zysk szczególny powinien być proporcyionalny do każdéy składki szczególney, będzie więc proporcyia:

Pierwsza składka: pierwszego zysku = druga składka: drugiego zysku. Stąd (n° 290) summa składek: summy zysków = $\begin{cases} \text{pierwsza składka : pierwszego zysku} \\ \text{druga składka : drugiego zysku.} \end{cases}$

Reguła więc ta sprowadza się do reguły trzech, któréy pierwszy wyraz iest summą składek czyli summą liczb podług których ma być podzielona liczba dana).

Drugim wyrazem iest summa zysków lub strat (czyli liczba dana do rozdzielenia na części proporcyionalne);

Trzecim każda składka w szczególności (czyli liczba do któréy ma być proporcyionalna część odpowiadaiąca);

A czwartym będzie część każdego spólnika (czyli liczba szukana). Będzie więc

$$300 : 150 = \begin{cases} 100 : x = \frac{100 \times 1}{2} = 50\text{zł.} \\ 200 : y = \frac{200 \times 1}{2} = 100 \end{cases}$$

lub $2 : 1 =$

151. *Przykład II.* Trzy osoby A. B. C. wchodzą w spółkę handlową. A daie 100zł. na 2 miesiące; B daie 200zł. na 4 mce; C daie 300zł. na 5 mcy. Zdarza się iż zyskuią razem 400zł. ileż każdéy przypada z zysku?

Spostrzegamy łatwo iż każda osoba zyskać powinna w stosunku kapitału i czasu, przez który w handlu iey kapitał zostaie.

Reguła więc spółki w tym razie iest składana. Zamienimy ią zaś na poiedynczą iak w przykładzie powyższym, skoro sprowadzimy używanie składek do iednakowego

czasu (n° 334), to iest, skoro znaydziemy iakie powinny być składki ażeby zostaiąc iednakowy czas w handlu, przyniosły zyski żądane, co pospolicie wyrażamy: *sprowadzić składki do iednakowego czasu.* Mówię zatém, iż:

100zł. przez 2 mce tyle zysku przyniosą, ile 2 razy 100 czyli 200 przez 1 miesiąc.

200zł. przez 4 mce tyle zysku przyniosą, ile 4 razy 200 czyli 800 przez 1 miesiąc.

300zł. przez 5 mcy tyle zysku przyniosą, ile 5 razy 300 czyli 1500 przez 1 miesiąc.

Maiąc iuż składki do iednakowego czasu sprowadzone rozwiążemy zagadnienie podług n° poprzedzaiącego. Piszę więc:

$$2500 : 400 = \begin{cases} 200 : x \\ 800 : y \\ 1500 : z; \text{ czyli skracaiąc} \end{cases}$$

$$25 : 400 = \begin{cases} 2 : x = \frac{16 \times 2}{1} = 32 \\ 8 : y = \frac{16 \times 8}{1} = 128 \\ 15 : z = \frac{16 \times 15}{1} = 240 \end{cases}$$

$$1 : 16 =$$

Weźmie zatém ze spólnego zysku osoba A, 32zł. B, 128; C, 240.

352. Sprawdzić możemy regułę tę biorąc summę zysków lub strat szczególnych; summa ta powinna być równa zyskowi całemu lub stracie całéy.

353. Gdyby w poprzedzaiącém zagadnieniu zamiast 400zł. zysku, dane było 400zł. straty do rozdzielenia między spólników; natenczas, lubo przyięte iest zwykle między handluiącemi iż zarówno strata iak zysk dzielone są w prostym stosunku składanym z kapitału i z czasu, i podług tego wypadałoby na każdą osobę część straty iak wyżéy, a zatém gdyby odbierali swe składki z handlu wzięłaby 1sza 68zł. 2ga 72, 3cia tylko 60; iednakże zastanawiaiąc się postrzeżemy, że gdy do spólnego handlu iedna osoba dwa razy więcéy daie i na dwa razy dłuższy czas niż druga, nie masz słusznéy przyczyny ażeby dla tego w razie straty ponosiła iéy cztery razy więcéy, t. i. ażeby strata miała być w stosunku prostym równie czasu iak kapitału. W takim więc razie, skoro spólna strata nie przenosi złożonego

kapitału, wypadałoby podług ścisłości ażeby się podzielili spólnicy pozostałą massą kapitału w prostym stosunku składanym z szczególnych kapitałów i czasu. I tak w ninieyszym razie dostałaby osoba A, 16zł; B, 64; C, 120.

354. Skoroby zaś strata przenosiła kapitał np. gdyby rzeczeni spólnicy zamiast 400zł. stracili 1000, i oprócz straty swoich kapitałów które wynoszą razem 600zł. obowiązani byli ieszcze ponieść i nadmiar straty t. i. 400zł. natenczas nadmiar ten mógłby być rozdzielony albo w stosunku prostym kapitałów, i podług tego miałaby dopłacić osoba A, $66\frac{2}{3}$zł; B, $133\frac{1}{3}$; C. 200; albo w stosunku prostym złożonym z kapitałów i czasu, i w tym razie powinnaby dopłacić osoba A, 32zł; B, 128; C, 240; albo nakoniec, co się zdaie naysłuszniey, wypadałoby nadmiar ten rozdzielić w stosunku prostym kapitałów lecz odwrotnym czasu. Trzebaby więc podzielić szczególne kapitały przez czasy, a tak regułę spółki składaną zamienimy na poiedynczą i trzeba będzie tylko rozdzielić 400zł. podług liczb $\frac{100}{2}$, $\frac{200}{3}$ i $\frac{300}{5}$ t. i. podług liczb 50, 50 i 60. Zatém miałaby ieszcze dopłacić osoba A, 125zł; B, 125; C, 150. Wszakże rachunek w tym razie zawisł szczególnie od warunków umowy i zastosowanych do niey okoliczności.

355. Gdyby spólnicy zmieniali swe składki dodaiąc do nich w różnych czasach, lub odeymuiąc iakie kwoty, np. gdyby się pytano: ile każda z dwóch osób A i B ma dostać ze spólnego zysku 84tal. gdy w handel 10 mcy trwaiący 1sza włożyła 100 550tal. lecz po 4 mcach przyłożyła 100tal. a po 6 mcach uięła 50tal; 2ga włożyła 100 600tal. ale po 3 mcach uięła 150tal?

W tym razie sprowadzilibyśmy składki szczególne do iednakowego czasu podług (n° 334), a zatém szłoby tylko o podzielenie 840tal. w stosunku prostym składek 6900tal. osoby 1széy; 4950tal. 2éy; i znaleźlibyśmy dział 1széy $498\frac{90}{79}$tal. 2éy $350\frac{70}{79}$tal.

356. Gdyby żądano podzielić 6725zł. pomiędzy trzy osoby tak, aby część czyli dział 2éy był $\frac{2}{5}$ działu 1széy; a dział 3ciéy był $\frac{7}{8}$ działu 2éy?

Widzimy iż dział 3ciéy względem działu pierwszéy będzie $\frac{7}{8}$ z $\frac{2}{5}$, czyli $\frac{14}{40} = \frac{7}{20}$ (n° 166).

Trzy więc działy szukane są między sobą iak liczby 1, $\frac{2}{5}$, i $\frac{7}{20}$; a sprowadziwszy ie do iednakowego mianownika, znaydziemy $\frac{20}{20}$, $\frac{8}{20}$ i $\frac{7}{20}$. Będą zatém trzy liczby 20, 8 i 7 proporcyonalne danym pierwszym. Pozostaie więc tylko podzielić liczbę daną proporcyonalnie do liczb 20, 8 i 7. Co uskuteczniwszy podług prawideł poprzedzaiących znaydziemy dział osoby 1széy $3842\frac{20}{35}$, 2éy $1537\frac{15}{35}$; 3éy 1345zł.

357. Gdyby żądano podzielić daną kwotę na trzy części tak, ażeby 1sza była do 2éy = 5 : 4, a 1sza do 3éy = 7 : 3, trzebaby zrobić podobne iak wyżéy przygotowanie.

Spostrzegamy łatwo, iż część 2ga ma być $\frac{4}{5}$ pierwszéy, a część 3cia $\frac{3}{7}$ pierwszéy. Wyraziwszy więc pierwszą przez 1, 2ga będzie wyrażona przez $\frac{4}{5}$, a 3cia przez $\frac{3}{7}$. Zagadnienie więc zamienia się na gatunek poprzedzaiącego, i znaydziemy na odpowiedź, że część 1sza iest $3017\frac{11}{39}$, 2ga $2414\frac{1}{39}$, 3cia $1293\frac{27}{39}$.

358. Skrócenie o którém mówiliśmy pod n° 342 daie się także i w tym przypadku korzystnie zastosować gdy do wielu szczególnych kapitałów czyli liczb zwłaszcza wielkich potrzeba szukać odpowiadaiących części. I tak znalazłszy np. że,

	zł.
1zł. daie zysku lub straty.	0,03295
2	0,06590
3	0,09885
4	0,13180 i t. d.

ieżeli mam znaleźć część odpowiadaiącą 34579 złotym, biorę

	zł.
podług téy tablicy na 30000zł.	988,5
na 4000	131,80 i t. d.

Dodawszy razem mieć będę liczbę odpowiadaiącą 34579 złotym.

Ponieważ dziesiętne mogą nie zawsze odpowiadać zupełnie pierwszéy iedności, iak tu np. złotemu, więc otrzymane tym sposobem wypadki mogą się czasem nie zgadzać z nayściśleyszym rachunkiem. Nie zgadzanie się będzie tém bardziéy nie znaczne, im pilniéy pamiętać będziemy na to cośmy powiedzieli pod n° 113 i 187.

ZAGADNIENIA.

359. I. Cztery osoby składaią do spólnego handlu: A, 5600zł. B, 4800; C, 6200, D, 5000; straciły razem 3400zł; ileż każda straty poniesie?

II. Trzy osoby A, B, C, miały kapitału spólnego 36000zł. dzieląc się zaś otrzymanym z téy summy zyskiem proporcyonalnie do kapitałów swoich, A bierze 460zł. B 230, C 250. Jakiż każdéy osoby był kapitał?

III. Trzy osoby składaią towarzystwo; A daie 350#, B 200#; ileż ma włożyć C, chcąc otrzymać w stosunku kapitału połowę zysku który ma być 1000zł. i ile każda z nich tegoż zysku dostanie?

IV. Artyllerzysta potrzebuie mieszaniny z 2ch części saletry, $1\frac{1}{3}$ siarki, 1 części węgli, a 4 prochu. Chcąc mieć 50lb takiéy mieszaniny ileż weźmie z każdego materyiału?

V. Do zrobienia białego szkła potrzebuią 3 części dziarnistego piasku, 1 część potażu, $\frac{1}{5}$ część kredy; ileż trzeba wziąć z każdego materyiału chcąc mieć massy 60 funtów?

VI. 4600 robotników 1) podzielono na 3 oddziały: w 1szym iest ich 2300, w 2gim 828, w 3cim 1472; wszyscy maią razem zrobić 10000 miar pewnéy roboty; ileż miar każdy oddział zrobi? lub 2) trzeba podzielić na 3 oddziały: 1szy ma zrobić 5000 miar pewnéy roboty, 2gi 1800, a 3ci 3200; iakże liczny powinien być każdy oddział, wszystkie inne okoliczności iednakowe przypuszczaiąc?

VII. W wielkich arsenałach rachuie się $101\frac{1}{2}$lb materyiałów do prochu wchodzących na 100lb prochu, t. i. $76\frac{1}{2}$lb saletry, $12\frac{1}{2}$siarki i $12\frac{1}{2}$lb węgli. Jeżeli trzeba zrobić 5000 cent. prochu, ileż na to wyydzie każdego materyiału?

VIII. Trzech spólników wysłało statek ze zbożem na którém zarobili 1560tal. 1) iakiż ma być zysk 1szego który włożył w ten handel 840tal. na rok cały, 2go który włożył 630tal. na 6 mcy, 3go który włożył 540tal. na 3 mce?

2) Gdyby nie powiedziano ile zyskali, lecz tylko wiadomo było iż za cały kapitał kupili 700 kor. zboża które po 20zł. korzec przedali, ileż każdy wziął z zysku?

3) mogłoby także być, iż za powyższe składki kupili 1000kor. które przedali w 3ch partyiach: 1od. 18 łasztów po 400zł. 2re. 300kor. po $11\frac{1}{2}$zł; 3ie. resztę tak, iż na całym kapitale $10\frac{0}{0}$ zyskali. Po ileż korzec z reszty sprzedawano, i ileż każdy z zysku otrzymał?

IX. Włożył kto w handel 2500zł., po upłynieniu roku przyiaciel iego dołożył 2400zł. w pół roku potém dołączył się do nich trzeci daiąc 2100zł. Nakoniec w pół roku ieszcze się dołączył 4ty daiąc 5600zł. Po upłynieniu 2ch

lat rachuiąc od czasu połączenia się ich wszystkich, zyskali razem 4800zł. Ileż każdy z tego zysku dostanie?

X. Trzy osoby A, B, C, kładą w ieden handel tak: iż A daie 400#, B 500, C 700; lecz A po 4 mcach przykłada 300#, po 7 mcach rachuiąc czas zawsze od zaczęcia handlu, uymuie 150#, a po 9 mcach przydaie 250#.

B. Po 3 mcach po włożeniu swéy składki, uymuie 150#, po 5 mcach przykłada 220#, po 8 mcach przykłada ieszcze 140#, a po 10 mcach uymuie 300#.

C. po 5 mcach uymuie 200#, po 7 mcach uymuie ieszcze 110#, a po 9 mcach przykłada 340#.

Po upłynieniu roku od czasu włożenia w handel ich pierwszych składek, zyskali razem 2400#. Ileż każda otrzyma z tego zysku?

XI. Trzech spólników stowarzyszonych prowadziło handel przez 15 miesięcy, na którym w ogóle zyskali 100000zł. 1szy dał na początku handlu 86000zł. na końcu 4go mca dodał ieszcze 10000zł. 2gi dał na początku 60000zł. w 6 mcy przydał 5000zł. a na początku 9 mca uiął 10000zł; 3ci zaś wszedł do spółki na końcu 2go mca z kapitałem 100000zł. W pierwszych 2 mcach ponieśli stratę 7300zł. i ostatniego mca stracili znowu 2900zł. Trzeba rozdzielić zysk i stratę proporcyonalnie dla każdego spólnika.

XII. Cztery osoby A, B, C, D, należały do spólnego handlu.

A. dała 900# na 6 mcy i zyskała 18#;

B. dała 500# na 7 mcy, lecz niewiadomo ile zyskała;

C. dała 800# niewiadomo na ile mcy, lecz $21\frac{1}{3}$# zyskała;

D. niewiadomo ile dała, lecz na 5 mcy, i zyskała $11\frac{2}{3}$#.

Jakiż był zysk osoby B, na ile mcy dała osoba C, i iaka była składka osoby D?

XIII. Do wykopania rowu 1560osąż. długiego maią być użyci na szarwark włościanie 4ch wsi, 1sza odległa iest od miéysca pracy o $\frac{5}{4}$ mili, a ma dostawić 36 robotników; 2ga odległa od tegoż miéysca o $\frac{7}{4}$ mili a ma dostawić 25 robotników; 3cia odległa od tegoż mieysca o $\frac{10}{4}$ mili a ma dostawić 32 robotników; 4ta odległa o 2 mile a ma dostawić 48 robotników. Ileż robotnicy każdéy wsi z osobna powinniby wykopać sążni wspomnionego rowu, maiąc wzgląd

na odległość każdéy wsi od mieysca roboty i przypuszczaiąc iż ten ma być wszędzie iednakowéy obszerności i że ziemia przez całą iego długość zarówno iest twarda?

XIV. Pewny nie maiący familii zostawia 24000tal. które pomiędzy 3ch swoich przyiaciół A, B, C, dzieli tak, ażeby się działy ich miały do siebie iak $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$; iakiż iest dział każdego?

XV. Gdyby chciano podzielić 24000zł. na cztery osoby A, B, C, D, w tym sposobie, ażeby działy A i B miały się do siebie = 3 : 4; działy B i C = 5 : 6; działy zaś C i D = 2 : 3. Ileż każdéy przypadnie?

XVI. Oyciec zapisuie testamentem 36000zł. maiątku dla 5ciu synów z warunkiem aby się podzielili w odwrotnym stosunku lat wieku, t. i. im który młodszy tém więcéy ma dostać. Ma zaś naystarszy lat 30, 2gi 20, 3ci 18, 4ty 12, a naymłodszy 10. Ileż każdy dostanie:

XVII. Maiątek kupca który zbankrutował wynosi ieszcze 75000zł. Udowodnione zaś długi wierzycieli iego obrachowane wynoszą: 1go zł. 82494, 2go 66646, 3go 53942, 4go 49540, 5go 44750, 6go 12606, 7go 7204, 8go 1300, 9go 518. Ileż każdemu wierzycielowi przypadnie z massy upadłego?

XVIII. Od dłużnika który zbankrutował należy się osobom: A $40\frac{1}{2}$tal. B $42\frac{3}{4}$, C $121\frac{5}{12}$, D 86, E $113\frac{5}{8}$, F $90\frac{1}{4}$. Maiątek upadłego po odciągnieniu prawnie zabezpieczonych długów i wydatków sądowych wynosi iuż tylko 165tal. Ileż z téy summy dostanie każdy z pomienionych dłużników, ile straci i po wiele na 8.

O REGULE POŁĄCZENIA CZYLI MIESZANIA.

360. *Reguła połączenia* (regula alligationis) iest działanie służące do znalezienia średniéy ceny mieszaniny kilku gatunków rzeczy których ilości i ceny szczególne są dane; lub do wyznaczenia w iakiéy ilości wziąć trzeba każdéy z rzeczy maiących w chodzić w mieszaninę skoro znamy ich ceny tudzież cenę mieszaniny. Obeymuie więc dwa gatunki zagadnień (1).

(1) Nie liczymy zaś do téy reguły tych zagadnień (któreby się zdawały do niéy należyć) gdzie idzie o wynalezienie ile do zrobienia pewnéy mieszaniny trzeba wziąć w szczególności z innych materyy których stosunki są dane, np. do dobrego prochu trzeba 16 części saletry, 3 węgla, i 2 siarki; chcąc zrobić 1000 funt. prochu, ileż trzeba wziąć każdéy z tych materyy w szczególności? Podobne bowiem zagadnienia rozwiązuią iak widzieliśmy przez regułę spółki.

Dla znalezienia ceny średniéy, kilku gatunków rzeczy których znamy liczbę i wartość, *rozmnóż wartość rzeczy każdego gatunku przez liczbę tych rzeczy; doday wszystkie iloczyny i podziel summę przez liczbę całą rzeczy zmieszanych.*

361. *Przykład I.* Zmieszano razem 15 butelek wina po 4zł. butelka z 25 butelkami po 3zł. i z 30 po 2zł. pytaią się o cenę butelki mieszaniny?

15 butelek po	4zł.	butelka, kosztuią	4zł.	× 15 = 60zł.
25 . . .	3		3	× 25 = 75
30 . . .	2		2	× 30 = 60
70				195

Liczba butelek iest 70, a summa iloczynów iest 195zł. Dzielę więc 195zł. przez 70; iloraz $2\frac{11}{14}$zł. iest ceną butelki mieszaniny.

Możnaby rozwiązanie to zastosować do reguły 3ch w ten sposób: summa butelek zmieszanych, iest do summy ich cen, iak butelka mieszaniny, do ceny średniéy; czyli $70 : 195 = 1 : x$; $x = \frac{195 \times 1}{70} = 2\frac{11}{14}$zł. Łatwo spostrzegamy iż proporcyia ta iest prawdziwa.

Sprawdzić możemy rozwiązanie doświadczaiąc czy 70 butelek wina po $2\frac{11}{14}$zł. czynią też samę wartość co i summa wartości szczególnych 15 butelek wina po 4zł. 25 po 3zł. i 30 po 2zł. butelka.

362. Gdyby podane było zagadnienie: iż przedsięwzięto zmieszać troiakiego gatunku zboże, t. i. 48 kor. po 14zł. 68 po 16 i 86 po $15\frac{1}{2}$; dobroczynna zaś osoba ofiarowała do tego 60 kor. ażeby cena dla maiących kupować zboże zniżona była; po ileż korzec téy mieszaniny powinien być przedawany?

Znaleźlibyśmy cenę szukaną podzieliwszy summę wartości tego zboża 3093zł. przez liczbę korcy 262. Wypada na iloraz 11zł. $24\frac{21}{131}$gr. Może być zatém przedawany korzec po 11zł; i 25gr. bez straty.

363. Używamy ieszcze reguły poprzedzaiącéy do wzięcia środka między wypadkami z doświadczenia lub postrzeżeń otrzymanemi a które nie zgadzaią się z sobą. Na przykład, gdyby szło o poznanie dokładne odległości dwóch mieysc dosyć od siebie oddalonych i z iakążkolwiek pilnością powtarzano wymiar a zaszły iednak uchybienia w mierzeniu, to iest że otrzymane wypadki nie zgadzałyby się z sobą: dwa razy np. znaleziono 3794,48 sąż.; z trzech innych pomiarów dał każdy 3795,27 sąż.; nakoniec w ostatniém mierzeniu otrzymano 3793, 115 sąż.

Ponieważ się te liczby niezgadzaią, oczywistą iest rzeczą iż w niektórych musi być błąd, a może i we wszystkich. Gdyby była znaleziona za każdym razem prawdziwa miara, summa wypadków byłaby równa sześć razy téy miarze. Łatwo zaś spostrzedz możemy, iż ta sama byłaby summa, gdyby wypadki otrzymane chybiały iedne przez nadmiar a drugie przez niedomiar tak, iżby nadmierzenie wypadłe z dodania nadmiarów, wynagradzało niedomiar wypadków mniéyszych od prawdziwéy ważności; doszlibyśmy zatém do poznania téyże wartości dzieląc summę wypadków przez ich liczbę.

Przypadek taki iest nader szczególny, ani sądzić można iżby się często trafiał. Lecz zdarza się prawie zawsze iż błędy w iednym względzie znoszą część innych w drugim, a pozostały rozdzielony zarówno na każdy wypadek iest tém mniéyszy im większa iest liczba wypadków.

Podług tych uwag działać będziemy tak:

		sąż:
weźmiemy 2razy	3754, 48 czyli	7588, 96
. . . . 3 . .	3795, 27 . . .	11385, 81
. . . . 1 . .	3793, 115. . .	3793, 115

6 wypadków daie w ogóle 22767, 885 sąż.

Podzieliwszy 22767, 885 przez 6, znaydziemy ważność średnią . . . 3794, 647.

364. Gdyby podano iż pewna loteryia złożona z 10000 biletów czyli losów po 6zł. każdy; miała w sobie wygrywaiący ieden los wielki na 9600zł., 2 po 4500zł., 4 po 1200zł., 8 po 600zł., 200 po 50zł. a 400 po 25zł.; a pytano się iaki ma zysk z téy loteryi zakładaiący takową, i iaka iest średnia cena biletu?

Obrachowawszy summę z wygrywaiących losów która iest 48200zł. summę zebraną za 10000 biletów po 6zł. która est 60000zł., odjęlibyśmy pierwszą od drugiéy; różnica ich, 11800zł. okazuie zysk utrzymuiącego loteryią. Aby zaś znaleźć średnią cenę rzetelną biletu, trzeba podzielić 48200 zł. przez całą liczbę biletów 10000, czyli 482 przez 100, co daie 4zł. 24$\frac{3}{5}$gr: na cenę średnią szukaną.

365. Z dwóch poprzedzaiących przykładów widzimy analogiią zachodzącą między regułą mieszania i teoryią *rachunku prawdopodobieństwa* czyli domniemań (calculus probabilitatis) (1). Moglibyśmy ieszcze posunąć daléy wnioski z tego postrzeżenia, lecz gdy wspomniony rachunek zależy szczególniéy od wyższéy arytmetyki, i gdy przeznaczone są szczególne dzieła temu przedmiotowi który zaymował naypierwszych wieku naszego jeometrów; przeto wspomnimy tylko, iż teoryia rachunku *o środkach ciężkości i o równowadze między rozmaitemi siłami* które działaią na punkt ieden, odniesiona także być może do tego pierwszego gatunku reguły połączenia.

Przeydźmy teraz do drugiego gatunku zagadnień téy reguły.

366. *Przykład I.* Z dwóch trunków z których garniec pierwszego kosztuie 11zł. a garniec drugiego 5zł., trzeba zrobić mieszaninę któréy garniec ma wypadać po 7zł., wieleż garcy wziąć należy z każdego gatunku dla zrobienia mieszaniny?

Gdybym wino pierwszego gatunku zamiast po 11 zł: sprzedawał po 7 zł: straciłbym na każdym garcu po zł: 4; gdybym zaś wino drugiego gatunku zamiast po 5 zł: sprzedawał po 7 zł: zyskiwałbym na każdym garcu po zł: 2. Aby więc zysk wynagradzał stratę, powinienem sprzedać

(1) Obacz *Rys Filozoficzny zasad rachunku losów czyli rachunku prawdo-podobieństwa, przez Kaietana Garbińskiego Professora w Warszawskim Uniwersyte: Królewskim. w Warszawie* 1825 *in* 4to.

z obu gatunków wina, ilość garcy w stosunku odwrotnym różnicy ich cen z ceną średnią, to iest: iak w danym przykładzie, wina droższego garcy 2, a tańszego garcy 4. Jakoż sprzedawszy droższego wina 2 garce po zł: 7. tracę zł: 8; sprzedawszy zaś tańszego garcy 4 po zł: 7 zyskuię zł: 8, strata więc wyrównywa zyskowi. Zmieszawszy zatém obadwa gatunki wina w stosunku 2 : 4, rzetelna cena mieszaniny będzie zł: 7.

Sposób rozwiązywania takowych zagadnień iest następuiący: Układam ceny tak

$$7 \begin{cases} 11 \ldots 2 \\ 5 \ldots 4 \end{cases}$$

Biorę różnicę ceny wyższéy 11 z naznaczoną ceną średnią 7, i piszę tę różnicę naprzeciw ceny niższéy 5. Biorę potém różnicę ceny średniéy 7 z ceną niższą 5 i umieszczam ią naprzeciw ceny wyższéy 11.

Wnoszę zatém, iż mieszaiąc 2 garce trunku po 11zł. z 4 garcami trunku po 5zł. będzie mieszanina po 7zł. garniec.

Zróbmy ieszcze tę uwagę, iż gdy podług przykładu poprzedzaiącego ma wchodzić w mieszaninę 2 części droższego wina, a 4 tańszego, czyli co na toż samo wyydzie, 1 część droższego, a 2 części tańszego; więc w iakiéykolwiek ilości mieszaniny, proporcyią tę zachować należy. I tak chcąc mieć np. 1 tylko garniec mieszaniny trzebaby wziąć $\frac{1}{3}$ gar. z gatunku pierwszego a $\frac{2}{3}$ gar. drugiego.

367. Gdyby mieszanina miała się składać z wina którego garniec, 1go kosztuie zł. 16, 2go zł. 10, a 3go zł. 9; chciano zaś otrzymać wino któregoby garniec wypadał po zł. 12, natenczas ułożywszy ceny iak następuie:

$$12 \begin{cases} 16 \ldots 3+2=5 \\ 10 \ldots 4 \\ 9 \ldots 4 \end{cases}$$

porównywam 16 i 9 z ceną średnią 12, i różnice wypadłe piszę na odwrót iak się wyżéy powiedziało. Porównywam daléy 16 i 10 ceny wyższą i niższą od ceny średniéy, z tąż ceną, i różnice piszę podobnież na odwrot. Dodawszy do siebie różnicę 3 i 2 położone przy 16, wypadnie wziąć z wina na zł. 16 garcy 5, na zł. 10 gar. 4, na zł. 9 także garcy 4, a zmieszawszy razem wypadnie 13 garcy wina po zł. 12.

Gdyby w mieszaninę miało wchodzić cztery, pięć lub więcéy gatunków rzeczy rozmaitéy ceny, porównać ie trzeba podobnym sposobem koleyno po dwie, z ceną średnią, uważaiąc aby za każdym razem porównywać z sobą dwie tylko ceny to iest iednę wyższą drugą niższą od ceny średniéy i podług powyższego sposobu postąpić.

Wnieśmy ztąd, że we wszystkich podobnych zagadnieniach, należy zawsze na to pamiętać, iż *aby wynagrodzenie zupełne między cenami wyższemi i niższemi nad cenę średnią miało mieysce, trzeba ażeby liczba rzeczy wziąć się maiących po cenie wyższéy i liczba rzeczy po cenie niższéy, były w stosunku odwrotnym różnicy tychże cen a ceną średnią.*

Prawidło to zachować także należy skoro w zagadnieniu daném, więcéy iest cen wyższych aniżeli niższych od ceny średniéy, lub przeciwnie.

368. Wiemy (n° 366) iż znalazłszy ilość szczególnych gatunków wchodzić maiących w mieszaninę żądanéy ceny, do większéy ilości mieszaniny trzeba wziąć naturalnie więcéy każdego gatunku, a do mnieyszéy mniéy, zawsze iednak w stosunku znalezionym.

Również spostrzegamy, iż gdyby oznaczono ilość iednego gatunku maiącego wchodzić w mieszaninę, natenczas i do tego zastosowaćby należało ilości innych gatunków.

369. *Przykład.* Jest czworakiego gatunku towar, pierwszego funt kosztuie 58zł.; 2go 49, 3go 28, a 4go 22; chcą zrobić mieszaninę funt po zł. 36, lecz w tę ma wchodzić tylko 12 ℔ pierwszego gatunku. Wieleż potrzeba zmieszać funtów trzech ostatnich gatunków?

Działam naprzód iak gdyby ilość żadnego gatunku towaru nie była oznaczoną; i znayduię iż mieszaiąc 14 ℔ po zł. 58, z 8 ℔ po zł. 49, z 13 ℔ po zł. 28 i z 22 ℔ po zł. 22 miałbym towar po 36zł. funt. Oto iest wzór działania

$$36 \ldots \begin{cases} 58 \ldots 14 \\ 49 \ldots 8 \\ 28 \ldots 13 \\ 22 \ldots 22 \end{cases}$$

Lecz że ilość pierwszego gatunku iest oznaczoną, mówię więc: ieżeli do 14 ℔ towaru po 58zł. powinienem wziąć 8 ℔ po 49zł. 13 ℔ po 28zł., i 22 ℔ po 22zł.; do 12 ℔ to-

waru po 58zł. wieleż funtów potrzeba wziąć z każdego z 3ch gatunków ostatnich? liczbę tych funtów znaydę przez regułę trzech następuiącą:

$$14 : 12 = \begin{cases} 8 : x = 6\frac{6}{7} \\ 13 : y = 11\frac{1}{7} \\ 22 : z = 18\frac{6}{7} \end{cases} (1)$$

Łatwo iest sprawdzić iż $6\frac{6}{7}$ ℔ towaru po 49zł. $11\frac{1}{7}$ ℔ po 28zł. i $18\frac{6}{7}$ ℔ po 22zł. zmieszane z 12 ℔ towaru po 58zł. dadzą towar którego funt przypadnie po 36zł.

370. Z tego co poprzedziło łatwo poiąć możemy, iż gdyby się pytano w iakiéy ilości trzeba zmieszać powyższe 4 gatunki aby mieć 100 ℔ towaru po 36zł. funt.

Trzebaby wziąć naprzód różnice iak powyżéy i znalazłszy iż 14 ℔ towaru po 58zł. zmieszane z 8 ℔ po 49 zł. z 13 ℔ po 28zł. i z 22 ℔ po 22zł. dadzą 57 ℔ towaru po 36zł. funt, ułożyć proporcyią.

$$57 : 100 = \begin{cases} 14 : x = 24\frac{32}{57} \\ 8 : y = 14\frac{2}{57} \\ 13 : z = 22\frac{46}{57} \\ 22 : v = 38\frac{34}{57} \end{cases}$$

A tak $24\frac{32}{57}$ ℔ towaru po 58zł. $14\frac{2}{57}$ ℔ po 49zł. $22\frac{46}{57}$ ℔ po 28zł. i $38\frac{34}{57}$ ℔ po 22zł. zmieszane razem dadzą 100 ℔ towaru po 36zł. funt. Co łatwo sprawdzić możemy.

371. Lecz gdyby maiąc mieszać te gatunki do 100 ℔ mieszaniny, oznaczono ieszcze ilość iednego gatunku np. gdyby chciano wziąć z pierwszego 12 tylko ℔; natenczas trzeba naprzód znaleźć cenę średnią po iakiéy ma wypadać funt mieszaniny z 3ch innych gatunków. To nastąpi, gdy od 3600zł. wartości 100 ℔ całéy mieszaniny odeymę 696 zł. wartość 12 ℔ po 58zł. i resztę 2904zł. podzielę przez 88 ℔ pozostałe od 100 ℔. Iloraz iest 33zł. A tak zagadnienie sprowadza się iuż do podobnego iak w numerze poprzedzaiącym, i znaydziemy iż trzeba wziąć każdego z trzech gatunków towaru po $29\frac{1}{3}$ ℔.

(1) Widoczną iest rzeczą, iż proporcyie te nie są ułożone podług reguły spółki, skrócone iest tylko postępowanie, bo w trzech proporcyiach tenże sam iest pierwszy stosunek.

Łatwo spostrzegamy, iż w rozwiązaniu tego gatunku zagadnień reguły mieszania, skoro przez dane stosunki między gatunkami mieszać się maiącemi nie masz szczególnego określenia, można mieć także nieokréśloną liczbę odpowiedzi, a nawet liczba ta może być nieskończoną. Zagadnienia zaś w tych razach zowią się *zagadnienia niewyznaczone* (*problemata indeterminata*).

Teoryia reguły mieszania szczególniéy iest użyteczna tym wszystkim którzy pracuią około złota i srebra. Kładziemy też w téy materyi naywięcéy zagadnień (1).

ZAGADNIENIA.

372. I. Złotnik ma troiakiéy próby srebro; iednego grzywien 200, po 74zł. drugiego 180, po 65zł, trzeciego 90, po zł. 58. Stopiwszy srebro w iednę massę; po ileż iedna grzywna przypadnie?

II. Zmieszano 7 łutów srebra 15téy próby z pięciu łutami 13téy próby; iakiéyże próby iest mieszanina?

III. W miesiącu *n* roku *n* była cena zboża w miastach pewnéy prowincyi następuiąca: w mieście *n* korzec żyta zł. $14\frac{2}{3}$; w *n* zł. 17; w *n* zł. $16\frac{1}{3}$; w *n* zł. $18\frac{1}{2}$; w *n* zł. 15; w *n* zł. $13\frac{3}{4}$; iakaż podług tego była w tym miesiącu średnia cena korca?

Maiąc zaś zebrane średnie ceny z miesięcy całego roku, łatwo iest znaleźć średnią cenę w tymże roku; bo trzeba tylko podzielić summę cen średnich z 12 miesięcy przez 12. maiąc znowu ceny średnie z pewnéy liczby lat, znaydziemy podobnie i średnią cenę w tychże latach.

(1) Zwykle każdy z tych dwóch przedniéyszych kruszców bywa zmieszany z podléyszym, iako to; złoto ze srébrem lub miedzią, srébro z miedzią. Sposób oznaczenia stopnia ich czystości należy do sztuki probierskiéy. Tu tylko namienimy, iż grzywna srébra wszelkiéy massy uważa się podzieloną na 16 równych części nazwanych *łutami*, a grzywna złota wszelkiéy massy na 24 części równych nazwanych *karatami*. Jeżeli kruszec zupełnie iest czysty, natenczas srébro zowie się 16to łutowe czyli 16téy próby, złoto zaś 24 karatowe; ieżeli w pierwszym lub w drugim iest np. 4 części przymieszki, natenczas srébro zowie się 12téy próby a złoto 20sto karatowe; i t. p.

Podobnież znayduiemy średnią wysokość Barometru, Termometru i t. d. (1).

IV. Ma ktoś 100 garcy pewnego likworu którego garniec iest po zł. 4; pytaią się ile ma przymieszać wody ażeby garniec mieszaniny wychodził tylko na $3\frac{1}{3}$zł. ?

V. Maiący zboże dwoiakiego gatunku to iest po 8 i po 14zł. korzec, chce ie mieszać tak, aby zmieszane mógł przedawać po 10zł. korzec; ileż ma mieszać z każdego gatunku?

VI. Maiący srébro 10téy próby, robić z niego każe złotnikowi naczynia lecz oraz podnieść do 12téy próby. Złotnik ma srébro naywyższéy próby 16téy; ileż z tego srébra ma brać ażeby dane do roboty było próby 12téy?

VII. Ze srébra 14 próby chcą mieć srébro 12 próby; ileż miedzi trzeba przymieszać? (miedź oznaczamy tu przez o, bo zwykle żadnéy w tym razie nie daią iéy wartości).

VIII. Pewnego towaru z dwóch gatunków zmieszanego kosztuie pewna miara zł. 60; lepszy z gatunków zmieszanych wart iest 75zł. a pośledniéyszy 48zł. na tę samę miarę rachuiąc; w iakiéyże proporcyi są zmieszane?

IX. Pewny złotnik ma dwie sztuki mieszaniny złota i srébra. Pierwsza sztuka na 100 grammach zawiera 95 złota a 5 srébra, druga na 100 gram. zawiera 85 złota a 15 srébra. Chce on zrobić trzecią sztukę mieszaniny któraby zawierała na 100 grammach 90 złota a 10 srébra; po ileż na to wziąć powinien z dwóch pierwszych sztuk?

X. Kupiec maiący 4 gatunki towaru z których pierwszego funt po 30zł. 2go po 24zł. 3go po 12zł. a 4go po 16zł. chce ie mieszać tak, aby mieszaniny funt mógł przedawać po 15zł. Ileż ma wziąć z każdego gatunku towaru?

XI. Złotnik chcący zrobić sztukę która ma ważyć 24 grzywny srébra po 50zł. grzywna, ma srébro w 4 gatunkach, to iest po 60zł. po 58, po 46 i po 21zł. grzywna; ileż ma wziąć z każdego gatunku, ażeby złożył 54 grzywny żądaney wartości?

XII. Na pewną sztukę maiącą być z czworakiego kruszcu ulaną i ważyć 3500℔ trzeba przysposobić materyiał.

(1) Obacz Fizykę Bystrzyckiego karta 171 Tomu 1. w Warszawie 1810.

Pierwszego kruszcu cetnar kosztuie 12tal. 2go 14tal. 3go 20tal. a 4go 30tal. Cały materyiał użyty razem nie ma więcéy kosztować iak 630tal.; ileż trzeba wziąć cetnarów z każdego kruszcu?

XIII. Pewny złotnik chce zrobić sztukę która ma ważyć 35 grzywien srébra po 25zł. ma zaś srébro w 4ch gatunkach, to iest po 30zł. grzywna, po 29zł. po 23 i po 21. Chce nadto ażeby z pierwszego gatunku wziąć tylko 10 grzywien; ileż ma wziąć każdego z 3ch innych gatunków?

XIV. Jest 4 gatunki towaru, pierwszego funt po 28gr., 2go po 24, 3go po 15 a 4go po 18. Chcą z tego zrobić mieszaninę po 22gr. funt, z warunkiem ażeby wziąć 3 razy więcéy gatunku drugiego niż pierwszego, a 2 razy więcéy gatunku drugiego niż czwartego; ileż trzeba wziąć każdego z tych gatunków towaru?

XV. Złotnik ma zrobić srébrne naczynie 1 ℔ i 28lut. ważące, a to ze srébra 10téy próby, lecz ma tylko 13téy i iedenastéy próby srébro; wieleż ma wziąć z każdego gatunku dla złożenia żądaney próby?

O REGULE FAŁSZYWEGO ZAŁOŻENIA.

373. *Reguła fałszywego założenia* (regula falsæ positionis) służy do znalezienia liczby żądaney za pomocą liczby przypuszczoney którą poddaiemy warunkom danym a które nie mogą być, iak w każdym rachunku, tylko stosunkami różnicowemi, albo ilorazowemi, albo kombinacyią obudwóch.

Założenie wymaga czasem iednego przypuszczenia, czasem zaś dwóch. W pierwszym razie zowie się reguła założenia poiedynczego; a w drugim reguła założenia podwóynego. Zaczniymy od pierwszéy.

Przykład. Jakaż iest liczba któréy połowa, trzecia część i czwarta czynią 52?

Możnaby tu przypuścić liczbę iakąkolwiek dowolnie, lecz rozwiązanie będzie tém łatwiéysze, im liczba wzięta będzie prostsza; biorę więc liczbę naymniéyszą daiącą się dzielić dokładnie na pół, na trzy i na 4 części. Taką iest 12; połowa iéy iest 6, trzecia część 4, a czwarta 3. Jest zaś $6+4+3=13$, przypuszczenie więc moie iest fałszywe; lecz posłuży mi do zna-

lezienia prawdziwéy liczby szukanéy; bo liczba 13 złożona iest z części liczby 12, iak liczba 52 z części liczby szukanéy: więc $13 : 12 = 52 : x = \frac{52 \times 12}{13} = 48$. W saméy rzeczy połowa, trzecia i czwarta część 48miu. $= 52$.

Widzimy stąd, iż z liczbą przypuszczoną trzeba postępować tak, iakby się postępowało dla sprawdzenia z liczbą szukaną gdyby była wiadomą.

Jeżeli natrafimy na liczbę szukaną, tedy zagadnienie będzie zaraz rozwiązane. Jeżeli wypada inna liczba, tedy wnioskuiemy podług reguły trzech; iak się ma wypadek : liczby przypuszczonéy = liczba podana : szukanéy.

374. Gdyby się pytano, iaka liczba dodana do siebie, ze swoią połową i z trzecią częścią i ieszcze 5, czyni 56?

W tym razie liczbę 5 iako stałą ilość odiąwszy od 56, pozostałe 51 biorę do proporcyi, a wziąwszy iakąkolwiek liczbę, lecz naylepiéy ile można naymnieyszą, iakaby się dała na żądane części podzielić, iak tu np. 6, dodaię do nich drugie 6, potém 3 i 2, to iest połowę i trzecią część 6ciu. Summa tych części iest 17, miało zaś być 51; trzeba więc ułożyć proporcyią

$$17 : 51 = 6 : x;\ x = 18 \text{ liczbie szukanéy.}$$

Jakoż $18 + 18 + 9 + 6 + 5 = 56$ (1).

375. Trzech przyiaciół stawiwszy łącznie na loteryią wygrali 20000zł. które trzeba podzielić proporcyionalnie do ich składek, lecz te są niewiadome. Wiadomo iest tylko iż stawka 2go iest podwóyna względem stawki 1szego, a stawka 3go iest podwóyna względem summy stawek 2ch pierwszych. Jakiż będzie dział każdego?

Gdybym znał stawkę pierwszego łatwoby mi było oznaczyć stawkę 2go i 3go, lecz ponieważ stawka pierwszego iest niewiadoma, przypuszczam iż ta iest 1zł. stawka 2go będzie 2zł. a stawka 3go 6zł. Będę więc miał.

$$9 : 20000 = \begin{cases} 1 : x = 2222\frac{2}{9}\text{zł.} \\ 2 : y = 4444\frac{4}{9} \\ 6 : z = 13333\frac{3}{9} \end{cases}$$

(1) Widzieliśmy wyżéy (no 169) iż te przykłady możnaby inż rozwiązać znaiąc teoryią ułomków, położyliśmy ie tu iednak gdyż podobne zagadnienia podciągaią zwykle pod regułę fałszywego założenia.

376. Trzeba podzielić 300zł. na 3 osoby w ten sposób, ażeby 2ga miała 2 razy więcéy iak 1sza i nadto zł. 6, a 3cia żeby tyle miała ile obie pierwsze i nadto zł. 10.

Przypuszczaiąc iż dział pierwszéy osoby iest 1zł. dział 2éy będzie 2zł. + 6 czyli 8zł. a dział 3éy $1 + 8 + 10 = 19$zł. Widzimy zaś iż niemożna podzielić 300zł. proporcyionalnie do liczb 1, 8, 19, a to z przyczyny że w dział 2éy osoby wchodzi liczba stała 6zł. a w dział 3éy liczba stała $6 + 10$ czyli 16zł. Odiąć więc trzeba $6 + 16$ czyli 22zł. od 300zł. a resztę 278zł. podzielić na 3 części tak, ażeby 2ga była podwóyną 1széy, a 3cia równa summie dwóch pierwszych; oto iest wzór działania:

1zł.	300zł.
$2 + 6$zł.	22
$3 + 6 + 10$zł.	278
$6 + 22$.	

$$6 : 278 = \begin{cases} 1 : x = 46\frac{1}{3} \\ 2 : y = 92\frac{2}{3} \\ 3 : z = 139 \end{cases}$$

Dodawszy teraz do działu drugiéy osoby, zł. 6, a do działu 3ciéy zł. 16; będzie dział 1széy $46\frac{1}{3}$; dział 2éy $98\frac{2}{3}$ a dział 3éy 155zł.

377. Przeciwnie, gdyby podziały miały być pewną ilością zmnieyszane np. gdyby chciano podzielić na 3 osoby 300zł. w ten sposób, ażeby 2ga miała 2 razy więcéy iak 1sza mniéy zł. 6, a 3cia tyle ile dwie pierwsze mniéy zł. 10; naznaczywszy dział

osoby 1széy ...	1 zł.
będzie dział 2éy.	2 — 6 zł.
dział zaś 3éy.	3 — 6 — 10zł.
	6 — 22.

Dodalbym 22zł. do 300zł. a summę 322zł. które iuż równałyby się całym 6ciu działom, podzieliłbym podług prawidła powyższego, i miałbym na dział osoby 1széy $53\frac{2}{3}$, 2éy $107\frac{1}{3}$, 3éy 161zł. Odiąwszy teraz od działu 2éy zł. 6 a od działu 3éy zł. 16, będzie dział 1széy $53\frac{2}{3}$, 2éy $101\frac{1}{3}$, 3éy 145zł.

Przeydźmy do zagadnień podwóynego założenia.

378. *Przykład I,* Pewny strzelec obiecuie swemu przyiacielowi dać 10zł. za każde nieubicie zwierza; przyiaciel obiecuie z swéy strony płacić 8zł. za każde ubicie zwierzyny. Po dwunastu wystrzałach okazało się iż przyiaciel strzelca ma mu zapłacić 24zł. Ileż wystrzałów zrobił strzelec na próżno?

Przypuszczam iż ich zrobił 6; w tém przypuszczeniu powinienby zapłacić 60zł. a wziąć 48zł. więc daleki ieszcze od otrzymania 24zł byłby obowiązany zapłacić 12zł, przypuszczenie więc moie iest fałszywe, i błąd móy iest o 36zł. mniéy, czyli —36zł.

Przypuśćmy więc iż strzelec na próżno strzelił 2 razy; w tym przypadku powinienby zapłacić 20zł. a wziąć 80zł. a zatém zamiast 24zł. miałby 60zł. móy więc błąd iest o 36zł. więcéy: układam dwie liczby przypuszczone i błędy odpowiadaiące tak:

6—36.
2+36.

Mnożę drugi błąd przez pierwszą liczbę przypuszczoną . . . . . 36×6=216.
mnożę pierwszy błąd przez drugą liczbę przypuszczoną . . . . . 36×2= 72.
288.

Dzielę summę iloczynów przez summę błędów i mam $\frac{288}{72}=4$; więc 4 iest liczbą szukaną.

379. Gdyby dwie liczby przypuszczone dały dwa błędy o mniéy, byłoby trzeba dzielić różnicę iloczynów przez różnicę błędów: tak znalazłszy przez pierwsze przypuszczenie iż strzelec nie strzelił na próżno 6 razy, przypuszczam iż strzelił próżno 5 razy. W tém przypuszczeniu powinienby zapłacić 50zł. a wziąć 56zł. więc zamiast 24zł. wziąłby tylko 6zł. błąd więc iest o 18zł. mniéy.

Mam więc 6—36.
5—18.

18×6=108.
36×5=180.

Różnica błędów=36—18=18; różnica iloczynów iest 180—108=72; $\frac{72}{18}=4$, iak znaleźliśmy wyżéy.

380. Gdyby oba błędy były o więcéy, działanie odbywalibyśmy tym samym sposobem iak w przypadku dopiero poprzedzaiącym.

Okazanie zupełne zasad téy reguły za pomocą rozumowania, należy iuż do algiebry do któréy odsyłamy w téy mierze.

Namienimy ieszcze, iż zagadnienia które rozwięzuiemy przez regułę założenia poiedynczego, rozwiązać można i przez regułę założenia podwóynego, ostatnia więc iest ogólnieysza. Wreszcie są zagadnienia które za pomocą tych reguł rozwięzuiemy iedynie dla krótszéy często drogi niż za pomocą innych reguł arytmetycznych.

ZAGADNIENIA.

381. I. Jakaż iest liczba która podzielona przez 7 a iloraz iéy rozmnożony przez 15 daie na iloczyn 450?

II. Pewny spytany wieleby miał lat, odpowiedział: gdyby do lat moich przydano ich połowę a z summy odięto część iéy 4tą, natenczas zostaie się 90; ileż ma lat?

III. Pewny zapisuie swóy maiątek 3em przyiaciołom w ten sposób: 1szy ma wziąć trzecią część całego maiątku, 2gi dwie piąte, a 3ci 32000zł. pozostaiące po wzięciu 2ch pierwszych zapisów. Jakiż był maiątek zapisuiącego, i iaki dział każdego z 2ch pierwszych legataryuszów?

IV. Jakaż iest liczba któréy $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ i $\frac{1}{4}$ równe są 500?

V. Trzy osoby maią 1000zł. do podziału; 1sza ma wziąć dział pewny, 2ga dwa razy tyle, więcéy 7zł. a 3cia tyle ile dwie pierwsze mniéy 5zł. Jakiż będzie dział każdéy?

VI. Trzeba rozdzielić 69960zł. między 5 osób tak, ażeby 2ga miała trzy razy więcéy niż pierwsza i nadto 540zł. ażeby 3cia miała połowę tego co pierwsza i trzecią część co druga, mniéy 120zł. 4ta żeby miała 2 razy tyle co 3cia i 3600zł. nakoniec 5ta żeby miała tyle co 1sza i 4ta; pytaią się ile każdéy z działu przypadnie?

VII. Jakaż iest liczba która rozmnożona przez 3, a do połowy iloczynu, dodana iego $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{6}$ i $\frac{1}{8}$ i nadto 25, uczynią 250?

VIII. Znaleźć dwie liczby takie iż dodawszy 11 do pierwszéy, summa byłaby poczwórna względem liczby dru-

giéy, dodawszy zaś też same 11 do liczby drugiéy, summa w tedy byłaby potróyną względem liczby pierwszéy?

IX. Przyiął kto rzemieślnika do pewnéy roboty, i umówił się z nim że za każdy dzień w który pracuie zapłaci mu zł. 5, a przeciwnie za każdy dzień w którymby próżnował wytrąci mu zł. $1\frac{1}{2}$. Zdarza się iż rzemieślnik w 60 dni ukończył swoie dzieło, lecz po porachunku dostał tylko 209zł. Ileż dni robił a ile próżnował?

X. Dwóch kupców sprowadzaią wino z pewnego portu. Dla 1szego kupca iest 20 beczek a dla 2go 64 beczek. Opłacaiąc cło i koszta sprowadzenia, 1szy dał 2 beczki wina, lecz mu zwrócono 40tal. 2gi dał 5 beczek i nadto 40tal. ileż warta iest beczka wina i po ile płacono od każdéy beczki?

XI. Kupiono ogrod i znowu go przedano, lecz ze stratą $18\frac{0}{0}$, przedano go zaś za 7298zł. Jakaż była cena pierwszego kupna ogrodu?

XII. Jakiż iest kapitał który złączony z 3 letnim po $4\frac{1}{3}$ od sta procentem czyni 7797?

XIII. Trzy osoby składaią towarzystwo 1sza daie 320# 2ga 3cią część całéy składki, a 3cia czwartą część: iakaż iest składka każdéy osoby i działy przypadaiące z zysku całego, który iest czerw. zł. 100?

XIV. Pewny kupiec kupił 12 sztuk towaru które kosztuią 96#; druga sztuka kosztuie o 1# więcéy niż 1sza, 3cia o 1# więcéy niż 2ga, i t. d. zawsze więcéy o 1# aż do ostatniéy; ileż kosztowała pierwsza i wszystkie inne?

O LOGARYTMACH.

382. Własności odpowiadaiące w proporcyiach i postępach różnicowych i ilorazowych któreśmy wyżéy (no 299) wskazali, były powodem do ułatwienia rachunków, to iest sprowadzenia do dodawania i odeymowania, mnożeń i dzieleń, a do mnożeń i dzieleń, wynoszenia do potęg i wyciągania pierwiastków. Do takowego ułatwienia rachunków użyto tablic *logarytmowych* (tabulæ logarithmorum vel logarithmicæ).

383. *Logatytmy* (logarithmi) są liczby w postępie różnicowym zaczynaiącym się od zera odpowiadaiące liczbom w postępie ilorazowym zaczynaiącym się od iedności, np. w dwóch postępach następuiących:

$\div$ 1 : 3 : 9 : 27 : 81 : 243 : i t. d.
$\div$ 0 · 2 · 4 · 6 · 8 · 10 · i t. d.

0 iest logarytmem 1, 2 iest logarytmem 3ch, 4 iest logarytmem 9ciu, 6 iest logarytmem 27miu, i t. d.

384. Widoczną iest rzeczą iż liczba iakakolwiek może mieć nieskończoną liczbę logarytmów rożnych, ponieważ wyrazom iakiegokolwiek postępu ilorazowego można uczynić odpowiadaiącemi wyrazy nieskończonéy liczby postępów różnicowych. Pierwsi iednak układacze logarytmów zważaiąc iż postęp dziesiętny ilorazowy
$\div$ 1 : 10 : 100 : 1000 : 10000 : 100000: i t. d. iest zasadą przyiętego układu liczenia; a postęp liczb naturalnych $\div$ 0 · 1 · 2 · 3 · 4 · 5 i t. d. iest nayprostszym ze wszystkich postępów różnicowych; obrali te postępy do ułożenia logarytmów. Podług tego więc 0, iest logarytmem iedności; 1 iest logarytmem 10ciu, 2 logarytmem 100u, i w ogólności logarytm iakiéykolwiek liczby wyrażonéy przez 1 z tyłu następnemi zerami ile się podoba, będzie miał zawsze tyle iedności ile iest zer po 1. Tak logarytm 100000cy iest 5, logarytm 1000000 iest 6, i t. d. Połączenie takie postępów oznaczonych nazywa się *układem* czyli *systematem logarytmów* (systema logarithmorum).

385. Pierwszy z tych postępów może być wyrażony i tym sposobem $\div$ 1 : 10^1 : 10^2 : 10^3 : 10^4 : 10^5 : i t. d. (218) Stąd się okazuie, iż logarytmy i wykładniki potęg powstaiących z liczby 10, toż samo znaczą. Gdy bowiem potęgi te rosną w postępie ilorazowym, wykładniki ich rosną w postępie różnicowym, podług ciągu liczb naturalnych 0, 1, 2, 3, 4, 5, i t. d.

Liczba stała 10 którą wynosimy do różnych potęg nazywa się *zasadą* (basis) układu logarytmów.

386. Nie dosyć iest mieć logarytmy liczb, 1, 10, 100, 1000, 10000, i t. d. trzeba ieszcze mieć logarytmy liczb pośrednich iakoto: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9; 11, 99, 101... i t. d. inaczéy pożytki logarytmów byłyby mało znaczące. Idzie więc o oznaczenie logarytmów liczb pośrednich postępu dziesiętnego.

387. Widoczną iest rzeczą iż logarytmy liczb zawartych między 1 i 10 w postępie ilorazowym dziesiętnym powinny być większe niż 0, które iest łogarytmem iedności, a mnieysze niż 1, która iest logarytmem 10ciu. Logarytmy więc tych liczb będą ułomkami. Wyrażaią w tablicach te ułomki przez dziesiętne.

388. Nie mniéy iest widoczna, iż łogarytmy liczb zawartych między 10 i 100 będą wyrażone przez 1 i dziesiętne; iż logarytmy liczb zawartych między 100 i 1000 będą wyrażone przez 2 i dziesiętne, i t. d.

389. To założywszy, wystawmy sobie iż między wyrazy następne postępu dziesiętnego D wciśnięto nieskończoną liczbę średnich, i podobnąż liczbę średnich między wyrazy następne postępu N liczb naturalnych. W tym razie wyrazy postępu N będą logarytmami wyrazów odpowiadaiących postępu D. Że zaś pomiędzy średniemi wciśnionemi między wyrazy następne postępu D, znaydą się takie które będą równe ieden 2om, drugi 3em, inny 5ciu a inny 11u, i t. d. więc mieć będziemy logarytmy 2ch, 3ch, 5ciu 11u i t. d. biorąc średnie które w postępie N, odpowiadaią średnim 2, 3, 5, 11, i t. d. wziętym w postępie D.

Dla obiaśnienia tego przykładem, przypuśćmy iż mamy znaleźć logarytm 5ciu. Liczba ta zawiera się między 1 i 10, których logarytmy są 0,0000000 i 1,0000000. Oznaczam dla skrócenia 1 przez A, a 10 przez B; wciskaiąc średnią proporcyonalną między A i B, średnia ta będzie równa, $\sqrt{A \times B} = \sqrt{1 \times 10} = 3{,}162277$. (nº 286) wyciągaiąc pierwiastek zbliżony mniéy iako o iednę miliionową. Oznaczam tę średnią przez C. Wciskaiąc średnią między 0,0000000 i 1,0000000 będę miał logarytm C. Ta zaś średnia $= \frac{0.0000000+1,0000000}{2} = 0.5000000$ (nº 267) zatem 0. 5000000 iest logarytmem liczby C.

Lecz liczba C. iest mnieysza niż 5, więc 5 zawierą się między C mnieyszém niż 5, i B większém, a zatém logarytm 5ciu, zawiera się między 0.5000000 i 1.0000000

Przez podobne postępowanie szukam średniéy między C i B, i znayduię $\sqrt{B \times C} = 5{,}623413$ które oznaczam przez D i którego logarytm iest $\frac{0.5000000+1.0000000}{2} = 0.7500000$.

Jest zaś, 5.623413 większe niż 5, więc 5 zawiera się między C i D, a zatem logarytm 5ciu zawarty będzie między 0.5000000 i 0.7500000. Trzeba więc wcisnąć między C i D średnią E która będzie miała za logarytm średnią wciśnioną między 0.5000000 i 0.7500000, i nie przestawać tychże samych działań póki nakoniec doszedłszy do średniéy Z nie znaydziemy 5.000000 które mieć będzie za logarytm 0.6989700 mniéy niż o iednę dziesięć miliionową zbliżony. Można uważać drogę tych długich i mozolnych działań w tablicy następuiącéy która ich wypadki wskazuie.

		LICZBY	LOGARYTMY
	A	1. 000000	0. 0000000
	B	10. 000000	1. 0000000
$\sqrt{A \times B}$	C	3. 162277	0. 5000000
$\sqrt{B \times C}$	D	5. 623413	0. 7500000
$\sqrt{C \times D}$	E	4. 216964	0. 6250000
$\sqrt{D \times E}$	F	4. 869674	0. 6875000
$\sqrt{D \times F}$	G	5. 232991	0. 7187500
$\sqrt{F \times G}$	H	5. 048065	0. 7031250
$\sqrt{F \times H}$	I	4. 958069	0. 6953125
$\sqrt{H \times I}$	K	5. 002865	0. 6992187
$\sqrt{I \times K}$	L	4. 980416	0. 6972656
$\sqrt{K \times L}$	M	4. 991627	0. 6982421
$\sqrt{K \times M}$	N	4. 997242	0. 6987304
$\sqrt{K \times N}$	O	5. 000052	0. 6989745
$\sqrt{N \times O}$	P	4, 998647	0. 6988525
$\sqrt{O \times P}$	Q	4. 999350	0. 6989135
$\sqrt{O \times Q}$	R	4. 999701	0. 6989440
$\sqrt{O \times R}$	S	4. 999876	0. 6989592
$\sqrt{O \times S}$	T	5. 999963	0. 6989668
$\sqrt{O \times T}$	U	5. 000008	0. 6989707
$\sqrt{T \times U}$	W	4. 999984	0. 6989687
$\sqrt{U \times W}$	X	4. 999997	0. 6989697
$\sqrt{U \times X}$	Y	5. 000003	0. 6989702
$\sqrt{X \times Y}$	Z	5, 000000	0. 6989700

Niemniéy pracy kosztowało pierwszych układaczy logarytmów wynaleźć logarytmy 2ch, 3ch, i innych liczb *pierwotnych*, iak wynaleźć logarytm 5ciu. Lecz te, raz wyznaczywszy doszli postępowaniem nader prostém, iak niżéy okażemy, do wyznaczenia logarytmów liczb *niepierwotnych*, i ułożyli ie w tablicach. Ułożono zaś w nich tylko liczby całe i ich logarytmy; byłoby nader długo i całkiem niepożytecznie umieszczać w nich inne średnie wciskane między wyrazy postępu D i logarytmy tych średnich. Oto iest mała tablica która da wyobrażenie ułożenia liczb i logarytmów (1).

(1) Logarytmy w téy tablicy obięte maią tylko sześć dziesiętnych, lecz to iest nader dostateczną do wykonywania rachunków za pomocą logarytmów.

LICZBY	LOGARYTMY	LICZBY	LOGARYTMY	LICZBY	LOGARYTMY
1	0.000000	37	1.568202	73	1.863323
2	0.301030	38	1.579784	74	1.869232
3	0.477121	39	1.591065	75	1.875061
4	0.602060	40	1.602060	76	1.880814
5	0.698970	41	1.612784	77	1.886491
6	0.778151	42	1.623249	78	1.892095
7	0.845098	43	1.633468	79	1.897627
8	0.903090	44	1.643453	80	1.903090
9	0.954243	45	1.653213	81	1.908485
10	1.000000	46	1.662758	82	1.913814
11	1.041393	47	1.672098	83	1.919078
12	1.079181	48	1.681241	84	1.924279
13	1.113943	49	1.690196	85	1.929419
14	1.146128	50	1.698970	86	1.934498
15	1.176091	51	1.707570	87	1.939519
16	1.204120	52	1.716003	88	1.944483
17	1.230449	53	1.724276	89	1.949390
18	1.255273	54	1.732394	90	1.954243
19	1.278754	55	1.740363	91	1.959041
20	1.301030	56	1.748188	92	1.963788
21	1.322219	57	1.755875	93	1.968483
22	1.342423	58	1.763428	94	1.973128
23	1.361728	59	1.770852	95	1.977724
24	1.380211	60	1.778151	96	1.982271
25	1.397940	61	1.785330	97	1.986772
26	1.414973	62	1.792392	98	1.991226
27	1.431364	63	1.799341	99	1.995635
28	1.447158	64	1.806180	100	2.000000
29	1.462398	65	1.812913	101	2.004321
30	1.477121	66	1.819544	102	2.008600
31	1.491362	67	1.826075	103	2.012837
32	1.505150	68	1.832509	104	2.017033
33	1.518514	69	1.838849	105	2.021189
34	1.531479	70	1.845098	106	2.025306
35	1.544068	71	1.851258	107	2.029384
36	1.556303	72	1.857332	108	2.033424

LICZBY	LOGARYTMY	LICZBY	LOGARYTMY	LICZBY	LOGARYTMY
109	2.037426	145	2.161368	181	2.257699
110	2.041393	146	2.164353	182	2.260071
111	2.045323	147	2.167317	183	2.262451
112	2.049218	148	2.170262	184	2.264818
113	2.053078	149	2.173186	185	2.267172
114	2.056905	150	2.176091	186	2.269513
115	2.060698	151	2.178977	187	2.271842
116	2.064458	152	2.181844	188	2.274158
117	2.068186	153	2.184691	189	2.276462
118	2.071882	154	2.187521	190	2.278754
119	2.075547	155	2.190332	191	2.281033
120	2.079181	156	2.193125	192	2.283301
121	2.082785	157	2.195900	193	2.285557
122	2.086360	158	2.198657	194	2.287802
123	2.089905	159	2.201397	195	2.290035
124	2.093422	160	2.204120	196	2.292256
125	2.096910	161	2.206826	197	2.294466
126	2.100371	162	2.209515	198	2.296665
127	2.103804	163	2.212188	199	2.298853
128	2.107210	164	2.214844	200	2.301030
129	2.110590	165	2.217484	201	2.303169
130	2.113943	166	2.220108	202	2.305351
131	2.117271	167	2.222716	203	2.307496
132	2.120574	168	2.225309	204	2.309630
133	2.123852	169	2.227887	205	2.311754
134	2.127105	170	2.230449	206	2.313867
135	2.130334	171	2.232996	207	2.315970
136	2.133539	172	2.235528	208	2.318063
137	2.136721	173	2.238046	209	2.320146
138	2.139879	174	2.240549	210	2.322219
139	2.143015	175	2.243038	211	2.324282
140	2.146128	176	2.245513	212	2.326336
141	2.149219	177	2.247913	213	2.328380
142	2.152288	178	2.250420	214	2.330414
143	2.155336	179	2.252853	215	2.332438
144	2.158362	180	2.255273	216	2.334454

389. W tablicach logarytmowych, logarytmy 1ści, 10ciu, 100tu, 1000ca i t. d. to iest 0, 1, 2, 3, i t. d. maią po sobie sześć lub siedm zer napisanych w kształcie dziesiętnych w ten sposób: 0,000000; 1,000000; 2,000000; 3,000000, co niezmienia bynaymniéy ważności tych logarytmów (n° 25).

390. Cyfra która się znayduie przed punktem lub przecinkiem oddzielaiącym całkowite od dziesiętnych, nazywa się *cechą* logarytmu (nota characteristica). Tak cecha logarytmów liczb które są między 1 i 10 iest 0; cecha logarytmów liczb które są między 10 i 100, iest 1; i t. d.

Z tego cośmy dopiero powiedzieli, łatwo iest zaraz z daney liczby ilakolwiek znakami wyrażoney poznać cechę iéy logarytmu, i na odwrot, z daney cechy liczbę znaków z ilu ma być złożona.

391. Użycie logarytmów zasadza się iak iuż wspomnieliśmy (n° 382) na własności i zawisłości odpowiadaiącéy postępu różnicowego i ilorazowego (n° 299).

1ód. Jakoż w każdym postępie różnicowym który ma zero za pierwszy wyraz, a zatém w postępie (N) ÷ 0 . 1 . 2 . 3 . 4 . 5 . i t. d. wyraz którykolwiek równy iest stosunkowi wziętemu tyle razy ile iest wyrazów przed nim (n° 272).

2re. W każdym postępie ilorazowym którego pierwszym wyrazem iest iedność, a zatém w postępie dziesiętnym (D) ÷ 1 : 10 : 100 : 1000 : 10000 : 100000 : i t. d. wyraz którykolwiek iest równy stosunkowi wyniesionemu do potęgi oznaczoney liczbą wyrazów przed nim będących (n° 296).

Więc, gdy dwa postępy N i D są ułożone tak, iż wyrazy iednego odpowiadaią wyrazom drugiego, stosunek postępu N. znayduiemy wzięty w którymkolwiek wyrazie tegoż postępu, zupełnie tyle razy, ile razy stosunek postępu D będzie czynnikiem w wyrazie odpowiadaiącym tegoż ostatniego postępu.

Idzie zatém, że dodawszy dwa wyrazy którekolwiek postępu N, i rozmnożywszy dwa wyrazy odpowiadaiące postępu D, summa dwóch wyrazów dodanych i iloczyn dwóch wyrazów rozmnożonych będą dwóma wyrazami odpowiadaiącemi sobie w tych dwóch postępach.

Summa bowiem ta składa się ze stosunku wziętego tyle razy, ile razy iest wziętym tak w iednym z wyrazów dodanych iak w drugim, a iloczyn składa się ze stosunku wziętego za czynnik tyle razy, ile razy iest wziętym tak w iednym z wyrazów rozmnożonych iak w drugim: więc, ponieważ dwa wyrazy dodane odpowiadaią dwóm wyrazom rozmnożonym, summa tamtych i iloczyn tych będą dwóma wyrazami odpowiadaiącemi sobie w tych dwóch postępach.

392. Więc, *summa logarytmów dwóch liczb iest logarytmem iloczynu tych liczb.*

393. Przeciwnie, *różnica logarytmów dwóch liczb iest logarytmem ilorazu tych liczb.* Jakoż, gdy dzielna iest równa iloczynowi dzielnika przez iloraz, logarytm dzielnéy iest równy summie logarytmów dzielnika i ilorazu: więc logarytm ilorazu równa się nadmiarowi logarytmu dzielnéy nad logarytm dzielnika.

394. To założywszy: wiemy iż dla wyniesienia iakiéy liczby do kwadratu mnożymy ią raz przez siebie; więc, dodaiąc do siebie logarytm iakiéy liczby, lub, co na iedno wychodzi *podwaiaiąc logarytm iakiéy liczby, otrzymuiemy logarytm iéy kwadratu.*

Dla wyniesienia liczby do sześcianu, mnożymy ią dwa razy następnie przez siebie. Więc, dodaiąc dwa razy do siebie logarytm iakiéy liczby, czyli, co iest to samo, *potraiaiąc logarytm iakiéy liczby, otrzymuiemy logarytm iéy sześcianu.* Podobnież co do czwartey, piątéy, i d. potęg.

395. Przeciwnie, *biorąc połowę logarytmu iakiéy liczby otrzymuiemy logarytm pierwiastka iéy kwadratowego; a biorąc trzecią część logarytmu iakiéy liczby, otrzymuiemy logarytm pierwiastka iéy sześciennego.* Podobnież co do czwartego, piątego i d. pierwiastków.

Otoż więc mnożenie zamienione w dodawanie, dzielenie w odeymowanie, formowanie potęg w proste mnożenie, a wyciąganie pierwiastków w proste dzielenie.

Tak, aby rozmnożyć 24 przez 8, biorę logarytm 24ch, który iest 1.380211
do tego logarytmu dodaię logarytm ośmiu . . 0.903090
summa iest 2.283301
szukam tego logarytmu w tablicach, i znayduię iż odpo-

wiada liczbie 192, która iest rzeczywiście iloczynem z 24 przez 8.

Gdyby liczba przez którą mnożymy była 10, 100, 1000, i t. d. trzebaby dla znalezienia logarytmu iloczynu, tylko dodać 1, 2, 3, i t. d. iedności do cechy logarytmu liczby mnożnéy, np. aby rozmnożyć 49 przez 10 dodaię 1 do cechy logarytmu liczby 49, który iest 1. 690196, a summa 2.690196 iest logarytmem iloczynu z 49 przez 10, to iest 490. Dodaiąc 2 do cechy logarytmu 1.690196, miałbym summę 3.690196, a ten logarytm iest logarytmem liczby 4900, która iest iloczynem z 49 przez 100.

Jasną iest rzeczą iż mnożyć 49 przez 10 lub przez 100, iestto czynić tę liczbę 10 razy lub 100 razy większą. Ze zaś, dodaiąc 1 lub 2 iedności do cechy logarytmu 49ciu czynimy go należącym do liczby 10 razy lub 100 razy większéy: więc tym sposobem otrzymuiemy logarytm prawdziwego ilo; czynu.

396. Aby podzielić 174 przez 29; od logarytmu 174

który iest	2.240549
odeymuię logarytm 29ciu	1.462398
różnica iest	0.778151

szukam tego logarytmu w tablicach i znayduię iż odpowiada liczbie 6 która iest w saméy rzeczy ilorazem z 174 przez 29.

Ponieważ dodaiąc 1, 2, 3, i t. d. iedności do cechy logarytmu iakiéy liczby, otrzymuiemy logarytm iéy iloczynu przez 10, 100, 1000, i t. d. widzimy iż odeymuiąc 1, 2, 3, i t. d. iedności z cechy logarytmu iakiéy liczby, mieć będziemy logarytm iéy ilorazu przez 10, 100, 1000, i t. d.

397. Jeżeli idzie o wyniesienie liczby np. 13 do kwadratu? szukam w tablicach iéy logarytmu, znayduię 1.113943, podwaiam go, i mam logarytm 2.227886, który w tablicach odpowiada liczbie 169, kwadratowi z 13 (1).

Podobnież dla podniesienia liczby 5, do sześcianu po-

(1) Zachodzi różnica o iedność między ostatnią cyfrą logarytmu 2.227887 który w tablicach odpowiada 169ciu, a ostatnią cyfrą logarytmu 2.227886 którysmy otrzymali na wypadek. W tym przykładzie i we wszystkich podobnych, uważa się ta różnica za nic, ponieważ ostatnia cyfra po prawéy ręce logarytmów w tablicach nie iest zupełnie dokładną.

troiwszy iéy logarytm 0,698970, otrzymam 2.096910; temu odpowiada w tablicach liczba 125, która iest sześcianem z 5.

398. Dla znalezienia pierwiastku kwadratowego z 144, szukam w tablicach logarytmu téy liczby, i znayduię 2.158362; biorę połowę tego logarytmu, i mam logarytm 1.079181, któremu odpowiada liczba 12, która iest pierwiastkiem kwadratowym z 144.

Również dla wyciągnienia pierwiastku sześciennego z 27, biorę trzecią część z 1.431364 logarytmu 27miu. Ta trzecia część iest 0.477121, któréy odpowiada liczba 3 będąca pierwiastkiem z 27 (1).

399. Z tego cośmy dopiero powiedzieli łatwo spostrzedz możemy, iż dla odbycia reguły trzech przez logarytmy, trzeba, ieżeli szukamy skraynego, dodać logarytmy wyrazów średnich i odjąć od summy logarytm skraynego wiadomego, reszta będzie logarytmem skraynego szukanego. Jeżeli zaś szukamy średniego, trzeba przeciwnie, dodać logarytmy skraynych i odjąć od ich summy logarytm średniego wiadomego, reszta będzie logarytmem średniego szukanego.

400. Ztąd oraz poymuiemy ile po wynalezieniu logarytmów *liczb pierwotnych* ułatwione było wynalezienie logarytmów *liczb niepierwotnych*, bo te muszą mieć za logarytmy summę logarytmów liczb pierwotnych które są ich czynnikami.

Namienimy tu ieszcze, iż są teraz nowe sposoby wynaydowania logarytmów liczb pierwotnych z wielką łatwością za pomocą rachunku wyższego, a ieżeli te sposoby odkryte zostały nieco zapóźno, posłużyły przynaymniéy do sprawdzenia bez pracy logarytmów liczb pierwotnych, co

(1) Rozwiązanie przykładów tak prostych iak powyższe, więcéy za pomocą logarytmów pociąga roboty niż zwyczayne sposoby. Lecz dobieraliśmy przykładów, których się próba natychmiast zrobić mogła i do których nie potrzeba obszernieyszéy tablicy nad przyłączoną. Uczący się, skoro ma pod ręką tablice zwyczayne, iako to: *Ulaka*, *Kalleta*, lub *Wegi*, może się przekonać naocznie o korzyści używania logarytmów, rozwięzuiąc niżéy podane zagadnienia. Z resztą kto ma potrzebę używania logarytmów, nabędzie wkrótce wprawy, która mu w każdym razie da uczuć łatwość rachunku za ich pomocą.

nie pomału przyłożyło się do rozszerzenia użycia tablic iuż ułożonych, i do uproszczenia za ich pomocą wszelkich rachunków w których używaią logarytmów.

401. Widzieliśmy iż każde za pomocą logarytmów rozwiązanie zagadnienia zaczyna się naprzód od wzięcia odpowiadaiących danym liczbom logarytmów; a po odbyciu z temi stosownych działań, kończy się na znalezieniu liczb odpowiadaiących logarytmom wypadłym. Często zaś nie znayduią się w tablicach liczby których chcemy użyć łogarytmów; lub przeciwnie, nie znayduią się logarytmy którym odpowiadaiące liczby poznać chcemy; przeto ważną iest rzeczą wiedzieć iak sobie w obu tych przypadkach postąpić należy.

402. Co do pierwszego: niech będzie dane na pierwszy przykład oznaczyć logarytm liczby 627849. Liczba ta przechodzi granice tablic nayobszerniéyszych. Oddzielam kréską dwie ostatnie cyfry po prawéy ręce, i mieć będę liczbę 6278,49. Logarytm części z lewéy ręki 6278 znayduie się w tablicach zwyczaynych. Szukam go i znayduię iż iest 3.797821. Biorę różnicę która iest między 3.797890 logarytmem 6279 i 3.797821 logarytmem 6278; różnica ta iest 0.000069 (1). To maiąc, układam proporcyią: kiedy na 1 różnicy między liczbami 6279 i 6278, mam 0.000069 różnicy między ich logarytmami, ileż na 0.49 różnicy między liczbami 6278,49 i 6278, będę miał różnicy między ich logarytmami?

Znaleziona różnica będzie więc 4tym wyrazem reguły 3ch następuiącéy, $1 : 0{,}49 = 0{,}000069 : x = 0.00003381$, czyli 0.000034 (opuszczaiąc dwie ostatnie cyfry dziesiętne). Jeżeli dodamy otrzymaną liczbę do 3.797821 logarytmu 6278, summa 3.797855 będzie logarytmem 6278,49. Więc, dodawszy 2 do cechy logarytmu 3.797855 aby go powiększyć 100 razy, logarytm 5.794855 stąd wypadły będzie logarytmem 627849 które iest 100 razy większe niż 6278,49 (2).

(1) Ta różnica znayduie się pospolicie w tablicach obok lub nad kolumną logarytmów.

(2) Takowy sposób nie iest ścisły; lecz w zwyczayném użyciu wystarczaiący. Zależy on iak widzimy, na przypuszczeniu: że różnice liczb bardzo mało między sobą się różniących, są prawie proporcyonalne różnicom między logarytmami tychże liczb.

Widoczną iest rzeczą, iż gdyby oddzielone cyfry były zerami, trzebaby tylko dodać do cechy logarytmu pozostałéy części z lewéy ręki, tyle iedności ile zer było oddzielonych.

403. Jeżeli chcemy znaleźć logarytm liczby całéy złączonéy z ułomkiem, iak np. $9\frac{3}{4}$? sprowadzam całość do mianownika 4 ułomku, co mi daie $\frac{36}{4}$: liczba ta dodana do $\frac{3}{4}$ czyni $\frac{39}{4}$. Zatém $9\frac{3}{4}$ iest tylko ilorazem z 39 przez 4; logarytm więc $9\frac{3}{4}$ iest równy różnicy logarytmu 39 i logarytmu 4. Logarytm 39 iest 1.591065
Logarym 4. . . . . 0.602060
Ich różnica 0.989005
Znaleziony logarytm iest logarytmem $9\frac{3}{4}$.

Gdyby wyrazy ułomku wypadłego po zamianie na niego całkowitości nie były objęte w tablicach, wyznaczylibyśmy naprzód ich logarytmy, podług przypadku poprzedzaiącego, poczém wzięlibyśmy różnicę tych logarytmów, iak się dopiero powiedziało.

404. Jeżeli całkowitość złączona iest z ułomkiem dziesiętnym; w tym przypadku bierzemy logarytm téy liczby, iak gdyby nie było przecinka. A znalazłszy go bezpośrednio w tablicach, lub też sposobem podanym (n° 402), uymiemy z iego cechy tyle iedności ile było dziesiętnych w liczbie podanéy.

Przyczyna tego iest bardzo prosta: gubiąc bowiem przecinek uczyniliśmy liczbę 10 razy, 100 i t. d. razy większą, ieżeli była iedna dziesiętna, dwie dziesiętne i t. d.; logarytm znaleziony należy więc do liczby dziesięć razy, sto razy, i t. d. większéy; sprowadzimy więc ten logarytm do prawdziwéy ważności, zmniéyszaiąc iego cechę iedną, dwoma, i w powszechności tylu iednościami, ile było dziesiętnych w liczbie podanéy (n° 396).

405. Jeżeli trzeba znaleźć logarytm ułomku iak np. $\frac{4}{5}$?

Uważam, iż gdy ułomek równy iest ilorazowi licznika przez mianownik, powinienbym dla otrzymania logarytmu tego ilorazu, odjąć logarytm mianownika od logarytmu licznika. Lecz że w ułomkach właściwych licznik iest mniéyszym od mianownika, a zatém logarytm licznika mniéyszym iest od logarytmu mianownika, nie można więc odjąć drugiego logarytmu od pierwszego; natenczas odeymuiemy

logarytm licznika od logarytmu mianownika, i poprzedzamy resztę znakiem —; tak logarytm 5^{ciu} iest . 0.698970
logarytm 4^{ch} 0.602060
reszta iest 0.096910

ta poprzedzona znakiem — będzie logarytmem szukanym; logarytm więc $\frac{4}{5}^{ch}$ iest — 0.096910.

Skąd widzimy, iż log. $\frac{4}{5}^{ch}$ i log. $\frac{5}{4}^{ch}$ różnią się tylko znakiem —.

Ten znak — oznacza iż logarytm poprzedzony od niego powinien być użyty w sposobie przeciwnym temu, iakiśmy oznaczyli na logarytmy całkowitości, i całkowitości z ułomkami złączonych.

Tak 1^{od} aby pomnożyć iaką liczbę przez ułomek, odeymiemy logarytm ułomku od logarytmu mnożnéy.

Gdyż aby pomnożyć przez ułomek, trzebaby dodać logarytm licznika, a odjąć logarytm mianownika; co iest to samo, odjąć różnicę logarytmu mianownika nad logarytm licznika. Ta zaś różnica iest właśnie logarytmem ułomku: więc 1^{od} aby pomnożyć iaką liczbę przez ułomek, trzeba odjąć iego logarytm od logarytmu mnożnéy.

2^{re} Aby podzielić iaką liczbę przez ułomek, dodamy logarytm ułomku do logarytmu dzielnéy.

Ażeby bowiem podzielić przez ułomek, trzebaby dodać logarytm mianownika, a odjąć logarytm licznika; co iest właśnie to samo, dodać nadmiar logarytmu mianownika nad logarytm licznika. Ten zaś nadmiar iest logarytmem ułomku; więc 2^{re} aby podzielić iaką liczbę przez ułomek, trzeba dodać logarytm ułomku do logarytmu dzielnéy.

406. Ażeby znaleźć logarytm ułomku dziesiętnego, szukać będziemy iego logarytmu iak gdyby był liczbą całkowitą; znalazłszy go, weźmiemy różnicę między liczbą jedności oznaczoną przez liczbę dziesiętnych ułomku a logarytmem znalezionym, i poprzedzimy resztę znakiem —.

Naprzykład, aby mieć logarytm 0.009^{ch}, biorę log. 9^{ciu} który iest 0.954243. Odeymuię go od 3,000000 które iest logarytmem 1000^{ca}, i poprzedzam znakiem — różnicę 2.045757. Logarytm więc 0.009^{ch} iest — 2.045757. Jakoż, $0,009 = \frac{9}{1000}$; dla znalezienia zaś logarytmu $\frac{9}{1000}^{ch}$, trzeba odjąć logarytm 9^{ciu} od logarytmu 1000^{ca}, i dać reszcie znak — (n° 405); więc logarytm 0.009 iest — 2.045757.

407. Aby uniknąć logarytmu odjemnego, iaki dla ułomku zawsze wypadnie; rożnmożymy licznik przez pewną liczbę dziesiętną np. 1000, znaydziemy logarytm dla tak pomnożonego ułomku, sposobem iuż wskazanym (n° 405) a od znalezionego logarytmu, który będzie dodatny, odeymiemy (przez samo tylko wskazanie działania) logarytm liczby dziesiętnéy, np. 1000, przez którą pomnożyliśmy licznik. I tak zamiast $\frac{3}{8}$, biorę naprzód $\frac{3000}{8}$, i znaydę iak wyżéy log. 3000 = 3,477121
log. 8 = 0,903090.
więc log. $\frac{3000}{8}$ = 2,574031.
Ztąd logarytm $\frac{3}{8}$ = 2,574031. — 3.

A zatém za pomocą naznaczonych tym sposobem logarytmów, gdybym miał np. 675 pomnożyć przez $\frac{3}{8}$;
wziąłbym log. 675 . . 2,829304
log. $\frac{3}{8}$ . . . 2,574031 — 3
summa iest . . . 5,403335 — 3.

A wykonawszy wskazane odeymowanie od cechy, zostanie logarytm iloczynu 675 przez $\frac{3}{8}$ = 2,403335

408. Zastanówmy się teraz nad przypadkiem 2^{gim}, to iest, iakby postąpić należało w wyznaczeniu do iakiéy liczby należy logarytm który się w tablicach nie znayduie, bądź że przechodzi granice tablic, bądź że wpada między dwa logarytmy tablic.

Naprzód, ieżeli iest logarytm przechodzący granice tablic, zmnieyszymy iego cechę tylu iednościami ile potrzeba aby tak przygotowany nie przechodził iuż tablic.

Natenczas iedno z tego dwóyga; albo znaydziemy w tablicach wszystkie cyfry logarytmu, albo znaydziemy tylko pierwsze cyfry iego.

409. Jeżeli wszystkie cyfry logarytmu znayduią się w tablicach, liczba szukana będzie ta, która w tablicach znayduie się obok logarytmu o który idzie; lecz trzeba przydać do niéy tyle zer, ileśmy ujęli iedności od cechy logarytmu podanego:

Naprzykład, ująwszy 4 iedności z cechy logarytmu, 6.225309, widzę iż logarytm pozostały 2.225309 znayduie się całkiem w tablicach, i że liczba iemu odpowiadaiąca iest 168. Będę więc miał liczbę szukaną przydawszy czte-

ry zera do 168; tak 6.225309 iest logarytmem liczby 1680000.

410. Jeżeli pierwsze tylko cyfry logarytmu znayduią się w tablicach, postąpimy iak w przykładzie następuiącym: niechby potrzeba było np. wyznaczyć do iakiéy liczby należy log. 5.860412?

Ująwszy dwie iedności od cechy, znayduię iż logarytm pozostały 3.860412 wpada między logarytmy liczb 7251 i 7252. Liczba więc szukana będzie większa niż 7251 a mniéysza niż 7252; będzie więc równa 7251 więcéy ułomek który znaleźć trzeba.

Aby mieć ten ułomek, biorę różnicę logarytmów liczb 7252 i 7251. Różnica ta, iest 0.000060.

Potém biorę różnicę między 3.860412 logarytmem pozostałym, i 3.860398 logarytmem liczby mniéyszéy 7251, różnica ta iest 0.000014.

Nakoniec układam proporcyią, 0.000060 : 0.000014 = 1 : x, czyli 60 : 14 = 1 : $x = \frac{14}{60}$. Zatém ułomek $\frac{14}{60}$ iest tym który trzeba dodać do liczby 7251, aby mieć liczbę któréy odpowiada logarytm 3.860412. Ta liczba iest więc $7251\frac{14}{60}$; a gdy logarytm 5.860412 należy do liczby sto razy większéy, liczba szukana będzie liczbą $7251\frac{14}{60}$ sto razy zwiększoną czyli $725100\frac{1400}{60}$; to iest, uskuteczniaiąc dzielenie 1400 przez 60, i zamieniaiąc resztę na dziesiętne; będzie 725123,33 blisko.

Gdy logarytm dany wpada między dwa logarytmy tablic, ten przypadek wychodzi na poprzedzaiący; trzeba więc odbyć toż samo działanie, wyiąwszy że nie będziemy dopisywać zer do liczby znalezionéy, ponieważ nie uymowaliśmy iedności od cechy logarytmu danego.

411. Jeżeli logarytm którego liczbę wyznaczyć chcemy, wpada między dwa logarytmy należące do liczb małych, natenczas dobrze iest powiększyć iego cechę iedną, dwoma lub trzema iednościami, ile tego dozwala obszerność tablic; wziąć liczbę naybliżéy odpowiadaiącą temu logarytmowi, oddzielić przecinkiem tyle cyfer ileśmy przydali iedności do cechy.

Naprzykład, ieżeli mam logarytm 0.903854 który wpada między logarytmy liczb 8 i 9 przydaię trzy iedności do iego cechy, i szukam iakiéy liczbie odpowiada w tablicach log. wypadaiący 3.903854. Wpada on między 8014 i 8015; biorę 8014 które iest liczbą naybliżéy przystępuiącą do odpowiedzenia logarytmowi 3.903854. Liczba więc szukana iest 8,014 zbliżona mniéy niż o iednę tysiączną.

Jeżeli iest potrzeba większego ieszcze zbliżenia, użyiemy sposobu wskazanego w n° 410.

412. Nakoniec, ażeby wiedzieć do iakiego ułomku należy logarytm odjemny np. — 1.255273; trzeba szukać iakiéy liczbie odpowiada logarytm dodatny 1.255273. Liczba ta iest 18; zatém — 1.255273 odpowiada ułomkowi $\frac{1}{18}$.

413. Lecz ponieważ nie trafia się zawsze, aby się logarytm całkiem w tablicach znaydował, w tym razie dla znalezienia w dziesiętnych ważności zbliżonéy ułomku odpowiadaiącego logarytmowi odjemnemu, trzeba odjąć logarytm dany od 1, 2, 3, 4, i t. d. iedności, szukać do iakiéy liczby należy logarytm wypadły, i oddzielić przecinkiem, z prawéy strony liczby znalezionéy, tyle cyfer ile było iedności w liczbie od któréy odjęliśmy logarytm dany.

Chcę wiedzieć np. iakiemu ułomkowi odpowiada logarytm odjemny — 1.390883; odeymuię logarytm dany od 5 w ten sposób:

. . . . .	5.000000
. . . . .	1.390883
. . . . .	3.609117

Logarytm pozostały wpada między logarytmy liczb 4065 i 4066. Ułomek więc szukany iest 0.04066.

Oddzieliłem w otrzymanym wypadku pięć dziesiętnych. Odeymuiąc bowiem od 5 logarytm dany, rozmnożyłem 100000 których logarytmem iest 5, przez ułomek do którego należy logarytm dany; czyli co na iedno wychodzi, rozmnożyłem ułomek przez 100000. Więc logarytm wypadły należy do liczby 100000 razy większéy; aby więc przywieśdź do prawdziwéy ważności liczbę znalezioną 4066, trzeba ią zmniéyszyć sto tysięcy razy; trzeba więc napisać 0.04066.

414. Dla skrócenia rachunków w pewnych przypadkach zamieniamy odeymowanie logarytmów na dodawanie, co uskuteczniamy za pomocą *dopełnień arytmetycznych*.

Nazywamy *dopełnieniem arytmetycznem* (*complementum arithmeticum*) różnicę która się znayduie między iaką liczbą i iednością z tylu zerami ile iest cyfer w danéy liczbie. Łatwo znayduiemy dopełnienie arytmetyczne iakiéy liczby

np. 3728, uważaiąc cyfry które trzeba dodawać od lewéy ku prawéy ręce do każdéy z cyfer liczby 3728, aby każda summa czyniła 9, wyiąwszy ostatnią po prawéy ręce która powinna czynić 10. Tak dopełnienie arytmetyczne liczby 3728 iest 6272 (1).

415. Że za pomocą dopełnień arytmetycznych można zamienić zwyczayne odeymowanie w dodawanie, przekonamy się z następuiącego przykładu: daymy iż trzeba odjąć 3728 od 5246. Dodaię do 5246 dopełnienie arytmetyczne liczby 3728 które iest 6272 i mam na summę 11518 wypadek o 10000 większy od żądanego, gdyż zamiast odjęcia wprost 3728, dodałem 10000 mniéy 3728, zrobiłem więc żądane odeymowanie ale oraz i powiększenie o 10000, to iest o 1 dziesiątek względem naywyższéy cyfry w liczbie odeymować się maiącéy. Odiąwszy więc ten dziesiątek, iak w tym razie 10000, mam 1518 różnicę szukaną (2).

416. To cośmy dopiero powiedzieli, dobrze zrozumiawszy, ieżeli w iakiém działaniu trzeba odjąć logarytm; zamiast go odjąć, dodamy iego dopełnienie arytmetyczne, a odeymiemy dziesiątek od cechy summy wypadłéy.

Łatwo dać przyczynę tego sposobu, bo ieżeli np. zamiast odjąć od logarytmu 1.176091 logarytm 0.845098, przydaiemy dopełnienie iego arytmetyczne, to iest to samo iak gdyby się dodało 10.000000 — 0.845098; w tym zaś razie robimy w tymże samym czasie żądane odeymowanie, i powiększamy cechę wypadku iednym dziesiątkiem: trzeba więc odjąć ieden dziesiątek od 10.330993, które iest summą logarytmu 1,176091 dodanego do 9,154902 dopełnienia

(1) Jasną iest rzeczą iż się znaydnie użytym sposobem taż sama różnica, co i sposobem podanym pod n. 52.

(2) Gdybym za pomocą tego sposobu miał odjąć od iednéy liczby kilka liczb złożonych z iednakowéy liczby cyfer, ująłbym z wypadku tyle iedności rzędu właściwego ile wziąłem dopełnień arytmetycznych; np. dodawszy do 4480456
dopełnienie arytmetyczne liczby 897523 które iest . 102477
. . . . . 321702 . . . 678298
. . . . . 253456 . . . 746544
mam wypadek 6007775
który iest o 3000000 większy; powinien być więc 3007775. Jakoż otrzymałbym toż samo, odeymuiąc od 4480456 summę trzech liczb powyższych.

arytmetycznego logarytmu 0,845098. Wypadek 0,330993 iest ten sam którybyśmy mieli biorąc nadmiar logarytmu 1,176091
nad logarytm 0,845098
iak tu widzimy 0,330993

417. Przystosuymy do przykładu cośmy dopiero powiedzieli. Daymy iż żądaią czwartego wyrazu proporcyi następuiącéy, 9 : 27 = 33 : x. Działaiąc przez logarytmy trzeba wziąć summę logarytmów średnich, a odjąć od niéy logarytm skraynego wiadomego (n° 399). Zamiast odięcia tego log. dodam iego dopełnienie arytmetyczne iak następuie:
log. liczby 27 1,431364
log. . 33 1,518514
dopełnienie arytm. logarytmu liczby 9 . 9,045757
summa 11,995635

Wykreślam dziesiątek z cechy, i znaydnię iż logarytm 1,995635 odpowiada w tablicach liczbie 99; mam więc proporcyią zupełną 9 : 27 = 33 : 99; która iest prawdziwa.

Przykład ten wystarcza abyśdać poznać użycie dopełnień arytmetycznych, i ich użytek dla skracania rachunków w logarytmach zamieniaiąc odeymowanie w dodawanie.

ZAGADNIENIA.

418. I. Maiąc dane logarytmy liczb 3, 5 i 7, to iest: 0,477121; 0,698970; i 0,845098; wyznaczyć logarytmy liczb od 1 aż do 10.

II. Znaleźć logarytm liczby 1) 788873; 2) 4952,74; 3) $1528\frac{3}{5}$; 4) $\frac{7}{8}$?

III. Znaleźć liczbę odpowiadaiącą logarytmowi 1) 7,9490727; 2) 6,725843; 3) 0,5432725; 4) — 1,739362?

IV. Wynieść do potęgi piątéy 0,17?

V. Znaleźć iloraz zbliżony aż do dziesięciotysiącznych 1) z 17954 podzielonych przez 12826; 2) z $\frac{17}{23}$?

VI. Jakiż iest 1) $\sqrt{19881}$? 2) $\sqrt[3]{97666}$? 3) $\sqrt[4]{364}$? 4) $\sqrt[7]{5}$; 5) $\sqrt[5]{(5736333)^3}$; mniéy niż o iednę setną zbliżony?

VII. Znaleźć 1) stosunek postępu równoilorazowego

którego 25 i 1166400 są skraynemi a który składa się z 5 wyrazów; 2) 4 średnie ilorazowe między $2\frac{2}{3}$ i $5\frac{3}{4}$?

VIII. 100000zł. kapitału po $5\frac{0}{0}$ ileż wynosi po 10 latach wraz z proc. składanym?

IX. Jeżeli po 10 latach odebrano kapitału 162889,473 zł. wraz z procentem składanym po $5\frac{0}{0}$, iakiż był pierwiastkowy kapitał?

X. Oddano pewną kwotę pieniędzy na proc. po $5\frac{0}{0}$. Na końcu każdego r. dołączaią proc. do kapitału. Jest pytanie w iakim czasie kapitał zostanie podwoiony przez ciągle dołączanie do niego procentu?

XI. Z beczki wina trzymaiącéy 200 garcy uciągnięto garniec za który dolano wody. Powtórzono to działanie z mieszaniną, i chcą ie powtarzać aż do otrzymania tylko $\frac{4}{5}$ części wina w beczce; ileż razy maią powtórzyć działanie?

XII. Dzwon pewnéy machiny pneumatycznéy iest 8 razy większy niż obiętość wnętrza pompy; pytaią się ile razy trzeba obrócić stępel, ażeby powietrze w dzwonie było 60 razy rzadsze niż w stanie naturalnym?

XIII. Wynaleźć 4ty wyraz proporcyi, $\sqrt{80\,000} : (1\frac{2}{5}8\frac{4}{5})^4 = \frac{217}{3472} : x$?

XIV. Znaleźć ważność ułomka ułomków $\frac{2}{3}$ $\frac{5}{7}$ciu z $\frac{4}{11}$, w ułomku zwyczaynym?

XV. Sądzący się być biegłym rachmistrzem rzekł do matematyka pokazuiąc mu kiesę luidorów: ieżeli zgadniesz przez twoie kombinacyie o ile iest więcéy w téy kiesie niż w tym worku pieniędzy który zawiera 3474zł. dam ci 100 luidurów; ieżeli zaś nie zgadniesz dasz my twóy teleskop.

O UKŁADZIE NOWYCH MIAR FRANCUZKICH.

1. Potrzeba używania iednostaynych i stałych miar w społeczności, była powodem do ścisłych i mozolnych badań w celu ustanowienia *miary pierwotnéy* czyli *zasadniczéy* do któréyby wszelkie inne z łatwością można odnosić. Uczeni francuzcy starali się ile możności zadosyć uczynić wszelkim w téymierze trudnym warunkom. Jak wielkie prace podięto nim tego dostąpiono, nie iest tu mieysce ani szczupłość dzieła dozwala wymieniać. Odsyłamy raczéy do dzieł obszernie o tém piszących, kładąc tylko same z tych prac wypadki.

2. Układ miar nowych wprowadzonych od r. 1795 i ustanowionych we francyi nazywaią *systematem metrycznym*, gdyż w nim wszystkie miary zawisły od *metra* który iest iednością miar długości. Że zaś miara ta zasadza się na rzeczywistéy wielkości ziemi naszéy ztąd ią nazywaią naturalną.

3. Rozróżniaią w systemacie metrycznym ośm gatunków miar używanych w towarzystwie.

1e miary liniiowe czyli długości, których iednością iest *metr*

2e miary kwadratowe czyli powierzchni, których iednością iest *ar* (szczególniéy do mierzenia ziemi);

3e miary sześcienne czyli obiętości ciał stałych, których iednością iest *ster* (szczególniéy do mierzenia drzewa opałowego):

4e miary obiętości ciał ciekłych i sypnych, których iednością iest *litr*;

5e miary ciężkości czyli wagi, których iednością iest *gram*;

6e miary wartości czyli monety, których iednością iest *frank*;

7e miary kątów; których iednością iest *stopień*;

8e miary czasu, których iednością iest *godzina*.

4. Mówić tylko będziemy o sześciu pierwszych gatunkach miar, odsyłaiąc do ieometryi co do kątów, a do mechaniki co do czasu.

5. Siedm iest wyrazów które dołączaią do iedności głównych dla uformowania miar po 10 razy większych i po

10 razy mniéyszych. Do powiększania użyto wyrazów greckich: do zmnieyszania łacińskich. Obięte są one w następuiącéy kolumnie ze swoiém znaczeniem.

Między *deca* i *deci* zostawiony iest odstęp dla umieszczenia iedności.

Myria	. .	dziesięćtysięcy
Kilo	. .	tysiąc
Hecto	. .	sto
Deca	. .	dziesięć
Metr, Ar, Ster, Litr, Gram, Frank.		
Deci	. .	dziesiętna
Centi	. .	setna
Milli	. .	tysiączna

6. *Metr* iest dziesiąta miliionowa część ćwierci *południka ziemskiego* (1) albo odległości *bieguna od równika*. Cały więc południk ma 40 miliionów metrów. A że każdy okrąg dzielą podług nowego podziału na 400 części równych nazwanych *stopniami*, zatém 4ta część południka zawiera stopni 100; więc metr iest 100 000na częścią nowego stopnia południka.

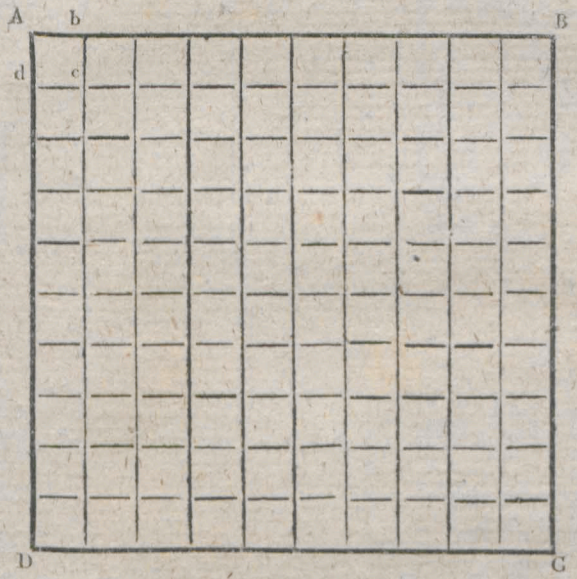
metr = $1\frac{3}{4}$ łok. polsk: blisko, dokładnie zaś $\overset{\text{metr}}{72} = 125$ łokci polskich.

myriametr = $1\frac{1}{3}$ mili polskich blisko, dokładnie zaś $\overset{\text{myriam.}}{10} = 12{,}15$ mil polskich.

Na 4tą część południka idzie 1000 myriametrów a 1215 mil polskich, na cały więc południk czyli okrąg ziemski 4000 myriametrów a 4860 mil polskich.

7. *Ar*. iest dekametr kwadratowy t. i. kwadrat maiący w każdym boku dziesięć metrów, i zawiera sto metrów kwadratowych, iak to okaznie figura następuiąca.

(1) Znaczenie wyrazów: *południk*, *biegun*, *równik*, wiadome iest z początków icografii matematycznéy.



Liniia AB = 10 metrom, liniia AD = 10 metrom, liniia Ab = 1 metrowi, toż samo liniia Ad: powierzchnia Abcd iest metrem kwadratowym (1), dekametr więc kwadratowy zawiera sto metrów kwadratowych. Widzimy stąd, iż gdy wymiary iakiéy powierzchni są dziesięć razy większe albo mniéysze od wymiarów innéy, powierzchnia pierwszéy iest sto razy większa albo mniéysza od powierzchni drugiéy. *Deciar* nie iest w używaniu gdyż nie iest kwadratem, lecz *centiar* czyli metr kwadratowy; również *dekar* nie iest używany lecz *hektar* czyli hektometr kwadr. Używany iest także do wielkich powierzchni *myriar* czyli kilometr kwadrat.

Centiar = 5 pręcikom i 35 ławkom kwadratowym blisko, dokładnie zaś $\overset{\text{centiar.}}{2916} = \overset{\text{pręcikom kwadr.}}{15625}$

Ar = 5 prętom i 35 pręcikom kwadratowym blisko, dokładnie zaś $\overset{\text{ar.}}{2916} = \overset{\text{prętom kwadr.}}{15625}$

hektar = 5 sznurom i 35 prętom kwadratowym blisko, dokładnie zaś $\overset{\text{hektar.}}{2916} = \overset{\text{sznurom kwadr.}}{15625}$

(1) obacz przypisek pod nrem 64.

8. *Ster* iest metr sześcienny, służy on szczególniéy do mierzenia drzewa na opał. Podziałów téy miary nie używaią.

Jest zaś ster = blisko 5téy części naszego sążnia sześciennego albo = $41\frac{19}{20}$ stop sześciennych.

9. *Litr* iest obiętość decimetru sześciennego, t. i. naczynia któreby miało decimetr wzdłuż, decimetr wszerz i decimetr wzwyż (1). Zobaczymy w artykule następuiącym że litr wody czystéy waży 1 kilogram. Litr używany iest w handlu do rzeczy suchych i ciekłych w małéy ilości, *dekalitr* szczególniéy do zboża, *hektolitr* do rzeczy suchych i ciekłych w znacznéy ilości. Kilolitr i myrialitr iako bardzo wielkie nie są używane.

Litr = 1 kwarcie polskiéy zupełnie
dekalitr = $1\frac{1}{2}$ garcom, *hektolitr* = 25 garcom.

10. *Gram* iest waga centymetru sześciennego wody dystylowanéy wziętéy w naywiększéy swoiéy gęstości (t. i. przy 4tym stopniu termometru stostopniowego, *centigrade*). *Centimetr* sześcienny równa się obiętości iednego millilitra, więc millilitr wody dystylowanéy waży 1 *gram*, a zátém *litr* waży 1 kilogram. Kilogramu używaią iako funta metrycznego. Półkilogramu równa się używanemu w handlu funtowi (*livre*). Poddziały grama używane są szczególnie od chemików i w ogólności od trudniących się artykułami drogienii. *Myriagram* używany iest w ciężarach znacznych, tudzież waga o 100 kilogramach iako cetnar metryczny, lub o 50 kilogramach iako pół cetnara metrycznego równaiącego się cetnarowi używanemu.

gram. granom — gram. granom
1 = $22\frac{2}{5}$ blisko; dokładnie zaś 11 = 250
kilogr. funtom — kilogr. funt.
1 = $2\frac{7}{16}$ blisko; dokładnie zaś 405 504 = 1 000 000
myriagr. funt. — myriagr. funt.
1 = $24\frac{5}{8}$ blisko; dokładnie zaś 405 504 = 10 000 000.

11. *Frank* iest sztuka srebra ważąca 5 gramów zmieszana z $2\frac{1}{10}$ miedzi; zawiera więc 45 decygramów czystego srebra a 5 decygramów miedzi. Co do nazwisk poddziałów, nie mówią decyfrank, centyfrank, lecz *decym*, *centym*. Wyższych także podziałów nie używaią. Kilogram monety srebrnéy ważyłby 200 franków.

frank — frank.
1 = 1zł. 18sr. blisko, dokładnie zaś 128 = 207zł.

12. Systemat metryczny z wielu względów ma pierwszeństwo przed wszystkiemi dotąd używanemi systematami miar; lecz naywiększa dogodność iego iest ta, że podziały miar są w nim iednakowe i stosowne do systematu naszego liczenia (1). Rachunek więc z liczbami wielorakiemi nie ma w tym razie mieysca, bo iest ten sam co rachunek liczb całych i dziesiętnych, zamiana miar wyższych na niższe i przeciwnie, uskutecznia się iednym pociągiem pióra dopisuiąc zera lub przenosząc przecinek.

Np. 504,35 metrów, czynią 50,435 dekam. 5,0435 hektom. 0,50435 kilom. a 5043,5 decimetr. 50435 centim. 504350 millim. i t. d. podobnież i co do innych miar dziesiętnych.

Gdyby więc we wszelkich miarach używano podziałów dziesiętnych, nie byłoby potrzeby używania ułomków zwyczaynych (porówn: no 176; 208). Lecz przyzwyczaieni iesteśmy brać $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{6}$ i t. p. części z całkowitości których za pomocą dziesiętnych dokładnie oznaczyć nie można; i ta iest podobno iedyna niedogodność którą systematowi metrycznemu słusznie zarzucić można. Życzyćby ieszcze wypadało ażeby podział dwunastny był zachowany, wszakże to nastąpić nie mogło, gdy podział miar nowych miał być stosowny do układu liczenia naszego.

Zważaiąc iednak iż miary iednego rodzaiu nie są iednostayne przynaymniéy w każdym w szczególności kraiu, lecz często różne w różnych iego prowincyiach, a nawet w iednémże mieście; że się znayduią stopy zwyczayne i szczególne, łokcie większe i mniéysze; słowem że na różne gatunki rzeczy które naturalnie powinny mieć iednę miarę, różne miary iuż pod różném iuż pod iednakowém nazwiskiem są używane (2); gdy tak rozlicznych miar zważymy rozlicznieysze ieszcze podziały; nie można nie życzyć ustanowienia miar stałych i iednostaynych (3).

1) obacz przypisek pod nrem 116.

(1) A stąd że są iak nayłatwieysze do spamiętania, widzimy oczywiście.
(2) Nie bez zastanowienia w miastach Europeyskich osobliwie niemieckich znayduiemy łokcie inne do iedwabiu, inne do płótna a inne do wełny; z miar do ciał ciekłych inne do wina, inne do piwa, inne do oleiu i t. d. wagi także inne handlowe, inne menniczne, inne jubilerskie, a inne aptekarskie, lubo te nie mniéy są handlowemi.
(3) Ob. *Jeogr. matematyczną Jana Śniadeckiego* Rozdz III. § 52 *ustanowienie miar i węg powszechnych*. Ed. 3 w Wilnie 1818.

PRZYPISY

do czterech głównych działań arytmetycznych, czyli sposoby niektórych ułatwień i skróceń w pomienionych działaniach.

DO DODAWANIA.

Jeżeli mamy wiele liczb dodać razem; można dla ułatwienia odbyć kilka dodawań cząstkowych, i dodać razem summy szczególne z tamtych wypadłe. Widoczną iest rzeczą iż połączenie tych wszystkich summ, całą summę okaże.

Jeżeli mam 9 dodać w pamięci do iakiéy liczby, postrzegam iż iest to samo dodać naprzód 10 a potém odiąć 1. Podobnież postąpiłbym maiąc dodać 19; 29: i t. d. to iest; dodałbym 20; 30; i t. d. a wypadek zmnieyszyłbym iednością. Gdybym miał dodać 18? dodałbym 20 a wypadek zmnieyszyłbym 2 iednościami, i t. d.

DO ODEYMOWANIA.

Odeymowanie można zamienić w dodawanie za pomocą dopełnień arytmetycznych (n° 415). Sposób ten szczególniéy użytecznym iest w tenczas gdy iest wiele dodawań i odeymowań następnych, co się okazało w przypisku do n° 415.

Jeżeli mam w pamięci odeymować liczbę 9; łatwo iest znaleźć resztę, odeymuiąc 10 a dodaiąc do wypadku 1. Podobnym sposobem postąpiłbym maiąc odeymować 19; 29; i t. d.

DO MNOŻENIA.

Skoro ieden z czynników zbliża się do takiéy liczby która dogodnego daie mnożnika, tedy można rozmnożyć naprzód przez tego mnożnika, a następnie otrzymany iloczyn stosownie zmnieyszyć.

Tak gdybym miał 9436 pomnożyć przez 999; mnożę 9436 przez 1000, a z iloczynu 9436000 odeymuię raz mnożną 9436, i mam 9 426 564 iloczyn szukany.

Gdybym miał iaką liczbę pomnożyć przez 399; mnożę liczbę daną przez 400, lecz z iloczynu odeymuię mnożną raz wziętą, a reszta iest szukanym iloczynem.

np.	4963
przez	400
daie	1985200
odiąwszy . . .	4963
zostaie . .	1980237 iloczyn szukany

Gdybym miał mnożyć przez 4998? mnożę naprzód przez 5000; a od iloczynu odeymuię mnożną dwa razy wziętą.

np.	86745
przez . . .	5000
daie	433725000
odiąwszy . .	173490 iako 2 razy 86745
zostaie . . .	433551510 szukany iloczyn

z 86745×4998.

Gdy mnożnik zawiera cyfry wielokrotne iedne względem drugich, natenczas iloczyny cząstkowe znayduią się bardzo łatwo. Rozmnożywszy mnożną np. przez 3, aby ią rozmnożyć przez 6, biorę tylko 2 razy iloczyn znaleziony z rozmnożenia przez 3, a wziąłbym go 3 razy, maiąc mnożyć liczbę podaną przez 9. Rozmnożywszy zaś mnożną przez 8 gdybym ią miał mnożyć przez 4 wziąłbym tamtego iloczynu połowę; i t. d. pamiętaiąc zawsze na właściwe miéysca cyfer iloczynów cząstkowych.

Wiemy iż mnożenie można uskutecznić zaczynaiąc przez cyfry naywyższe mnożnika (obacz przypisek do n° 70). Postępowanie to przez które możemy zaraz poznać cyfry maiące naywiększą wartość a na których częstokroć przestaiemy, służy do skrócenia mnożeń z dziesiętnemi gdy znaczną ich liczbę zawieraią czynniki, a iloczyn ma być zbliżony tylko do kilku dziesiętnych.

Niech będzie np. 567,24 863 957 do pomnożenia przez 269,467 z czego iloczyn ma być tylko mniéy iak o iednę tysiączną zbliżony. Trzeba tu mieć wzgląd na iloczyny cząstkowe mogące znacznie wpływać na części tysiączne. I tak rozmnożywszy 6 dziesięćtysiącznych mnożnego przez 9 iedności mnożnika, mieć będę 54 dziesięćtysiącznych t. i.

5 tysiącznych które chcę zachować. Ażeby zapewnić dokładność nieiako wyższą nad żądaną, będę mnożył setne tysiączne mnożnego przez iedności mnożnika; lecz gdy cyfry mnożnika maią iedności dziesięć razy, sto razy lub tysiąc razy większe, mnożyć będę niemi dziesiętne, dziesięć razy, sto razy lub tysiąc razy mnieysze niż te które były rozmnożone przez iedności mnożnika: przeciwnie gdy cyfry mnożnika zawieraią części dziesięć razy, sto razy lub tysiąc razy mnieysze niż iego iedności, dosyć iest mnożyć niemi cyfry mnożnego dziesięć razy, sto razy lub tysiąc razy wyższey wartości niż te które były rozmnożone przez iedności mnożnika. Widzimy iż tym sposobem ostatnie cyfry iloczynów cząstkowych będą iednościami tegoż samego rzędu względem iedności głównéy mnożnego, i dla tego też znaydować się muszą w iednéy kolumnie.

W podanym przykładzie napisawszy mnożnik pod mnożną tak, ażeby iéy setne tysiączne oznaczone kropką, były w iednéyże kolumnie z iednościami tamtego, zaczynam mnożyć przez 2, które że są stami względem iedności mnożnika, zaczynam więc od mnożenia przez nie, cyfry 5 która zawiera części sto razy mnieysze względem iedności cyfry oznaczoney 3. Maiąc mnożyć przez 6 dziesiątków mnożnika zaczynam od mnożenia 9 które są częściami dziesięć razy mnieyszemi względem iedności cyfry oznaczoney 3, i t. d. W znalezionym iloczynie całym 155274,22943 pomiiam dwie ostatnie cyfry 43, i mam iloczyn żądany do tysiącznych części przybliżony 155274,229. Że zaś 29 zbliża się bardzo do 30 i że pominąłem niektóre cyfry w iloczynie cząstkowym, iloczyn cały mniéy niż o iednę setną zbliżony będzie 155274,23. Gdybyśmy uskutecznili mnożenie zwyczaynym sposobem, znaleźlibyśmy iloczyn:

	576,24863957
	269,457
	11524972790
	3457491834
	518623767
	23049944
	2881240
	403383
	155274,22943

155274,22967 261349 zkąd widzimy że iloczyn sposobem zbliżonym wyrachowany nie różni się od iloczynu dokładnego iak o 2 dziesięciotysiączne dopiero i następnie mnieysze części.

DO DZIELENIA.

Skoro dzielnik zbliża się do takiéy liczby, która dogodnym być może dzielnikiem, tedy można dzielić naprzód, przez tegoż dzielnika dogodnego, a następnie otrzymany iloraz powiększyć stósownie.

Tak gdybym miał liczbę 839025 dzielić przez 99; dzielilbym ią przez 100 iako dzielnik dogodny, a do ilorazu 8390, 23 dodałbym setną część tegoż ilorazu, to iest: 83,9025, otrzymałbym więc iloraz 8474,1525 który nie iest ieszcze prawdziwym, bo z drugiego ilorazu, trzebaby wziąć znowu część setną to iest: 0,839025 i dodać ią do summy dwóch pierwszych ilorazów, i tak następnie.

Gdybym miał na drugi przykład 8466525 dzielić przez 999; dzielilbym przez 1000, a do otrzymanego ilorazu 8466525 dodałbym tysiączną część iego to iest: 8,466525 i miałbym 8474,99125 iloraz znacznie zbliżony. Gdybym zaś do téy summy dodał tysiączną część drugiego ilorazu, to iest: 0,008466525 otrzymałbym 8474,9999775 iloraz ieszcze bardziéy zbliżony. Widzimy tu, iż z samych dziesiętnych części tych ilorazów, nie może więcéy powstać iak iedna całkowitość. Dla uniknienia więc długiéy roboty dosyć iest pominąwszy dziesiętne w pierwszym ilorazie, dodać do niego 1, a otrzymamy iloraz, albo zaraz prawdziwy albo do prawdziwego bardzo zbliżony.

W dzieleniu użyć ieszcze można następuiącego sposobu skrócenia za pomocą którego znayduie się iloraz bardzo łatwo bez większego uchybienia iak o iedność: wykreślamy w dzielnéy z prawéy strony, tyle cyfer mniéy iedną, ile ich iest w dzielniku, przez który uskutecznia się dzielenie pozostałéy dzielnéy aż do ostatniéy cyfry zachowanéy. Potém zamiast spuszczania obok reszty następuiących cyfer w dzielnéy, opuszcza się cyfra iedności w dzielniku i posuwa się dzielenie zmnieyszaiąc dzielnik o iednę cyfrę za każdém dzieleniem następném aż do ostatniéy cyfry.

Niech będzie np. liczba 794386253 do dzielenia przez 8647. Biorę liczbę 794386 za podzielną, a znalazłszy dwie pierwsze cyfry ilorazu z resztą 7509, dzielę ią przez dzielnik w którym opuszczam 7 iedności naznaczone kropką; znalazłszy trzecią cyfrę ilorazu z resztą 597 dzielę ią znowu przez dzielnik w którym opuszczam 4 dziesiątki, i t. d.

Można tu widzieć wzór porównawczy dwóch działań dzielenia, zkąd się okazuie że iloraz sposobem skróconym wyrachowany różni się od prawdziwego tylko o iedność.

Dzielenie zwyczayne		*Dzielenie skrócone*	
.....	8647	...	8647
794 386 253	91868	794386253	91869
16156		16156	
75092		7509	
59165		597	
72833		81	
(3657)		(9)	

Sposób ten gruntuiący się na zasadzie wyłożonéy pod n° 106 i 107; szczególniéy iest dogodny, gdy w liczbach podanych są części dziesiętne, a nie potrzeba wcale lub bardzo mało cyfer całkowitości w ilorazie, natenczas bowiem dzielnik zaraz się zaczyna zmniéyszać.

Naprzykład, maiąc dzielić 155 274; 22 967 267 przez 269,457; zważam naprzód że powinno być trzy cyfry całkowitości w ilorazie, (n° 99), a zachowuiąc kilka tylko cyfer dziesiętnych, szukam zwyczaynym sposobem dwóch pierwszych cyfer ilorazu, potém zaś używaiąc skrócenia o którém mówimy znaydę iloraz który w tysiącznych dopiero częściach różnić się będzie od prawdziwego. Gdybym zaś zwyczaynym sposobem znalazł trzy pierwsze cyfry ilorazu, natenczas różniłby się on od prawdziwego dopiero w setnych tysiącznych.

..	....
1552742296...	269457
2054572	576,249
168373	
6703	
1313	
239	
(5)	

Skrócony ten sposób dzielenia łatwo iest zastosować w zamianie na dziesiętne ułomków zwyczaynych wielkiemi liczbami wyrażonych.

Pod n° 134 podaliśmy sposób poznania kiedy liczba iaka iest podzielna przez liczbę iednocyfrową, oprócz przez liczbę 7. Ażeby poznać czy liczba iaka da się podzielić przez 7, iest prawidło nieco przydłuższe, to iest, trzeba pomnożyć pierwszą iéy cyfrę od prawéy ręki zacząynaiąc, czyli iedności téy liczby, przez 1; drugą cyfrę czyli dziesiątki przez 3; trzecią cyfrę przez 2, czwartą przez 6, piątą przez 4, szóstą przez 5, i t. d. Mnożąc znowu tym porządkiem na stępne cyfry, przez 1, przez 3, i t. d. gdy liczba dana iest z więcéy niż sześciu cyfer złożona; summę tych cząstkowych iloczynów, dodać do siebie, a ieżeli ta daie się podzielić przez 7, tedy i cała liczba iest podzielna przez 7.

Przyczyna tego iest następuiąca: wiemy że 10 podzielone przez 7 daie na iloraz 1 i resztę 3. Że zaś powiększywszy dzielną 2, 3, 4, 5, 6, i t. d. razy, nie wykonywaiąc działania mnożenia, iloraz 1 i reszta 3 staie się także 2, 3, 4, 5, 6, i t. d. razy większą, co iest rzeczą widoczną; więc aby iedności 2go rzędu, to iest dziesiątki, były podzielne przez 7 trzeba aby reszta 3 rozmnożona przez liczbę iedności tegoż rzędu (drugiego) była podzielna przez 7.

Wiemy daléy, że 100 podzielone przez 7 daie na iloraz 14 i resztę 2; powiększywszy zaś dzielną 2, 3, 4, 5, 6, i t. d. razy nie wykonywaiąc działania, iloraz 14 i reszta 2. staie się 2, 3, 4, 5, 6, i t. d. razy większą; więc aby iedności 3go rzędu czyli sta, podzielone były przez 7, trzeba ażeby reszta 2 rozmnożona przez liczbę iedności rzędu 3go podzielna była przez 7.

Podobnie postępuiąc obaczymy, iż co do iedności rzędu 4go, trzeba, ażeby podobnie wypadaiąca reszta 6; co do iedności rzędu 5go reszta 4; co do iedności rzędu 6go reszta 5; rozmnożone przez 7, były podzielne przez 7.

Podług tego rozumowania postępuiąc do rzędów wyższych, podobne znowu reszty, otrzymywać będziemy, któreśmy dotąd otrzymywali, to iest cyfry 1, 3, 2, 6, 4, 5. Więc ażeby liczba iaka była podzielna przez 7, trzeba ażeby iloczyny z pomnożenia iéy iedności 1go rzędu przez 1, 2go rzędu przez 3, 3go rzędu przez 2, 4go przez 6, i t. d. dodane razem, dały się podzielić przez 7.

Np. ieżeli mam liczbę 8641969; będzie $9\times1 + 6\times3 + 9\times2 + 1\times6 + 4\times4 + 6\times5 + 8\times1 = 105$, które ponieważ iest podzielne przez 7, wnoszę że i dana liczba iest podzielna przez 7. Możnaby tu z otrzymaną summą iloczynów która iest 105, postąpić znowu podług tegoż prawidła, to iest uważać czyli $5\times1 + 0\times3 + 1\times2$ iest podzielne przez 7.

Gdy iaką wielką liczbę wypada często brać za dzielnik lub za mnożną, natenczas wygodnie iest napisać sobie pod ręką szczególne iloczyny téy liczby przez pierwsze dziewięć liczb poiedynczych:

np. $1 \times 13913 = 13913$
$2 \times 13913 = 27826$
$3 \times 13913 = 41739$
$4 \times 13913 =$ i t. d. (porówn: nº 342 i 358).

Jeżeli mam ułomek do pomnożenia przez liczbę dzielącą dokładnie iego mianownik, otrzymam zaraz prosty wypadek dzieląc mianownika. Przeciwnie maiąc ułomek dzielić przez liczbę dzielącą dokładnie iego licznik otrzymam zaraz prosty wypadek dzieląc licznik (nº 126).

Maiąc więc do pomnożenia ułomek przez iaką liczbę która się daie rozłożyć na 2 czynniki, a ieden z tych zawiera się w mianowniku; podzielę go przez tenże czynnik, a licznik pomnożę iuż tylko przez drugi czynnik; np. aby rozmnożyć $\frac{27}{25}$ przez 15 napiszę $\frac{81}{5}$. Podobneż skrócenie ma mieysce w dzieleniu np. $\frac{27}{25} : 12 = \frac{9}{100}$.

ROZWIĄZANIA ZAGADNIEŃ W CIĄGU DZIEŁA PODAWANYCH.

Karta 11 nº 32.

I. 1º 3 001 007. 2º 4 000 513 009 043. 3º 5 000 024 000, łok. 0403. 4º 46,534.

II. 1) liczba 1 079 088 219 *oznacza biliion, siedmdziesiąt dziewięć miliionów, ośmdziesiąt ośm tysięcy, dwieście dziewiętnaście.*

2) liczba 49 703,00349 wyraża *czterdzieści dziewięć tysięcy siedemset trzy całkowitych, trzysta czterdzieści dziewięć stotysięcznych.*

3) liczba 90056,738 sąż oznacza *dziewięćdziesiąt tysięcy pięćdziesiąt sześć sążni, siedmset trzydzieści ośm tysięcznych sążnia.*

III. Wyrażenie liczby sto w arytmetyce dwóynéy (1) iest 1100100, w arytmetyce zaś dwunastnéy iest 84 (2).

IV. 1) Liczba 7984 wyrażona w systemacie dwunastnym, waży w dziesiętnym 13492;

2) Wyrażenie liczby 13492 w systemacie dwunastnym iest 7984.

V. Liczba 497345 która iest napisana podług systematu dwunastnego, wyraża *miliion, sto dziewięćdziesiąt cztery tysiące, pięćset trzydzieści trzy.* (3).

(1) W arytmetyce dwóynéy używa się tylko dwóch charakterów: 0, 1.

(2) Widzimy iż w systemacie dwunastnym możnaby używać naszych cyfer dla oznaczenia liczb aż do dziewięciu; lecz potrzebaby się było umówić o dwa nowe znaki poiedyncze dla wyrażenia dziesięciu i iedenastu.

(3) Lubo w szczególności do algiebry należy okazanie łatwego przeyścia z iednego systematu arytmetycznego do drugiego, kładziemy iednak krótką w téymierze uwagę. Ażeby wysłowić np. liczbę 7984 wyrażoną w systemacie dwunastnym, trzeba pomnożyć 8 przez 12; 9 przez 12 razy 12 czyli 144, a 7 przez 12 razy 12×12 czyli 1728; będzie więc:
$7 \times 1728 + 9 \times 144 + 8 \times 12 + 4 = 13492$ ważność szukana.
Możnaby także rozmnożyć 7 przez 12 i dodać następuiące 9, co czyni 93; rozmnożyć znowu 93 przez 12 i dodać 8, co czyni 1124; nakoniec rozmnożywszy 1124 przez 12 i dodawszy 4, znaleźlibyśmy także 13492. Jakoż widzimy iż 7 rozmnożone było przez

Karta 15 nº 48.

I. Ludność cała podanych czterech woiewództw iest 1 837 674.

II. Odpowiedź iest 5 826.

III. Razem wydano 11322zł.

IV. Summa szukana iest 114 752,7364.

V. Długość promienia ziemskiego podług Lalanda, iest 3 685 766,6 844 sążni polskich.

Karta 21 nº 64.

I. Różnica ludności dwóch danych Woiewództw iest 196 579.

II. Odpowiedź iest 5 411.

III. Proch wynaleziony przed sztuką drukarską na 110 lat. Od wynalezienia zaś 1szego upłynęło lat 497, a od 2go lat 387.

IV. Odpowiedź 599 262 mil ieograficznych.

V. Odpowiedź iest, 468 691 mil kwadratowych.

VI. Odpowiedź powierzchnia ziemi od powierzchni xiężyca większa iest mil kwadratowych 8 610 857 a mnieysza od powierzchni słońca mil kwadratowych 10 931 644 272.

VII. Różnica szukana iest 1) 3206,765 2) 8,252; 3) 55,172.

Karta 30 nº 81.

I. Gdy ieden czerw. zł. waży złotych 18, więc 5250 czer. zł. ważą 5250 razy więcey niż 18zł. to iest, 94 500zł.

II. Odpowiedź: 8760 godzin.

III. Szukam naprzód ile godzin w roku, rozmnożywszy 24×365 znayduię iż 8760, dodaiąc do tego iloczynu godzin 5, znayduię że w roku astronomicznym iest 8765 godz. 48', 49''. Zamieniam teraz godziny na minuty dodaiąc do iloczynu znalezionego 48'; następnie zamieniam minuty na sekundy dodaiąc 49''; i znayduię iż w roku astronomicznym iest 31 556 929 sekund, a zatém w 10 takich latach 315 569 290 sekund.

12 trzy razy następnie, 9 dwa razy, a 8 raz tylko. Sposób ten daie się łatwo odwrócić chcąc przeciwnie podaną liczbę przenieść w systemat dwunastny. I tak, podzieliwszy liczbę daną 13492 przez 12, reszta pozostaiąca 4, będzie 1szą cyfrą po prawey ręce, a iloraz 1124 będzie ważnością następnych cyfer; podzieliwszy znowu 1124 przez 12, reszta pozostaiąca 8, będzie 2gą cyfrą, a iloraz 93 ważnością innych cyfer; podzieliwszy go ieszcze przez 12 znaydziemy na 3cią cyfrę 9, a na 4tą iloraz 7 który będąc mnieyszy od 12 kończy działanie. Wyrażenie szukane iest więc 7984.

IV. Cena szukana iest: 4934,4 zł.

V. Odpowiedź: 288 000 sztuk.

VI. 1) Mnożna pomnożona przez 1000=723 287,9; pomnożyć ią więc trzeba przez 47, co uczyni 33 994 531,3, 2) 0,0048 pomnożone przez 0,026 czyni 0,000 1248.

Karta 43 nº 115.

I. Każdy korzec wychodzi na złotych 14.

II. Odpowiedź: po $5\frac{120}{191}$zł.

III. Podane funty obracam naprzód na kamienie, i postrzegam iż ile razy 55668℔ zawieraią 25℔ tyle czynią kamieni: iloraz iest 2226 z resztą 18. Zamieniam teraz 2226kam na cetnary, i widzę iż ile razy 2226kam zawieraią 4kam tyle czynią cetnarów; iloraz iest: 556 z resztą 2; a zatém 55668℔ czynią 556cet 2kam 18℔. Lecz mógłbym podane funty zaraz na cetnary obrócić, podzieliwszy ie przez 100, coby mi dało 556cet z resztą 68℔. Te funty obróciłbym na kamienie podzieliwszy przez 25, coby mi dało 2 kamienie z resztą 18℔.

IV. Odpowiedź: 36 łokci.

V. Odpowiedź: po 1722 ludzi. Pomiiam tu resztę 447 ludzi z dzielenia pozostałą.

VI. Trzebaby złota 21 251 $706\frac{16}{18}$ funtów.

VII. Ilorazy szukane są: 1) 0,0046; 2) 0,0542 3) dopisawszy dwa zera w dzielnéy (nº 111), znaydziemy iloraz 78 z resztą 490, a posuwaiąc daléy dzielenie podług nº 113, będę miał iloraz 78,6577.

VIII. Wszystkie dzielniki liczby 360 napisane każdy po razu, są: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 18, 20, 24, 30, 36, 40, 45, 60, 72, 90, 120, 180, 360; dzielniki zaś liczby 1080 są: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 18, 20, 24, 27, 30, 36, 40, 45, 54, 60, 72, 90, 108, 120, 135, 180, 216, 270, 360, 540, 1080.

Karta 43 nº 116.

I. Summa ludności Kalisza, Płocka i Lublina, 28 473, którą odiąwszy od ludności Warszawy, zostaie 99 579. nadmiar o ile ludność Warszawy iest większa od ludności wspomnionych trzech miast razem wziętéy.

II. Liczba funtów iest 57 643. 2) liczba stóp iest 509.

III. Dodawszy kwoty we 3 handle włożone i zyski na dwóch handlach zarobione, uczyni razem 42 526zł. odiąwszy zaś od téy summy stratę na trzecim handlu i wydatek osobny, co uczyni razem 580zł. zostaie 41 946zł. maiątek szukany.

IV. 64łok. sukna po 15zł. kosztowały 960zł.; 64łok. — 6 czyli 58łok. po 19zł. czynią 1102zł. kwota więc zebrana iest większą od wydaney, tę więc odiąwszy od tamtéy zostaie 142zł. zysku.

V. Gdy człowiek oddycha przez minutę 20 razy, a w godzinie iest 60 minut, przeto rozmnożywszy 20 przez 60 będzie 1200 liczba oddychań w godzinie; a że za każdém odetchnieniem bierze 40 cali sześciennych powietrza, zatém oddychaiąc 1200 razy, weźmie w siebie powietrza 48000 c. sześć: gdy zaś 136ta część powietrza w płuca wciągnionego w nas zostaie, podzieliwszy więc 48000c. sześć: przez 136, będzie iloraz 352 $\frac{128}{136}$ liczbą cali sześć: pozostałych w płucach (1).

VI. Gdy ludność prowincyi powiększyła się o ósmą część dawnieyszéy swoiéy liczby, więc teraz zawiera dziewięć ósmych części téyże liczby dawnieyszéy. Podzieliwszy zatém 654 840 przez 9, wypada na iloraz 72 760 przybyłe powiększenie ludności w ostatnich 15 latach, a odiąwszy to powiększenie od teraźnieyszéy ludności, zostaie 582 080 liczba ludności przed 15 laty.

VII. Wypada naprzód znaleźć resztę korcy na ostatku przedanych. Trzeba więc dodać liczbę korcy uprzedanych iuż we trzech razach i summę tych korcy która tu iest 681 odiąć od liczby wszystkich korcy które się w śpichrzu znaydowały; reszta 159 iest liczbą korcy na ostatku przedanych. To maiąc, obrachowywam ile zebrano za korce w 4ch razach przedane, i tym końcem mnożę ceny właściwe przez

(1) Obacz fizykę Bystrzyckiego Tom I. karta 447 w Warsz. 1810 roku.

liczbę korcy za każdym razem przedanych, a dodawszy iloczyny w iednę summę, znaydę 15 506zł. które zebrano za wszystko zboże. 2) Za przybyciem tego warunku gdy się pytaią o zarobek, obrachowawszy iuż iakieśmy widzieli ile zebrano, to iest: 15 506 zł. obrachuymy ile wydano, to iest ile kosztowało zboże które się w śpichrzu znaydowało; i dla tego rozmnóżmy cenę 16zł. przez liczbę korcy 840, iloczyn 13 440 zł. okazuie zł. wydane, odiąwszy ie więc od 15 506 zł. zebranych, reszta 2066 zł. iest zyskiem szukanym.

VIII. Pokażemy tu tylko drogę do rozwiązania, nadmieniaiąc iż rozwiązywanie wszystkich podobnych i zawikłańszych zagadnień powinni uczący się okazywać poprzedniczo w ten sposób:

kupione kor.

285 × 17zł. = p zł.
436 × 16 = p.

S. kor. kupion.
s kor: uprzed:
R reszta korcy

ś. zł. wydane.

przedane kor.

152 × 20 = p zł.
328 × 19 = p.

s. kor. uprzed:
R × 21 = p.

s' zł. zebr.

s'' zł. zebra:
ś zł. wydan:
R' zł. czyli zysk,

od czego ieszcze, gdyby były iakie koszta przewozu, i t. d. odjęlibyśmy.

Zastanowiwszy się nad zagadnieniem i objąwszy wszystkie iego warunki czyli iak zowią *stan zadania*, uważam iż tu naprzód dla uproszczenia zagadnienia wypada znaleźć resztę korcy na ostatku przedanych. Dodaię więc korce kupione w summę którą oznaczam przez S, dodaię i korce uprzedane w summę s, i tę summę odeymuię od tamtéy, reszta którą oznaczam przez R okazuie mi liczbę korcy które przedano na ostatku. To maiąc, obrachowywam ile wydano za pierwsze i drugie korce kupione, mnożąc ceny właściwe przez liczbę korcy i zbieraiąc iloczyny oznaczone przez p, p, w iednę summę ś, która mi okazuie liczbę zł: wydanych za zboże. Obrachowywam teraz podobnie ile zebrano za korce przedane, a odiąwszy ś summę pieniędzy wydanych, od s'' summy pieniędzy zebranych, znayduie zysk.

IX. Podzieliwszy 5248cet przez 8cet ilorаz 656 pokaże liczbę wozów; ta rozmnożona przez 2 pokaże 1312 liczbę koni potrzebnych. Że zaś od każdego konia płacą po zł. 3, więc 3zł. wzięte razy 1312 pokażą 3936zł. które od wszystkich koni zapłacić trzeba. 2) Za przybyciem tego warunku obrachowawszy, iakieśmy dopiero widzieli, liczbę wozów 656, odeymuię od niéy liczbę wozów zaprzężnych 50. Reszta 606 okazuie mi liczbę wozów do naięcia. Obrachowywam teraz potrzebną do nich liczbę koni która będzie 1212, lecz od téy odeymuię 38 liczbę koni które ma ieszcze przewożący. Reszta 1174 okazuie liczbę koni do naięcia. Pozostaie więc tylko obrachować koszt wozów i koni naiąć się maiących mnożąc ceny właściwe przez liczby szczególne tychże wozów i koni; a iloczyny wypadłe dodać w iednę summę która będzie 4734zł.

X. Postępuiąc podług wskazanych reguł znaydziemy 1) iż zamierzone umundurowanie kosztowałoby 36900zł.

2) za przybyciem tych warunków trzeba od znalezionéy liczby mundurów odiąć 250, a od obrachowanego na resztę mundurów sukna odiąć 360łok znayduiących się w magazynie. Obrachowawszy iuż koszt na potrzebne ieszcze sukno, i na robotę sprawić się maiących mundurów, dodać iloczyny szczególne w iednę summę która będzie 23410zł.

Karta 53, nº 139.

I. Sprowadziwszy dane ułomki do iednakowego mianownika będzie $\frac{5}{7}$ i $\frac{3}{4}=\frac{20}{28}$ i $\frac{21}{28}$ z których drugi widocznie iest większy; 2) ułomki $\frac{4}{7}$ i $\frac{13}{21}$ zamieniaią się na $\frac{20}{25}$ i $\frac{13}{25}$ z których pierwszy iest widocznie większy; 3) ułomki $\frac{3}{8}$ i $\frac{5}{12}=\frac{9}{24}$ i $\frac{10}{24}$ z których drugi iest większy.

II. Ułomki do spólnego mianownika sprowadzone są 1) $\frac{7}{84}$, $\frac{60}{84}$, $\frac{21}{84}$; 2) $\frac{20}{24}$, $\frac{18}{24}$, $\frac{8}{24}$, $\frac{51}{24}$, $\frac{22}{24}$.

III. Postępuiąc sposobem podobnym iak w sprowadzeniu ułomków do iednakowego mianownika, to iest rozmnożywszy oba wyrazy każdego ułomku przez iloczyn innych liczników, będę miał w podanem zagadnieniu $\frac{21}{81}$, $\frac{21}{27}$, $\frac{21}{84}$.

IV. Szukane wyrażenia nayprostsze ułomków są: 1) $\frac{7}{22}$; 2) $\frac{3}{8}$; ułomek $\frac{20}{317}$ nie da się iuż skrócić w wyrażeniu.

V. Ułomek $\frac{6}{7}\#$ oznacza siódmą część sześciu czerw: zł. (nº 119). Zamieniwszy na talary $6\#$ mnożąc ie przez 3, mam $\frac{18}{7}$tal. czyli $2\frac{4}{7}$tal. Zamieniwszy na złote 4tal. mnożąc ie przez 6, mam $\frac{24}{7}$ czyli $3\frac{3}{7}$zł. Zamieniam licznika 3 na grosze i mam $\frac{20}{7}$ czyli $12\frac{6}{7}$gr; więc $\frac{6}{7}\#=2$tal. 3zł. $12\frac{6}{7}$gr.

Karta 55, nº 144.

I. Summy szukane są 1) $3\frac{11}{20}$; 2) $3\frac{1}{2}$.

II. Wartość szukana iest $1133\frac{223}{256}$zł.

III. Grubszéy liny iest $132\frac{4}{101}$sąż., a cieńszéy $44\frac{31}{60}$sąż., razem zaś $176\frac{131}{140}$sąż.

IV. Odpowiedź $195\frac{233}{504}$.

V. Odpowiedź zarobił na wszystkiém $100\frac{1}{7}$zł. a zebrał w ogóle $465\frac{233}{960}$zł.

Karta 56 nº 149.

I. Różnice szukane są: 1) $\frac{1}{72}$; 2) $1\frac{16}{49}$.

II. Uprościwszy ułomki dane, iak tu iednego wyrazy skróciwszy dzieląc przez 4, drugiego przez 9, będzie $\frac{12}{28}=\frac{3}{7}$, a $\frac{441}{1323}=\frac{49}{147}$ co daie się ieszcze skrócić przez 7, bo $\frac{49}{147}=\frac{17}{21}$; trzeba więc wziąć różnicę między $\frac{3}{7}$ i $\frac{7}{21}$, czyli między $\frac{9}{21}$ i $\frac{7}{21}$, ta zaś iest $\frac{2}{21}$.

III. Szukana reszta wynosi $6\frac{20}{80}$ łokci.

IV. Różnica pierwsza iest $\frac{3}{44}$, druga $\frac{25}{84}$; różnica tych różnic iest $\frac{53}{231}$.

V. Odległość Brześcia Litewskiego od Słonima iest $25\frac{23}{56}$, Słonima od Mińska $28\frac{10}{63}$ a Mińska od Petersburga $132\frac{1}{8}$ mili.

Karta 60 nº 156.

I. Łaszt zboża kosztuie 24 i $\frac{9}{12}$ czyli $24\frac{3}{4}$.

II. $\frac{5}{7}$ ℔ kosztuie $52\frac{1}{7}$zł.

III. Siódma część z 77 iest 11, a sześć takich części iest 66.

IV. Szukany iloczyn iest 1) $\frac{23709}{8}$; 2) $\frac{89}{70}\times\frac{85}{9}$ $=\frac{23+1}{2\times3}=\frac{23}{6}=3\frac{5}{6}$.

V. Ponieważ mnożąc dzielnik przez iloraz znayduiemy na iloczyn liczbę dzielną (n° 84), więc mnożąc 17 przez $17\frac{2}{3}$ znaydziemy $300\frac{1}{3}$ dzielną szukaną.

VI. Szukany koszt wynosi $808\frac{1}{4}$zł.

VII. Antał wina kosztuie $46\frac{4}{5}$#.

VIII. Szukany iloczyn ułomków $\frac{5}{6} \times \frac{4}{5} \times \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{6}$ czyli $\frac{1}{3}$ (n° 155. 3e).

Karta 65 n° 168.

I. Każdy zapisał $\frac{2}{20}$ czyli $\frac{1}{10}$ ryzy papieru.

II. Łokieć sukna kosztował po $16\frac{12}{19}$zł.

III. Rzemieślnik ten zrobi w godzinie, $\frac{16}{16}$łok. swoiéy roboty.

IV. Podzieliwszy $3\frac{2}{3}$ przez $8\frac{1}{4}$, znaydziemy $\frac{4}{9}$ które w $3\frac{2}{3}$ zawiera się razy $8\frac{1}{4}$ (n° 96).

V. Sążeń muru kosztuie $35\frac{74}{187}$zł.

VI. Iloraz szukany iest, 1) $1\frac{582}{623}$, 2) $\frac{45}{49} : \frac{15}{9} = \frac{45 \times 9}{49 \times 15} = \frac{3 \times 9}{49} = \frac{27}{49}$.

VII. Wypadek szukany iest w obu razach ten sam $\frac{27}{64}$.

VIII. Zgubiwszy czynniki obu wyrazom ułomku spólne 4, 5, 6, 9, podzielę 8 i 14 czynniki licznika przez 2, oraz 2 i 10 czynniki mianownika. Wypadły ztąd czynnik 7 w liczniku i takiż w mianowniku zgubię. Podzielę ieszcze przez 3 czynnik licznika 3, i 15 czynnik mianownika, a oba wyrazy ułomku sprowadzonego do nayprostszego wyrażenia mieć będą czynniki $\frac{4 \times 3}{5 \times 3 \times 11} = \frac{12}{275}$.

IX. $\frac{2}{3}$ z $\frac{5}{6}$ iest $\frac{10}{18}$ czyli $\frac{5}{9}$; $\frac{5}{8}$ z 7 iest $\frac{35}{9}$; podzieliwszy $50\frac{1}{2}$ przez $\frac{35}{9}$ znaydziemy liczbę szukaną $12\frac{60}{70}$.

Karta 65 n° 169.

I. W 27 znayduie się $\frac{7}{6}$ liczby szukanéy, podzieliwszy ie więc przez $\frac{7}{6}$ (n° 160) wypada $23\frac{1}{7}$. Jakoż szósta część téy liczby to iest $3\frac{6}{7}$ dodana do $23\frac{1}{7}$ czyni 27.

II. $\frac{3}{4}$ liczby szukanéy czynią 24, a zatém podzieliwszy 24 przez $\frac{3}{4}$ znayduiemy 32.

III. Ułomki $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, i $\frac{1}{4}$ dodane razem czynią $\frac{13}{12}$, a zatém w 26 znayduie się $\frac{13}{12}$ liczby szukanéy, podzieliwszy ie więc przez $\frac{13}{12}$ wypada 24 na iloraz. Jakoż liczba ta odpowiada warunkom danym.

IV. Ułomki dane czynią razem $\frac{3}{4}$; $\frac{3}{4}$ odjąwszy od całkowitości zostaie $\frac{1}{4}$; więc $\frac{1}{4}$ liczby szukanéy $= 64$, a zatém cała liczba iest 4 razy większą to iest 256, co łatwo sprawdzić.

V. Ułomki dane czynią razem $\frac{17}{24}$, pozostaie więc do całkowitości $\frac{7}{24}$ które są $= 7\frac{1}{2}$st; podzieliwszy więc $7\frac{1}{2}$st przez $\frac{7}{24}$ wypadnie na iloraz $25\frac{5}{7}$st. które są długością całego drzewa, co łatwo sprawdzić możemy.

VI. Ułomki dodane czynią $2\frac{1}{4}$; zatém 84zł. ważą $2\frac{1}{4}$ razy niewiadome pieniądze; podzieliwszy więc 84 przez $2\frac{1}{4}$ wypada iloraz $37\frac{3}{9}$ który iest liczbą zł. szukaną.

VII. Podzieliwszy 12 przez $1\frac{1}{2}$ czyli $\frac{3}{2}$ iloraz 8 iest liczbą mniéyszą, tę rozmnożywszy przez $2\frac{1}{2}$ wypada na iloczyn 20 które iest liczbą większą.

VIII. Gdy pierwsza fontanna napełnia wodościek w 6 godzinach, napełni go $\frac{1}{6}$ część w 1 godzinie; a ponieważ druga fontanna napełnia wodościek we dwóch godzinach, napełni go $\frac{1}{2}$ w 1 godzinie. Więc razem 3 fontanny napełnią w 1 godzinie $\frac{1}{6} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ czyli $\frac{1}{6} + \frac{3}{6} + \frac{2}{6}$ czyli cały wodościek. Gdyby zaś pierwsza fontanna napełniała wodościek w 6 godzinach, druga w 2 dniach, a trzecia w trzech dniach; więc pierwsza napełniłaby w 1 godzinie $\frac{1}{6}$, druga $\frac{1}{48}$, a trzecia $\frac{1}{72}$ wodościeku. Więc, razem trzy fontanny napełniaią w godzinie $\frac{1}{6} + \frac{1}{48} + \frac{1}{72} = \frac{24}{144} + \frac{3}{144} + \frac{2}{144} = \frac{29}{144}$ wodościeku. Ile razy więc $\frac{29}{144}$ wodościeku zawiera się w całym wodościeku, tyle godzin potrzeba do iego napełnienia. Podzieliwszy zaś 1 przez $\frac{29}{144}$, iloraz iest $\frac{144}{29} = 4\frac{28}{29}$. Zatém liczba godzin szukanych iest $4\frac{28}{29}$ czyli 4 godzin $54'\ 28\frac{28}{29}''$.

IX. Szukam iaka część sadzawki wypływa każdym z osobna kanałem w czasie oznaczonym np. w dniu iednym. Wziąwszy więc objętość sadzawki za 1, podzielę ią przez $3\frac{1}{2}$ czyli $\frac{7}{2}$ dla znalezienia pierwszéy części szukanéy która będzie $\frac{2}{7}$; druga będzie $\frac{5}{14}$, a trzecia $\frac{3}{14}$. Dodawszy razem $\frac{4}{14} + \frac{5}{14} + \frac{3}{14}$, iest $\frac{12}{14}$, czyli $\frac{6}{7}$ części sadzawki które trzema kanałami w iednym dniu wypływaią. Podzieliwszy zatém iedność czyli objętość sadzawki przez $\frac{6}{7}$ wypadnie $1\frac{1}{6}$ liczba dni szukana.

X. Podług warunków zagadnienia pierwsza pompa wypróżni w godzinie $\frac{1}{36}=\frac{2}{72}$ oznaczoney ilości wody; druga zaś $\frac{1}{24}=\frac{3}{72}$ téyże ilości; lecz w tymże czasie wpływa $\frac{1}{18}=\frac{4}{72}$ więc ilość wody wypompowaney w godzinie iest $\frac{2}{72}+\frac{3}{72}-\frac{4}{72}=\frac{1}{72}$. Aże woda znayduiąca się iuż w spodniey części okrętu wyrażona iest przez $\frac{3}{8}$; więc czas potrzebny do iey wypróżnienia iest $\frac{3}{8}:\frac{1}{72}=\frac{216}{8}=27$ godzin. A zatém osada okrętu powinna dopilnować pompowania przez 27 godzin. Jakoż gdy w iedney godzinie wyciąga się wody $\frac{1}{72}$, w 27 godzin wyciągnie się $\frac{27}{72}=\frac{3}{8}$.

XI. Podzieliwszy 5248cet. przez 16, iloraz 328 okaże liczbę wozów, ta rozmnożona przez 2 okaże 656 liczbę ludzi potrzebnych. Że zaś przewożący ma swoich wozów zaprzężnych 80, odjąwszy więc 80 od 328, reszta 248 iest liczbą wozów do naięcia. Liczba ta rozmnożona przez 4 okazuie 992 liczbę koni potrzebną, lecz że przewożący ma ieszcze koni 100, odjąwszy więc 100 od 992 zostaie 892 liczba koni do naięcia. Odjąwszy także od 656 liczbę ludzi 200 których iuż ma przewożący, reszta 456 iest liczbą ludzi do naięcia z których połowa, to iest 228 potrzebna iest do wozów, a druga połowa także 228, do koni. Obrachowawszy iuż koszt na wozy, konie i ludzi naiąć się maiących do wozów i do koni, iloczyny wypadłe 620, 9366, 342 i $407\frac{2}{5}$zł. dodać w summę która będzie 10 $735\frac{2}{5}$zł. Że zaś na przewiezienie wyznaczone iest 1560tal. czyli 9360zł, nie dostaie więc ieszcze $1375\frac{2}{5}$zł.

XII. Rozmnożywszy 180 liczbę ludzi w każdéy kompanii przez 5 liczbę kompaniy, wypada 900 liczba ludzi do umundurowania. A że każdy 20ty człowiek iest sierżantem, więc podzieliwszy 900 przez 20, iloraz 45 oznaczy liczbę sierżantów, a tém samém i liczbę ich mundurów. Liczbę tę odjąwszy od 900, reszta 855 okaże liczbę żołnierzy prostych, a zatém i liczbę potrzebnych im mundurów. Odjąwszy 25 od 45 a 250 od 855; reszty 20 i 605 okazuią liczby mundurów do sprawienia dla sierżantów i dla żołnierzy prostych. Obrachowawszy do tych mundurów potrzebne sukno, płótno, galonki, guziki, nie zapominaiąc odeymować tego co iuż iest w zapasie, pozostanie tylko obrachować koszt na te artykuły i na robotę krawca; iloczyny wypadłe, to iest $1429\frac{2}{5}$zł. za sukno, $2076\frac{21}{40}$zł. za

płótno, 2662zł. za robotę mundurów dla żołnierzy prostych; $596\frac{5}{8}$zł. za sukno, 56zł. za płótno, $96\frac{2}{3}$zł. za robotę mundurów i 95zł. za galonki dla sierżantów, a $1041\frac{2}{3}$zł. za guziki dla wszystkich, dodawszy w iednę summę znaydziemy cały koszt $=20920\frac{3}{20}$zł. Że zaś na umundurowanie to wyznaczone iest 24000zł. więc zostaie ieszcze $3079\frac{17}{20}$zł.

Ostatnie zagadnienia iakożkolwiek zdaią się być zawikłane, nie będą iednak bynaymniéy trudne, skoro uczący się napisawszy porządnie zagadnienie zrozumieią takowe, i wprzódy wynaydą drogę rozwiązania sposobem podobnym skazanemu w rozwiązaniu zagadnienia VIII. należącego do nº 116.

Karta 70 nº 175.

I. 1) Ułomek $\frac{531}{1278}$ daie się rozwinąć na ułomek ciągły

$$\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{2}}}}}$$

a biorąc wyraz iego pierwszy, następnie dwa pierwsze, trzy, cztery, i pięć, będziemy mieli ważności coraz bliższe $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{5}{12}$, $\frac{27}{65}$, i $\frac{59}{142}$. Ułomek ostatni zupełnie iest równy podanemu, ten bowiem nie był dany w wyrażeniu nayprostszém.

2) Ułomek $\frac{1103}{887}$ iest niewłaściwy, wyciągnąwszy całkowitość iest 1 i $\frac{216}{887}$. Ten ułomek zamieniamy na

$$\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{9+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4}}}}}}$$

a biorąc iego wyraz pierwszy, następnie dwa pierwsze, trzy, cztery, pięć i sześć, będziemy mieli ważności: $\frac{1}{4}$, $\frac{9}{37}$; $\frac{19}{78}$, $\frac{28}{115}$, $\frac{47}{193}$ i $\frac{216}{887}$; ieżeli chcemy dodać całkowitość do każ-

dego w szczególności z ułomków będzie: $\frac{5}{4}$, $\frac{46}{37}$, $\frac{97}{78}$, $\frac{143}{115}$, $\frac{240}{193}$ i $\frac{1103}{887}$.

II. Ułomek oznaczaiący obszerność Europy względem obszerności Azyi iest naprzód $\frac{1711307}{6400880}$: rozwinąwszy go podług poprzedzaiących zasad na ułomek ciągły, otrzymamy cztery pierwsze iego ważności na przemian większe i mnieysze: $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{11}$, $\frac{4}{15}$, i t. d.

III. Znaydziemy podobnąż drogą iak w poprzedzaiącym przykładzie cztery pierwsze ważności $\frac{1}{12}$; $\frac{1}{131}$ $\frac{3}{36}$, $\frac{4}{51}$, i t. d.

IV. Ułomek szukany iest 1) $\frac{120}{163}$ 2) $\frac{97}{80}$ 3) $\frac{70}{48}$.

Karta 77 nº 188.

I. $\frac{8}{15} = 0{,}53333\ldots$; $\frac{13}{21} = 0{,}619047\,619\ldots$

II. Ułomek $\frac{15625}{100000}$ daie się widocznie skrócić, a naprzód przez 25, będzie $\frac{625}{4000}$, daléy $\frac{25}{160}$, nakoniec $\frac{5}{32}$.

III. 0,565656... odpowiada ułomkowi $\frac{56}{99}$, o czém łatwo się przekonamy zamieniaiąc ten ułomek na dziesiętne.

IV. 0,19444... podług nº 185 daie $\frac{1}{9}$ od 19 $\frac{4}{9}$, potém $\frac{175}{900}$, potém $\frac{175}{900} = \frac{7}{36}$; tudzież 0,6111... daie $\frac{1}{9}$ od $6\frac{1}{9}$, potém $\frac{55}{90}$, potém $\frac{55}{90} = \frac{11}{18}$.

V. $\frac{307692}{999999} = \frac{1}{3+\frac{1}{4}} = \frac{1}{\frac{13}{4}} = \frac{4}{13}$.

VI. $\frac{789473}{999999} = \frac{1}{1+\frac{1}{3+\frac{1}{1+\frac{1}{3}}}} = \frac{1}{1+\frac{1}{3+\frac{3}{4}}} = \frac{1}{1+\frac{4}{15}} = \frac{15}{19}$.

Karta 81 nº 193.

I. Summa długości iest 311sąż. 2st. 10c. $1\frac{2}{3}$l.
II. Odpowiedź: 280grz. 0unc. 1dr. 57gr.
III. Summa szukana iest 8d. 17god. 4′ 1″.
IV. Razem iest: 15℔ 0tal. 4zł. 6gr.
V. Dnia 9 marca 1773 r.

Karta 83 nº 196.

I. Niedostaie mu 1℔ 6zł. 7gr.
II. Ma ieszcze zrobić 167sąż. 1st. 8c. 2l.

III. Reszta iest, 19℔ 12unc. 5dr. 32gr.
IV. Różnica szukana iest, 3d. 16god 51′ 25″.
V. Różnica szukana, 70lat. 3mce 21d. 23g. 12′ pokazuie długość życia naysławnieyszego astronoma Polaka. Napisaliśmy dni 21 nie 20, bo may iako piąty miesiąc w porządku roku ma dni 31, więc i t. d.

Karta 88 nº 202.

I. Podług zadania mnożnikiem iest 0sąż. 5st. 9cal 10l.; trzeba więc mnożną wziąć tyle razy ile 1 sążeń zawarty iest w 0sąż. 5st. 9c. 10l. Uskuteczniaiąc działanie znaydziemy 19gr. $7\frac{55}{74}$den.

II. Iloczyn szukany iest 740sąż. 0st. $7\frac{7}{15}$c.

III. Odpowiedź: 104tal. 4zł. 24gr.

IV. 2gr. i 6de. wzięte 50000 razy czynią $11666\frac{2}{3}$gr. które zamienione na złote czynią $3888\frac{8}{9}$zł. potrącenia. Te odiąwszy od 50000zł. zostaie $46111\frac{1}{9}$zł. do wypłacenia. Możnaby znaleźć rozwiązanie i w ten sposób: 2 i $\frac{1}{3}$ gr. są $\frac{7}{90}$ złotego, wziąwszy więc $\frac{7}{90}$ z 50000 zł. będzie $3888\frac{8}{9}$zł. i t. d.

zł. gr. den.
V. Odpowiedź 15179. + 23 + $13\frac{1}{2}$.

Karta 91 nº 210.

I. Cena łokcia zawiera się tyle razy w 237℔ 13zł. $8\frac{1}{2}$gr. ile razy 1łok. w $57\frac{5}{8}$łok. trzeba więc podzielić 237℔ 13zł. $8\frac{1}{2}$gr. przez $\frac{461}{8}$ łok. czyli 1901℔ 16zł. 8gr. przez 461. iloraz 4℔ 2zł. $7\frac{38}{461}$gr. iest ceną łokcia.

II. Tyle trzeba czerw. zł. ile razy 18zł. 24gr. zawierają się w 2500tal. 4zł. 18gr. Zamieniwszy dzielną i dzielnik na iednakowy gatunek (nº 205) iak tu na ułomek złotych, będzie dzielna $\frac{75023}{5}$zł. dzielnik zaś $\frac{94}{5}$zł. Iloraz wypada 798 i $\frac{11}{94}$. Gdy ułomek ten iest ułomkiem czerwonego zł. który ma $\frac{94}{5}$zł. zamieniwszy go więc na złote będzie $\frac{11}{5} = 2\frac{1}{5}$zł. Trzeba więc na podaną kwotę 798 czerw. zł. i $2\frac{1}{5}$zł.

III. Potrzeba tyle dni ile razy 28sąż. 4st. i 3c. zawieraią się w 8950sąż. 3st. 6c. trzeba więc tę długość podzielić przez tamtę. Postrzegam iż 3c. czyli ćwierć stopy iest spólną miarą dzielnego i dzielnika, dosyć więc sprowadzić iednego i drugiego do téy miary, aby mieć dwie liczby nie wielorakie do dzielenia iedną przez drugą. Pierwsza będzie

214814, a druga 689; iloraz wypadnie $311\frac{535}{689}$ dni, t. i. 311 i $\frac{3}{4}$d. prawie.

IV. Cena grzywny zawiera się tyle razy w 115tal. 3zł. $4\frac{5}{16}$gr. ile 1grz. w 7grz. 5unc. 6dr. t. i. zamieniaiąc na ułomek, $\frac{494}{64} = \frac{247}{32}$ razy. Pozostaie więc podzielić 115tal. 3zł. $4\frac{5}{16}$gr. przez $\frac{247}{32}$ czyli 3696tal. 4zł. 18gr. przez 247. Iloraz 14tal. 5zł. 24gr. iest ceną grzywny.

V. Podzieliwszy wydaną kwotę całą przez cenę grzywny, znaydziemy iż kupiono 7grz. 5unc. 6dr.

Karta 100 nº 232.

I. Żądane kwadraty są: 1) 44012609 64; 2) 762548,0976; 3) $\frac{403225}{418225}$.

II. Pierwiastki szukane są: 1) 125; 2) 999; 3) 9009.

III. Pierwiastki przybliżone są: 1) 1,41421356; 2) 1,7320508; 3) 1359,3969; 4) 0,8451; 5) 8,1187.

IV. Kwadrat liczby daney iest 16; aże go przewyższać ma kwadrat szukaney o 48: więc ten iest 64; iego zaś pierwiastkiem iest liczba 8.

V. Przez połowę kwadratu liczby daney t. i. przez 18 podzieliwszy 25992, wypadnie na iloraz 1444 kwadrat liczby szukaney; pierwiastkiem zaś iego iest 38.

VI. Potęga szesnasta liczby 6, iest 2821109907456 (nº 217).

Karta 108 nº 247.

I. Żądane sześciany są: 1) 141257958912; 2) 51645,087424 3) $\frac{502704}{2048383}$.

II. Pierwiastki szukane są: 1) 396; 2) 590; 3) 4609.

III. Pierwiastki przybliżone są: 1) 1,4422496; 2) 1,5874009; 3) 3,6438; 4) 0,9564; 5) 3,1018.

IV. Sześcian daney iest 512, a że go przewyższać ma sześcian szukaney o 1216, ten więc iest 1728, iego zaś pierwiastkiem iest 12.

V. Rozmnożywszy sześcian daney t. i. 729 przez 4, będzie 2916 potowa sześcianu liczby szukaney, rozmnożywszy więc przez 2, będzie 4832 sześcian liczby szukaney. Tę zaś znaydziemy wyciągaiąc $\sqrt[3]{\ }$ który iest 18.

VI. Szukany $\sqrt[16]{\ }$ iest 5.

Karta 119 nº 282.

I. Wyraz czwarty w pierwszéy proporcyi różnicowéy iest $= 8+15-10=23-10=13$; w drugiéy zaś $x=3+8-6=11-6=5$.

II. Wyraz trzeci ciągłoproporcyionalny w pierwszéy proporcyi iest $= 36+36-24=48$; w drugiéy zaś, $14+14-22=6$.

III. Średni szukany $= \frac{12+6}{2} = 9$, w drugiéy proporcyi $x = \frac{5+17}{2} = 11$.

IV. Wyraz 100ny. szukany $= 1+(3\times 99)=298$; w drugim zaś postępie wyraz 25ty $= 82-(3\times 24)=10$.

V. Pierwszy stosunek szukany $= 32\frac{7}{4} = \frac{28}{7} = 4$, zatém postęp będzie $\div 4 \cdot 8 \cdot 12 \cdot 16 \cdot 20 \cdot 24 \cdot 28 \cdot 32$; drugi stosunek szukany iest $\frac{9}{9}\frac{45}{36} = -\frac{36}{9} = -4$, postęp więc będzie $\div 45 \cdot 41 \cdot 37 \cdot 33 \cdot 29 \cdot 25 \cdot 21 \cdot 17 \cdot 13 \cdot 9$.

VI. Summa uderzeń młotka zegarowego = summie wyrazów postępu $\div 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots 12$; summa zaś ta $= 1+12 \times \frac{12}{2} = 13\times 6 = 78$. Summa uderzeń młotka w drugim razie $= 1+24\times\frac{24}{2} = 25\times 12 = 300$.

VII. Numer 1 może z następuiącemi, 89 amb czyli połączeń dwóch liczb formować, numer 2 połączeń 88, numer 3 połączeń 87 . . . i t. d. numer 89 iedno tylko połączenie a numer 90 żadnego. Ztąd wynika postęp którego pierwszym wyrazem iest 89, ostatnim zaś 1. Summa tego postępu $= 89+1\times\frac{89}{2} = 90\times 44\frac{1}{2} = 4005$.

VII. Młodzieniec nie mógł wygrać zakładu, bo miał $7\frac{20}{40}$ t. i. prawie $7\frac{3}{4}$ mil do przebieżenia w 2ch godzinach. W saméy rzeczy, przebiegłby 6sąż. dla złożenia pierwszego iabłka u spodu pierwszego drzewa, i 6sąż. aby przyyść wziąć drugie iabłko, co czyni 12 sążni. Aby zanieść drugie iabłko do drugiego drzewa przebiegłby 9sąż. i 9 napowrot aby wziąć trzecie iabłko, co czyni 18sąż. Podobnie rozumuiąc co do trzeciego iabłka; czwartego, i t. d. widzimy iż zadanie ściąga się do znalezienia summy wszystkich wyrazów postępu różnicowego którego pierwszy wyraz iest 12, stosunek 6, a liczba wyrazów 100. Summa zaś ta $= 12+606\times\frac{100}{2} = 618\times 50 = 30900$ sąż. $= 7\frac{20}{48}$ mil, rachuiąc po 4000sąż. na milę, nowych zaś mil polskich uczyniłaby $6\frac{20}{35}$.

IX. Trzeba tu 1od znaleźć summę wyrazów postępu 1 . 3 . 5 . . . aż do wyrazu 60go włącznie. Wyraz ten = 1 + (2×59) = 119. Summa więc wyrazów tego postępu = 1 + 119×30 = 3600; ciało więc spadaiące w 1 minucie przebiega 3600×15 = 54000 stóp.

X. Odpowiedź, 540 stóp.

XI. 1) Idzie tu o znalezienie liczby wyrazów podług nº 278; liczba zaś ta = $\frac{41-3}{2}+1=\frac{38}{2}+1=19+1=20$.

2) Mylonoby się sądząc iż się należy grabarzowi $\frac{2}{5}$ umówionéy nagrody, że i 8 sąż. są $\frac{2}{5}$ głębokości umówionéy: łatwo iest bowiem widzieć iż praca zwiększa się w miarę głębokości kopania. Przypuszczamy zresztą, bo ciężko byłoby oznaczyć dokładnie, iż praca zwiększa się w postępie różnicowym głębokości, a zatém i cena podobnie wzrastać powinna. Idzie więc o rozdzielenie kwoty 400zł. na 20 wyrazów któreby były w postępie różnicowym: summa 8iu pierwszych okaże, ile się należy grabarzowi za iego robotę. Lecz 400zł. mogą być rozdzielone wielorakim sposobem na 20 wyrazów różnicowo proporcyonalnych, podług oznaczenia pierwszego wyrazu (1): przypuściwszy np. iż na pierwszy wyraz iest 1zł. otrzymalibyśmy postęp ÷ 1 · 3 · 5 · 7 i t. d. którego ostatni wyraz byłby 39; co dałoby na ośm pierwszych wyrazów summę 64zł. przypuściwszy zaś iż pierwszym wyrazem iest $10\frac{1}{2}$, ciąg wyrazów byłby ÷ $10\frac{1}{2}$ · $11\frac{1}{2}$ · $12\frac{1}{2}$ . . . i t. d. coby dało na ośm pierwszych wyrazów summę 116zł. Ażeby więc naznaczyć sprawiedliwie co się należy grabarzowi, trzeba zacząć od oznaczenia sprawiedliwéy ceny 1szego sążnia roboty i wziąć tę cenę za 1szy wyraz postępu. Przypuszczam iż cena ta iest zł. 5; natenczas postęp szukany będzie ÷ 5 · $6\frac{11}{19}$ · $8\frac{1}{19}$ · $9\frac{14}{19}$ · i t. d. którego różnica stała iest $\frac{30}{19}$, a ostatni wyraz 35. Osmy wyraz tego postępu = $5+\frac{30}{19}\times 7 = 16\frac{1}{19}$; summa zaś pierwszych 8iu wyrazów = $(5+16\frac{1}{19})$

(1) Znaiąc bowiem liczbę wyrazów, ich summę, ieżeli przypuścimy wyraz pierwszy, znaydziemy podług no. 280 wyraz ostatni a ten maiąc łatwo iuż znaleźć stosunek postępu. Możnaby także przypuścić podług upodobania stosunek a natenczas znaleźlibyśmy wyraz pierwszy (no 281).

$\times 4 = 21\frac{1}{19}\times 4 = 84\frac{4}{19}$ będzie summą złotych przypadaiącą grabarzowi za część dokonaney przez niego roboty.

Podobnież należałoby postąpić gdyby np. wieża rozebrana być miała tak, ażeby kamień lub cegła ile można w całości była zdeymowana i na dół znoszona. Rozebranie bowiem wyższych części wieży kosztowałoby więcéy pracy niż rozebranie niższych. Jeżeli więc zrobioną umowę na rozebranie całéy wieży; za rozebraniem np. 3iéy części nie byłoby dosyć zapłacić tylko 3ią część umówionéy summy, lecz zdaie się sprawiedliwiéy aby za każdą np. stopę zaczynaiąc wysokość od dołu zachować coraz więcéy w stosunku rożnicowym. Ob. *Abr. Kästners Rechenkunst* 2er *Band Göttingen* 1801 kar. 48.

XII. 1) Idzie tu o znalezienie ostatniego wyrazu (nº 271), a następnie summy wyrazów (nº 275); ostatni wyraz = 100 + (10×11) = 100 + 110 = 210. Summa zaś wyrazów = $\frac{100+210}{2}\times 12 = 1860$tal.

2) Wyraz pierwszy znaydziemy podług nº 279: który = 210 — (10×11) = 100; summa zaś iak wyżéy.

3) Przewyżka czyli stosunek szukany podług nº 277 iest, $\frac{210-100}{11} = 10$; summa zaś iak wyżéy.

4) Szukana liczba wyrazów podług nº 278 iest = $\frac{210-100}{10}+1 = 12$, summa zaś iak wyżéy

5) Liczba wyrazów podług nº 276 = $\frac{1860}{155} = 12$; stosunek zaś podług nº 277 iest = $\frac{210-100}{11} = 10$.

6) Wyraz ostatni podług nº 280 iest = $\frac{1860}{6} - 100 = 210$; stosunek zaś iak wyżéy.

7) Wyraz 1szy podług nº 280 iest = $\frac{1860}{6} - 210 = 100$; stosunek zaś iak wyżéy.

8) Trzeba naprzód znaleźć wyraz pierwszy podług nº 281, t. i. podzieliwszy 1860 przez 6, iloraz 310 będzie summą skraynych; 310 — (10×11) = 200 podwóynemu pierwszemu, zatém pierwszy wyraz iest 100. Wyraz ostatni iako też i summę łatwo iuż znaleźć możemy.

Karta 130 nº 302.

I. Wyraz czwarty w proporcyi 4 : 12 = 6 : x, czyli 1 : 3 = 6 : x, = $\frac{3\times 6}{1} = 18$; w drugiéy zaś 1 : 3 = x : 24, x = $\frac{24+1}{3} = 8$.

II. Wyraz trzeci ciągłoproporcyionalny w pierwszéy proporcyi iest $= \frac{10 \times 10}{4} = 25$; w drugiéy zaś, $\frac{12 \times 12}{48} = 3$.

III. Wyraz średni szukany iest $= \sqrt{64} = 8$, w 2éy zaś proporcyi $= \sqrt{144} = 12$.

IV. Wyraz 33ci szukany $= 3 \times 2^{32} = 3 \times 4294967296 = 12\,884\,901\,888$; wyraz 8my w postępie 2gim $= 15309 \times (\frac{1}{3})^7 = 15309 \times \frac{1}{2187} = \frac{15309}{2187} = 7$.

V. Idzie o znalezienie ostatniego t. i. 108go wyrazu. Wyraz ten $= 3 \times 2^9 = 3 \times 512 = 1536$.

VI. 1) Podzieliwszy 2916 przez 4 wypada iloraz 729, z tego wyciągniony $\sqrt[6]{\ } = 3$; postęp więc iest
$\div$ 4 : 12 : 36 : 108 : 324 : 972 : 2916. 2) Podzieliwszy 3 przez 768 iloraz iest $\frac{3}{768}$ czyli $\frac{1}{256}$, z tego $\sqrt[8]{\ } = \frac{1}{2}$ iest stosunkiem postępu, który iest
$\div$ 768 : 384 : 192 : 96 : 48 : 24 : 12 : 6 : 3.

VII. Idzie o znalezienie summy postępu ilorazowego o 32 wyrazach (n° 301) z których pierwszy iest 1, a stosunek 2. Jest zaś 32gi wyraz $= 1 \times 2^{31}$ czyli 2^{31}, który trzeba rozmnożyć ieszcze przez stosunek, a zatém wziąć 2^{32} co czyni 4294967296. Odeymuię od tego iloczynu pierwszy wyraz 1, zostaie 4294967295, co trzeba podzielić przez 2—1, to iest przez 1, zostanie więc taż sama liczba; i cena konia iest 4294967295 szl. czyli 47721858zł. 25gr.

VIII. Postęp w tym razie iest $\div$ 20 : 400 : 8000... wyraz 10ty $= 20 \times (20)^9$. Summa zaś wyrazów $= \frac{20 \times (20)^{10} - 20}{20 - 1} = 538\,947\,368\,420$ i ta iest szukana liczba ziarn, które ieżeli 1 korzec będzie ich brał w siebie 4 000 000, uczynią korcy 134 736 i ieszcze nieco więcéy.

IX. Liczba ziarn zboża = summie wyrazów postępu ilorazowego którego pierwszym wyrazem iest 1, stosunek 2, liczba wyrazów 64. Jest zaś 64ty wyraz tego postępu $= (2)^{63}$; więc summa wszystkich iego wyrazów $= \frac{2^{64} - 1}{2 - 1} = 18\,446\,744\,073\,709\,551\,615$.

Przypuściwszy iż korzec bierze w siebie tych ziarn 5 000 000, byłoby korcy 3689 358 814 741. Przypuśćmy ieszcze iż łan pola wydaie 400 korcy, tedy na wydanie powyższych korcy trzebaby 9 223 397 036 łanów.

Wyrachowano iż na wydanie téy ilości zboża w roku iednym, trzebaby pola równego powierzchni kuli 8 razy większéy niż powierzchnia naszéy ziemi, obeymuiąc i te części powierzchni które zaymuią wody, morza, lasy, i t. d. (1). Widoczna iest także, iż summa pieniężna za toż zboże rachowane choćby podług naypomierniejszéy ceny, przechodziłaby wszystkie skarby ziemi.

X. Szukany iloczyn wyrazów $= (2 \times 4374)^8$ z czego trzeba ieszcze wyciągnąć pierwiastek kwadratowy (n° 300), lecz że iest stopień potęgi parzystéy, oszczędzi się pracy, wynosząc tylko iloczyn oznaczony t. i. 8748 do potęgi $\frac{8}{2} = 4$. Potęga 4ta liczby 8748 iest 5 856 305 815 462 016 szukanym iloczynem wyrazów.

Karta 137 n° 313

I. Za mniéy pieniędzy mniéy będzie towaru, stosunki są proste, wypada więc proporcyia
$68\frac{5}{8}\# : 45\frac{3}{4}\# = 40\frac{1}{2}$cent : xcent.
czyli $\frac{549}{8} : \frac{183}{4} = \frac{81}{2} : x$, pomnożywszy pierwszy wyraz przez 8, a dwa inne przez czynniki liczby 8, będzie 549 : 183 = 81 : x. podzieliwszy wyraz pierwszy i trzeci przez 9 będzie:
61 : 183 = 9 : x
czyli 1 : 3 = 9 : $x = \frac{9 \times 3}{1} = 27$cetn.

II. Im więcéy ma zrobić tém więcéy potrzebuie czasu, stosunki są proste, i iest:
łok. łok. d. d.
21,9 : 42,75 = 9 : x
czyli 2190 : 4275 = 9 : x, skracaiąc i uskuteczniaiąc znaydziemy x = 17,568... dni.

III. Im mniéy chce łożyć czasu na drogę, tém po więcéy mil musi ieżdżać, stosunki są odwrotne, a że wyraz czwarty ma być większy, trzeba więc ułożyć proporcyią
12 : 20 = $\frac{15}{2}$: xmil
czyli 3 : 5 = $\frac{15}{2}$: x
czyli 6 : 5 = 15 : x, które znaydziemy = $12\frac{1}{2}$mil.

(1) Ob. Leçons élément. d'arithmetique par Mauduit. Paris 1804.

IV. Podobnie iak wyżéy postępuiąc znaydziemy iż rachowano czerw. zł. po $19\frac{11}{25}$zł. czyli 19zł. $13\frac{1}{5}$gr.

V. Każde 9 snopków zawiezionych do stodoły były 10tkiem. przed oddaniem dziesięciny; ułożywszy więc proporcyią 9 : 10 = 702 : x, znaydziemy x = 780 liczbie wszystkich snopków; a zatém dziesięcina wynosiła 780—702 = 78 snopków.

VI. Trzeba sprowadzić utrzymywanie tych oddziałów woyska do iednakowego czasu; iak tu np. do miesiąca. Mówię zatém: utrzymywać 1000 żołn. przez 3 mce; iest toż samo co przez miesiąc 3 razy więcéy czyli 3000. Utrzymywać 500 żołn. przez 4 mce, iest toż samo co przez ieden miesiąc 4 razy więcéy czyli 2000. Miasto więc obowiązane było tyle ponieść kosztu, iak gdyby 5000 woyska przez miesiąc utrzymywało. Że zaś rzeczywiście ma teraz utrzymywać tylko 1500 ludzi, więc utrzymywanie to przez dłuższy czas być musi. Ułożymy zatém proporcyią 1500 : 5000 = 1mc : xmcy; odpowiedź iest $3\frac{1}{3}$mcy.

VII. Za więcéy sążni trzeba więcéy zapłacić. Zamieniwszy liczby wielorakie na ułomki, będzie

$$23\tfrac{8}{9}\text{sąż.} : 77\tfrac{4}{9}\text{sąż.} = 44\tfrac{16}{45}\text{zł.} : x^{\text{zł.}}$$

czyli $215 : 697 = \frac{1006}{45} : x$; uskuteczniaiąc działanie znaydziemy x = 143zł. 23gr. $15\frac{9}{215}$d.

VIII. Im bliżéy ma przewieźć umówiony towar, tém więcéy go przewieźć powinien, będzie więc 22 : 28 = 50cet. : xcet. = $63\frac{7}{11}$cet. a zatém $13\frac{7}{11}$cent więcéy od umówionéy ilości.

IX. Ażeby sobie ułatwić poznanie zachodzących stosunków, piszę zagadnienie tak:

ludzi	łok.	zł.	dni
8 ...	3	1500	40
12 ...	4	x	45

układam teraz stosunki iak następuie:

$$\left.\begin{array}{rl} 8 : 12 \text{ czyli } & 2 : 3 \\ & 3 : 4 \\ 40 : 45 \text{ czyli } & 8 : 9 \end{array}\right\} = 1500^{\text{zł.}} : x^{\text{zł.}}$$

zatém (nº 307) 4 : 9 = 1500 : x, które znayduiemy = 3375zł.

X. Postępuiąc podobnie iak w zagadnieniu poprzedzaiącém, znaydziemy iż potrzeba 160 robotników.

XI. Odpowiedź $437\frac{1}{2}$tal.

XII. Napisawszy zagadnienie w ten sposób:

robot.	dni	god.	sąż. dł.	ł. szer.	ł. głę.	tal.	zł.	gr.	tal.
20...	18....	9....	360...	$4\frac{2}{3}$...	$3\frac{2}{3}$	190	4	24	$=190\frac{4}{5}$
54...	60....	10....	x....	$7\frac{1}{2}$...	$2\frac{2}{5}$				

piszę naprzód stosunek wktóry wchodzi wyraz niewiadomy, to iest 360 : x; układam dane stosunki z lewéy strony, maiąc wzgląd czy wpływaią na wyraz ostatni w sposobie prostym lub odwrotnym:

$$\left.\begin{array}{r} 20 : 54 \\ 18 : 60 \\ 9 : 10 \\ \frac{15}{2} : \frac{14}{3} \\ \frac{12}{5} : \frac{11}{3} \end{array}\right\} = 360^{\text{sąż.}} : x^{\text{sąż.}}$$

gubiąc teraz spólne czynniki i skracaiąc podług prawideł, znayduię na czwarty wyraz $3422\frac{2}{9}$sąż. Chcąc zaś wiedzieć ile zarobią ci robotnicy, dosyć iest uważać stosunek wielkości roboty lub stosunek liczby robotników i łożonego czasu. W pierwszym razie byłyby stosunki iak pod lit. a), w drugim iak pod lit. b), wypadek iest zawsze iednakowy 1908tal.

a) $\left.\begin{array}{r} 360 : 3422\frac{2}{9} \\ \frac{14}{5} : \frac{15}{2} \\ \frac{11}{3} : \frac{12}{5} \end{array}\right\} = \frac{954}{5}^{\text{tal.}} : x^{\text{tal.}}$ b) $\left.\begin{array}{r} 20 : 54 \\ 18 : 60 \\ 9 : 10 \end{array}\right\} = \frac{954}{5}^{\text{tal.}} : x^{\text{tal.}}$

XIII. Zagadnienie to należy do gatunku zagadnień o których mówiliśmy pod nº 312; 100ŁB ołowiu ieden przy drugim uważane lub razem w iednéy bryle złączone, nie mogą 100 razy prędzéy upaśdź, niż 1ŁB; równie iak 100 żołnierzy razem idących nie mogą zayść 100 razy daléy niż 1 żołn. Droga więc od 100ŁB przebieżona w 1″ iest ta sama którą 1ŁB w tymże czasie przebiega. A ieżeli 100 funtowa bryła ołowiu pospolicie nieco prędzéy spaśdź może, tedy to zawisło od okoliczności których ocenienie szczególniéy do fizyki należy.

XIV. Jeżeli ieden koń zaprzęgnięty do wozu ciągnie 10 cent. a inne także poiedynczo zaprzęgnięte być maią do wozów; tedy 12 koni, 12 razy więcéy ciężaru uciągną niż 1 kóń. Lecz ieżeli 12 koni maią być zaprzęgnięte do 1 wozu, rzecz się ma wcale inaczéy, i nie można wnosić że 120 cent. uciągną. Przypuściwszy nawet że się wóz

nie zdanie, co istnak bardzo iest podobna; tedy iuż tak wielki ciężar tłoczyć będzie wóz tak mocno w ziemię, że z tego samego względu więcéy niż 12 razy cięższy się stanie do uciągnięcia, inne okoliczności pomiiaiąc.

Karta 146 nº 328.

I. Napisawszy naprzód stosunek główney wiadomey z główną niewiadomą, iak w zagadnieniu ninieyszém

ł. ber. ł. pol.
50 : x, następnie wiadome stosunki układam podług reguły, po lewéy stronie, iako to:

$$\left.\begin{array}{rcl} 113 & : & 128 \\ 64 & : & 79 \end{array}\right\} \begin{array}{cc} \text{ł. ber.} & \text{ł. pol.} \\ = 50 & : \quad x \end{array}$$

skracaiąc będzie $904 : 1185 = 50 : x$, które znaydziemy równe $65\frac{245}{452}$ łok. pol.

II. Odpowiedź: 58 frydrychsdorów równaią się $98\frac{74}{75}$ ## w złocie.

III. Ułożywszy stosunki i po skróceniu uskuteczniwszy znaydziemy, iż 128 łokci pol. uczynią łok. bawars. $96\frac{103}{387}$.

IV. Znaydziemy podobnie iż 1222 tal. hollend. uczynią srebrnych rubli rossyyskich 1629, 9...

V. Wiedząc z tablic metrologicznych że 1℔ hamburski ma 484,335 gramów iakich 468,5358 rachuie się na 1℔ berliński; znaydę odpowiedź 27,565 prawie.

zł.

VI. Stosunki ułożone będą następuiące:

$$\left.\begin{array}{rcl} \text{bela} & & \text{ryz} \\ 1 & : & 10 \\ \text{ryza} & & \text{liber} \\ 1 & : & 20 \\ \text{libra} & & \text{ark.} \\ 1 & : & 24 \\ \text{ark.} & & \text{szel.} \\ 1 & : & 2 \\ \text{szl.} & & \text{gr.} \\ 3 & : & 1 \\ \text{gr.} & & \text{zł.} \\ 30 & : & 1 \\ \text{zł.} & & \text{tal.} \\ 6 & : & 1 \end{array}\right\} \begin{array}{cc} \text{bela} & \text{tal.} \\ = 1 & \quad x \end{array}$$

skróciwszy wypadnie $9 : 160 = 1 : x$, $x = 17\frac{7}{9}$ tal.

VII. Za 3gr. dostaniemy $\frac{1}{3}$ łuta.

VIII. Znaiąc z tablic metrologicznych stosunek ankra gdańskiego do garca warszawskiego czyli raczéy pośrednie między niemi stosunki, układam ie tak:

$$\left.\begin{array}{rcl} & & \text{gar.} \quad \text{litr.} \\ & & 1 \quad : \quad 4 \\ & & \quad\quad \text{stof} \\ 1{,}71 : 1 \text{ czyli } & & 171 \quad : \quad 100 \\ & & \quad\quad \text{ankr} \\ 27\frac{1}{2} : 1 \text{ czyli } & & 55 \quad : \quad 2 \\ & & 1 \quad : \quad 18 \text{tal} \\ & & 1 \quad : \quad 6 \text{zł.} \end{array}\right\} \begin{array}{cc} \text{gar. pol.} & \text{zip.} \\ = 1 & : \quad x \end{array}$$

zł.

uskuteczniwszy działanie, znaydziemy $x = 9{,}186$.

IX. Uważam iż 100łok. kupionych, uczynią tylko 98 przedanych; lecz za 120zł. maiących się zebrać, teraz się wydaie tylko 100. Układam więc stosunki:

$$\left.\begin{array}{rcl} \text{ł.} & & \\ 100 & : & 98 \\ 1 & : & 12 \\ 120 & . & 100 \end{array}\right\} \begin{array}{cc} \text{ł.} & \text{zł.} \\ = 650 & : \quad x \end{array}$$

skróciwszy i uskuteczniwszy działanie, znaydę $x = 6370$zł.

X. Zachodzą tu podobne względy iak w poprzedzaiącém zagadnieniu, postąpimy więc podobnież w ułożeniu stosunków wyrażaiąc zł. 1 gr. 12 w ułomku dla skrócenia, i tak 1zł. 12gr. $= 1\frac{2}{5}$zł. czyli $\frac{7}{5}$zł.

Odpowiedź zaś żądaną znaydziemy $392\frac{1}{2}$ zł.

XI. Ułożywszy stosunki iak następuie:

$$\left.\begin{array}{rcl} 53 & : & 54 \\ 100 & : & 98 \\ 180 & : & 75 \\ 1 & : & 20 \\ 115 & : & 100 \end{array}\right\} \begin{array}{cc} \text{ł. pol.} & \text{zł.} \\ = 1 & : \quad x \end{array}$$

znaydziemy skróciwszy i uskuteczniwszy, że x = 3zł. 15gr. $2\frac{377}{22\,19}$szł.

XII. Znaydziemy na odpowiedź: 848tal. $2\frac{10}{21}$zł.

XIII. Gdy mury do portów prowadzące były po dwóch stronach, zatém długość muru do portu Faleryskiego wzięta poiedynczo, była stadiów 70, a do portu Pireyskiego 80,

do których przydawszy długość muru poiedynczego 60 stadiów, będzie całéy długości murów wziętych poiedynczo 210 stadiów; ułożywszy stosunki iak następuie:

stad. krok. / 1 : 125 / krok. mil / 6000 : 1 } stad. mil. = 210 : x

po skróceniu i uskutecznieniu wypadnie $x=4\frac{3}{8}$ mil.

XIV. Wiedząc z tablic metrologicznych że $\frac{1}{0}$ sąż. parysk. ma 324,7 milimetrów których rachuiemy 288 na 1 stopę polską, znaydę odpowiedź, 21761,66.

Karta 153 nº 343.

I. Procent o który się pytaią, iest 1250zł,

II. Kapitał szukany, iest 25000zł.

III. Od sta brano po 5zł.

IV. Kapitał o który się pytaią, iest 25000zł. a procent roczny 1250zł.

V. 1) Ponieważ zarobiono 1500zł. ułożę więc proporcyią, 4500 : 1500 = 100 : x, które = $33\frac{1}{3}$. 2) podobnie znaydę iż stracono na $\frac{0}{0}$, $33\frac{1}{3}$.

VI. Jeżeli za wexel na 100zł. trzeba zapłacić 102zł. więc na 2000zł. zapłacę w tymże stosunku więcéy; ułożę więc proporcyią

100 : 102 = 2000 : x; które będzie 2040zł.

szukaiąc samego procentu dla bankiera ułożyłbym proporcyią

100 : 2 = 2000 : x; które = 40zł.

VII. Trzeba 9 miesięcy i 18 dni zamienić na ułomek lat: 9 mcy = $\frac{3}{4}$ roku, a 18 dni = $\frac{3}{5}$ mca (1); że zaś miesiąc iest $\frac{1}{12}$ roku, więc $\frac{3}{5}$ mca są $\frac{3}{60}$ czyli $\frac{1}{20}$ roku; $\frac{3}{4}$ i $\frac{1}{20} = \frac{15}{20}$ i $\frac{1}{20} = \frac{16}{20} = \frac{4}{5}$ roku. Zatém 6lat 9mcy i 18dni = $6\frac{4}{5}$ lat. To przygotowanie maiąc, łatwo za pomocą reguły trzech składaney wyrachuię żądany procent: będzie bowiem proporcyia

100 : 36000 / 1 : $\frac{34}{5}$ } pr. pr. = 7 : x

skracaiąc i uskuteczniaiąc, znaydziemy odpowiedź 17136zł.

(1) Powszechnie rachuią w podobnych razach 30 dni na każdy miesiąc.

VIII. Podobnież szukany kapitał iest 36000zł.

IX. Brano po 7%.

X. Zamieniwszy podobnie 6lat 9mcy i 18dni na $6\frac{4}{5}$ lat, trzeba wziąć na pierwszy wyraz proporcyi, podług (nº 332), kapitał z procentem 7% tyloletnim iak iest w zadaniu. Będzie więc proporcyia:

k. z pr. k. z pr. k. k.

$147\frac{3}{5}$: 53136 = 100 : x zł.

czyli $\frac{738}{5}$: 53136 = 100 : x

czyli 738 : 53136 = 500 : x

czyli 41 : 2952 = 500 : x, uskuteczniwszy znaydziemy x = 36000zł. te odiąwszy od 53136, lub przez proporcyią.

pr. pr.

$147\frac{3}{5}$: 53136 = 7 : x. znaydziemy procent 17136zł.

XI. Im więcéy ma przynieść zysku iaki kapitał tém dłużéy musi być na procencie, lecz im większy iest kapitał tém krócéy będzie na procencie dla przyniesienia zysku; ułożywszy więc stosunki:

7 : 17136 / 36000 : 100 } rok. lat = 1 : x

skracaiąc i uskuteczniaiąc znaydziemy x = 6lat 9mcy 18dni

XII. Szukany 1) procent iest $14062\frac{11}{22}$zł.

2) kapitał iest 27000zł.

3) czas, iest 10 lat i 5 mcy.

XIII. Gdy kapitał pierwiastkowy wynosi 2460zł. po 5 mcach, a 2592zł. po 16 mcach, więc zwiększył się o 132 zł. w 11 mcach, a zatém o $\frac{132}{11}$ czyli 12zł. w iednym mcu; a o 60zł. w 5 mcach; lecz że po zwiększeniu wynosi 2460zł. kapitał więc pierwiastkowy iest 2400zł. Skoro zaś wiem procent miesięczny, łatwo iuż wiedzieć procent roczny, a wiedząc ten od całego kapitału, znaydę i od sta, który będzie 6zł.

XIV. Szukany 1) czas, iest 3 miesiące;

2) kwota, iest $1166\frac{2}{3}$ tal.

XV. Szukany 1) czas, iest, $10\frac{3}{7}$ miesięcy;

2) kwota zaś iest 800tal.

XVI. Szukany 1) czas, iest 4mce; 2) kwota iest 900 tal.

XVII. Gdy osoba A wytrzymała iuż przez 3 miesiące całą kwotę, ma ią ieszcze trzymać przez 5 miesięcy; lecz

wypłaciwszy 900tal. pozostaie iéy tylko 1500tal. Zagadnienie więc zamienia się na następuiące: maiąc 2400tal. używać 5 miesięcy, iak długo wypada używać 1500tal. odpowiedź iest 8 miesięcy.

XVIII. Gdy procent iest $5\frac{0}{0}$ czyli $\frac{1}{20}$, więc od 1zł. na końcu roku $\frac{1}{20}$zł. a zatém 1zł. waży po roku wraz z procentem $\frac{21}{20}$zł. czyli $1\text{zł.} \times \frac{21}{20}$, a po 5 latach ważyć będzie $1\text{zł.} \times (\frac{21}{20})^5$ czyli $1\text{zł.} \times \frac{4084101}{3200000}$ (n° 338); 100000zł. ważyć zaś będą 100000 razy więcéy; czyli $\frac{4084101\,00000}{3200000} = \frac{4084101}{32}$zł. Uskuteczniwszy dzielenie znaydziemy $127\,628\frac{5}{32}$zł. i ta iest szukana ważność kapitału na końcu 58° r. wraz z procent. składanym. Odiąwszy od znalezionéy summy pierwiastkowy kapitał 100000, znaydziemy $27\,628\frac{5}{32}$zł. zwiększenie iego w 5 latach z przyczyny samego procentu składanego, który gdyby był prostym uczyniłby tylko 25000zł. (n° 330).

XIX. Podzieliwszy $127\,628\frac{5}{32}$zł. przez ważność 1zł. po 5 latach która iest $(\frac{21}{20})^5$ czyli $\frac{4084101}{3200000}$ (n° 340), iloraz $127\,628\frac{5}{32} \times \frac{3200000}{4084101} = \frac{4084101\,00000}{4084101} = 100\,000$zł. okaże kapitał pierwiastkowy.

XX 1) Wypada od 1zł. na końcu roku $\frac{8}{100} = \frac{2}{25}$zł. więc 1zł. waży po roku wraz z proc: $\frac{27}{25}$zł. a po 4 latach ważyć będzie $1\text{zł.} \times (\frac{27}{25})^4 = 1\text{zł.} \times \frac{531441}{390625}$ procent zaś miesięczny iest tu $\frac{2}{300} = \frac{1}{150}$, a zatem za 4 miesiące iest $\frac{4}{150} = \frac{2}{75}$zł. Więc 1zł. waży po 4 miesiącach $\frac{77}{75}$zł. a zatém po 4 latach i 4 miesiącach ważyć będzie $\frac{531441}{390625} \times \frac{77}{75} = \frac{40920957}{29296875}$zł. (n° 339), a zatem 60000zł. ważyć będą $\frac{40920957}{29296875}$zł. $\times 60000 = \frac{40920957}{15625}$zł. $\times 32$. Uskuteczniwszy znaydziemy odpowiedź $838\,6\frac{1874}{15625}$zł.

2) Podzieliwszy $83806\frac{1874}{15625}$zł. przez ważność 1zł. po 4 latach i 4 mcach która iest $\frac{40920957}{29296875}$ (n° 340); iloraz 60000zł. okaże pierwiastkowy kapitał.

Karta 159 n° 349.

I. Osoba A wypłacić teraz powinna 15428$\frac{4}{7}$zł.

II. Bankier wypłacić powinien $2926\frac{34}{41}$zł.

III. Widzimy iż trzeba ułożyć proporcyią, 600 : 600—564=100 : x czyli 600 : 36=100 : x, oznaczaiąc przez x to, co odbieraiący traci na 100zł. znaydziemy x=6zł.

IV. Dłużnik miałby prawo zatrzymać pieniądze ieszcze przez 5 miesięcy. Procent za 5 mcy wypada od $\frac{0}{0}$ $2\frac{1}{2}$. Zagadnienie więc sprowadza się na takie iaki kapitał należy dziś oddać, aby za 5 mcy wyszedł na 2854zł. Odpowiedź podług n° 342 znaydziemy $2784\frac{16}{41}$zł.

V. Szukana 1) wypłata iest 28125zł. (n° 345).

2) Zagadnienie dane wychodzi na następuiące: maiąc po 8 latach wypłacić 4500zł. ileż dziś oddać należy wytrąciwszy sobie procent po $5\frac{0}{0}$? Odpowiedź iest 3750zł.

VI. 1) Co do pierwszego pytania ile dziś wypłacić należy? podzieliwszy 45000zł. przez $(\frac{21}{20})^{12} = \frac{7355827511386641}{4096000000000000}$ wartość 1zł. po 12 latach (n° 337), znaydziemy iloraz 2005$\frac{7}{10}$zł. 20 $\frac{1401801970504100}{2724380855977283}$gr. czyli skracaiąc ułomek 2005$\frac{7}{10}$zł. $20\frac{1}{2}$gr. prawie.

2) Co do pytania drugiego, podzieliwszy 45000zł. przez $(\frac{21}{20})^4 = \frac{194481}{160000}$ wartość 1zł. po 4 latach; kwota szukana iest $37021\frac{1188899}{194481}$ czyli 37021zł. $18\frac{1}{3}$gr. prawie.

VII. Szukana 1) wypłata podług n° 346 iest $3363\frac{11}{19}$zł.

2) czas, iest lat $7\frac{2}{5}$; t.i. lat 7 m. 4 i dni 24 (n° 347).

3) trzeba obrachować iak długo A może całego długu nie wypłacać, iak dopiero widzieliśmy, lat 8; a zagadnienie zamienia się wtedy na następuiące: maiąc ieszcze 5 lat używać 45000zł. ileż dziś oddać należy wytrąciwszy procent po $5\frac{0}{0}$? Odpowiedź iest 36000zł.

VIII. Wypada obrachować korzyść zapewnioną dłużnikowi przez umowę, a to sprowadzaiąc używanie pożyczonych pieniędzy do używania pewnéy kwoty w iednakowym czasie. I tak uważam naprzód iż 800tal. używa dłużnik przez 4 miesiące, co iest toż samo iakby używał przez miesiąc 3200tal. Daléy używa 600tal. przez 2 miesiące, co iest to samo iakby używał przez miesiąc 1000tal. Naostatek używa 100tal. przez 2 miesiące, co iest to samo używać 200tal. przez miesiąc. Cała więc korzyść z używania pożyczonych pieniędzy sprowadza się do używania przez miesiąc 4400tal. Jeżeli zaś téy korzyści ma wyrównywać używanie 800tal. więc być musi na dłuższy czas. Odpowiedź znaydziemy podług n° 333, miesięcy $5\frac{1}{2}$.

IX. Odpowiedź: w $6\frac{2}{3}$ miesięcy, czyli w 6 miesięcy i dni 20.

X. 1) Wziąwszy $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{6}$ i $\frac{1}{3}$ z daney summy, co czyni 1620, 810 i 2160tal. i części te razem dodane odiąwszy od

6480tal. reszta iest 1890tal. a tak zagadnienie zamienia się na poprzedzaiące, i podobnym sposobem znaydziemy iż wypada oddać ten dług za $6\frac{1}{8}$ mcy.

2) Potrzeba tu obrachować iak długo mógł trzymać dłużnik całą wypłatę, iakieśmy dopiero widzieli $6\frac{1}{8}$ mcy, a zatém wytrzymawszy iuż 2 mce: powinien ią ieszcze trzymać $4\frac{1}{8}$ miesięcy. Zagadnienie więc zamienia się na to: maiąc używać 6480tal. przez $4\frac{1}{8}$ miesięcy, ile wypada dziś oddać wytrącaiąc sobie po 8^0_0? Odpowiedź iest 6306zł. 17gr. i $1\frac{1}{2}$d. prawie.

XI. Obrachowawszy iak się iuż wyżéy okazało, zapewnioną dłużnikowi korzyść, znaydziemy iż ta wyrównywa używaniu przez rok 8000tal. czyli podług przyiętego procentu czystéy korzyści 640tal. Lecz korzyść tę powinien mieć dłużnik na końcu 4 lat. Zagadnienie więc zamienia się na następuiące: iaki ma być kapitał ażeby z procentem prostym po 8^0_0 za 4 lata wyszedł na 400tal.? Znaydziemy odpowiedź $321\frac{9}{31}$tal. (n° 345).

XII. Trzeba obrachować korzyść iaką ma zapewnioną płacący podług umow. To zaś nastąpi sprowadzaiąc wypłacić się maiącą kwotę do iednego czasu np. miesiąca. I tak podług n° 334 znaydziemy iż korzyść ta wyrównywa używaniu przez miesiąc 9000zł. Obrachujmy znowu ile korzyści otrzymał iuż płacący z używania wypłacaiącego się długu do końca 5ciu miesięcy. Znaydziemy że tyle, iak gdyby przez miesiąc 4000zł. używał. Idzie mu więc tylko o wyrównanie korzyści z używania ieszcze 5000zł. przez miesiąc. Że zaś po wypłaceniu 2ch rat długu, zostaie mu tylko na końcu 5go miesiąca 375zł. więc zagadnienie wychodzi na następuiące: maiąc używać 5000zł. przez miesiąc, iak długo można używać 375zł.? Na odpowiedź znayduię podług n° 333, $13\frac{1}{3}$ miesięcy.

XIII. Gdy czynsz 4200zł. iest $\frac{1}{10}$ kapitału, 1zł. podług tego wynosi na końcu r. $\frac{11}{10}$zł. a zatém 42000zł. wynosić będą na końcu 2go roku $42000\text{zł.} \times (\frac{11}{10})^2$ czyli 50820zł. obie więc wypłaty złączone i obrachowane w téyże epoce powinny wynosić 50820zł. Lecz pierwsza wypłata uiszczona na końcu pierwszego roku, wynosi na końcu 2go roku $\frac{11}{10}$ swoiéy wartości, 2ga zaś wypłata uiszczona na końcu 2go roku wynosi $\frac{10}{10}$ swoiéy wartości; obie więc wypłaty łącznie obrachowane na końcu 2go r. wynosić będą $\frac{11}{10} + \frac{10}{10} = \frac{21}{10}$ części pierwszéy wypłaty. Zatém $\frac{21}{10}$ części pierwszéy wypłaty = 50820zł. a $\frac{1}{10}$ teyże wypłaty $= \frac{50820}{21}$ czyli 2420zł.; cała więc pierwsza wypłata iako 10 razy większa = 24200. Spłaci się więc czynsz i kapitał w 2ch wypłatach po 24200zł. na końcu pierwszego i 2go roku. Jakoż płacąc na końcu 1go roku 24200zł. gdy 4200zł. przypada iako czynsz od 42000zł. więc spłaca się rzeczywiście tylko 20000zł. z kapitału, który przez to sprowadza się do 22000zł. Idzie więc na drugi rok o procent tylko od 22000zł. procent ten iest 2200 który dodany do 22000 czyni 24200zł. druga więc wypłata podług warunku zaspokaia dług zupełnie.

XIV. Podobnie rozumuiąc iak w przykładzie poprzedzaiącym, znaydziemy iż każda wypłata powinna być 1331 zł. Trzeba tylko uważać, że gdy 1sza wypłata uiszczona na końcu 1szego roku, wynosi na końcu roku 2go $\frac{11}{10}$ czyli $\frac{110}{100}$ swoiéy wartości, taż sama wartość na końcu 3go r. wynosić będzie $\frac{121}{100}$ swoiéy wartości; 2ga wypłata uiszczona na końcu 2go roku wynosi na końcu roku 3go $\frac{110}{100}$ swoiéy wartości; 3cia zaś uiszczona na końcu 3go roku, wynosi tylko $\frac{100}{110}$ swoiéy wartości; wszystkie więc 3 wypłaty łącznie obrachowane na końcu 3go r. wynosić będą $\frac{121}{100} + \frac{110}{100} + \frac{100}{100} = \frac{331}{100}$ części pierwszéy wypłaty, i t. d.

Widzimy zatém iż dla rozwiązania tego gatunku zagadnień, trzeba wartość summ wypłacać się maiących w różnych epokach, obrachować w iednéy epoce.

XV. Aby rozwiązać zagadnienie, trzeba znaleźć iaka byłaby teraz wartość 50łok. materyi drugiego gatunku na $\frac{3}{4}$łok. szerok. stosuiąc ią do warunków pierwszego kupna; wartość ta porównana z wartością wypadaiącą z warunków 2go kupna proponowanego, da poznać propozycyią korzystnieyszą. Podług warunku 1szego kupna 30łok. materyi 1szego gatunku na $\frac{9}{4}$łok. szerok. kosztuią 720zł. gotowizną; lecz gdy drugi gatunek materyi iest podléyszy, 50łok. 2go gatunku na $\frac{3}{4}$łok. szerok. kosztowałyby 1000zł. gotowizną (n° 308) a 1210zł. wypłacić się maiące za 2 lata (n° 338). Więc 50łok. materyi 2go gatunku maiące się wypłacić po 2ch latach, kosztowałyby kupca 1210zł. stosuiąc do warunków 1szego kupna, a 1200zł. podług warunku 2go kupna Drugie więc kupno iest korzystnieysze.

Widzimy więc iż w zagadnieniach tego gatunku trzeba odnosić zyski i straty do iednakowéy epoki; różnica summy

sysków od summy strat każdéy spekulacyi; da poznać korzyść rzeczywistą.

Karta 165 nº 359.

I. A straci $88\frac{13}{27}$zł. B $755\frac{5}{9}$, C $975\frac{25}{27}$, D $787\frac{1}{27}$.

II. A miała kapitału $1761\frac{1}{47}$, B $8808\frac{24}{47}$, C 9574 $\frac{22}{47}$

III. Gdy C mieć ma połowę całego zysku, powinna dać tyleż ile obiedwie osoby pierwsze; dodawszy więc składki 350# i 200# summa ich iest 550#, kwotę więc tę włożyć ma osoba C. Zysk zaś osoby A iest $318\frac{2}{11}$, B $181\frac{9}{11}$, a C 500zł.

IV. Weźmie 12℔ saletry, 8℔ siarki, 6℔ węgli i 24℔ prochu.

V. Trzeba $42\frac{6}{7}$℔ piasku, $14\frac{2}{7}$ potażu a $2\frac{6}{7}$ kredy.

VI. 1) Pierwszy oddział zrobi 5000 miar, 2gi 1800 a 3ci 3200.

2) Pierwszy oddział powinien liczyć 2300 robotników, 2gi 828, a 3ci. 1472.

VII. Należy naprzód obrachować ile potrzeba będzie w ogóle materyiałów, a to przez proporcyią : 100 : $101\frac{1}{2}$ czyli 200 : 203 = 5000cetn. : x; które = 5075cet. Ponieważ zaś w iakieykolwiek ilości prochu wzięte ilości saletry, siarki i węgla maią się mieć między sobą iak $\frac{15}{2}$: $\frac{2}{2}$: $\frac{2}{2}$ zatém potrzeba proporcyionalnie do tych liczb podzielić 5075cetn. a znaydziemy na odpowiedź: 3825cetn. saletry, 625 siarki i 625 węgli.

VIII. Trzeba sprowadzić składki do iednakowego czasu aby mieć tylko regułę spółki poiedynczą. Gdy zaś dany czas naykrótszy 3 miesiące dzieli dokładnie 6 i 12 mcy, mogę wziąć 3 mce za iedność czyli miarę czasu, i aby do niéy sprowadzić składkę spólnika 2go, powiem 630tal. przez 6 mcy daie takież prawo do zysku iak 2 razy 630 czyli 1260tal. przez 3 mce. Podobnież 1sza składka użyta przez 4 razy 3 mce, tyle czyni iak 4 razy 840 czyli 3360tal. przez 3 mce. Trzy te składki tak przygotowane daią summę 5160tal. Pierwszy zatém stosunek spólny trzem proporcyiom iest 5160 : 1560 czyli 43 : 13 = i t. d. Znaydziemy iż 1sza osoba bierze z zysku $1015\frac{35}{43}$tal; 2ga $380\frac{40}{43}$, a 3cia $163\frac{11}{43}$.

2) Trzeba naprzód wynaleźć zysk cały, który będzie odtrąciwszy summę włożonych kapitałów t. i. 1206zł. od

kwoty zebranéy za 700 kor. po 20zł. t. i. od 14000zł. Zysk ten iest 1940zł. Zagadnienie więc rozwiążemy iak wyżéy; i dla 1széy osoby przypadnie $1263\frac{11}{43}$zł.; dla 2éy $473\frac{33}{43}$ a dla 3éy $203\frac{1}{43}$.

3) Zysk iest wskazany iako 10ta część całego kapitału czyli 1206zł. Lecz aby znaleźć cenę korca przedanéy reszty zboża, trzeba naprzód obrachować ile wszyscy wziąć maią ogółem. Maią zaś wziąć summę z kapitału włożonego 1206zł. i zysku 1206zł. t. i. razem 13266zł. A że za 8 laszt. po 400zł. wzięli 7200zł. za 300kor. po $11\frac{1}{2}$ zł. wzięli 3450zł. t. i. razem 10650zł. więc za resztę zboża zebrać ieszcze maią 2616zł. Podzieliwszy tę summę przez pozostałe 214kor. wypada cena korca po 12zł. 6gr. $13\frac{37}{107}$den. Zysk zaś podług poprzedzaiącego rozwiązania znaydziemy 1széy osoby 2éy $785\frac{13}{43}$zł. $294\frac{21}{43}$, a 3éy $126\frac{9}{43}$.

IX. Widoczna iest, iż kapitał ostatniego był tylko 2 lata w handlu: przedostatniego zaś półroku dłużéy t. i. $2\frac{1}{2}$ lat; 2go spólnika półroku ieszcze dłużéy t. i. lat 3. Naostatek pierwszego, był kapitał w handlu lat 3. Sprowadziwszy więc (nº 330) włożone kapitały do iednakowego czasu, znaydziemy iż zysk 1szego spólnika iest $1426\frac{302}{673}$zł. 2go $1027\frac{20}{673}$ 3go $748\frac{506}{673}$ $1597\frac{410}{673}$.

X. Sprowadziwszy składki do iednakowego czasu (nº 334) znaydziemy ie odpowiadaiące na 1 miesiąc kwotom: 7200#, 6150 i 7470. Podzieliwszy zysk proporcyionalnie do tych liczb, wypadnie dla 1széy osoby zysku $829\frac{1011}{1041}$# dla 2éy $708\frac{972}{1041}$. a dla 3éy $861\frac{99}{1041}$.

XI. Gdy oprócz strat poniesionych, zysk wynosi 100000zł. musieli więc spólnicy zyskać od początku 3go miesiąca aż do końca 148o 100000 + 7300 + 2900 = 110200. Pierwsza strata poniesiona była przez 2ch pierwszych spólników, a 2ga iuż przez 3ch.

Zadanie więc to daie mieysce trzem działaniom.

1od Trzeba rozdzielić stratę 7300zł. proporcyionalnie do 86000 i do 60000zł. wypadną działy odpowiadaiące 4300 i 3000zł.

2re aby rozdzielić drugą stratę, trzeba poznać kapitały które miał w handlu każdy ze spólników w ciągu 15go mca. Pierwszy miał w téy epoce 96000, a 2ch innych każdy po 100000zł. Strata więc dla pierwszego wypada $940\frac{160}{296}$ a dla 2ch innych po $979\frac{216}{296}$zł.

3cie trzeba rozdzielić zysk cały 110200zł. a odtrąciwszy od działu każdego właściwą stratę, otrzymamy zysk iego rzeczywisty.

Zysk ten miał mieysce w ciągu 12u miesięcy, t. i. od początku 3go mca aż do końca 14go. Uważaymy więc iak gdyby towarzystwo zawiązane było na początku 3go miesiąca a skończyło się na końcu 14go i obrachuymy iaki w tym czasie miał w handlu każdy ze spólników kapitał sprowadzaiąc go do iednakowego czasu.

Kapitał 1szego okaże się iakby miał 1132000zł. w handlu przez 1 miesiąc, 2go iakby 1060000, a 3go iakby 1200000.

Rozdzielony więc zysk cały proporcyionalnie do tych kapitałów, da działy odpowiadaiące 1od $35213,78\frac{374}{417}$, 2re $35345,92\frac{136}{417}$; 3e $39640,28\frac{224}{417}$zł.

Odiąwszy od każdego działu właściwe straty, znaydziemy na dział każdego spólnika z czystego zysku 100000zł. dla 1szego $30013,78\frac{374}{417}$zł. dla 2go $31345,92\frac{136}{417}$zł. dla 3go $38640,28\frac{224}{417}$ Gdy summa ułomków czyni 2 sełne, zaniechaymy ich dodaiąc po iedney sełney do działów 1szego i 3go przy których są ułomki naywiększe: będzie zatém na zysk spólnika 1szego 30013,79; 2go 31345,92; 3go 38640,29.

XII. Sprowadziwszy składki osób A i B do iednakowego czasu znaydziemy zysk osoby $B=11\frac{2}{3}$#. Ułożywszy zaś proporcyią 18# zysk osoby A: $21\frac{1}{3}$ zysku osoby C=540# kapitał osoby A rozmnożony przez liczbę miesięcy : x kapitału osoby C rozmnożonego przez liczbę miesięcy, znaydziemy ten ostatni=6400#. Że zaś sam kapitał 800# wiadomy, więc podzieliwszy przezeń 6400#, wypadnie 8 miesięcy. Popobnież ułożywszy proporcyią 18# zysku: $11\frac{2}{3}$# zysku=5400# kapitał rozmnożony przez liczbę mcy: x kapitału rozmnożonego przez liczbę mcy; znaydziemy 3500# kapitał osoby D rozmnożony przez liczbę mcy. Że zaś te wiadome, więc podzieliwszy niemi 3500# wypada kapitał szukany 800#.

XIII. Widoczna iest iż każdy oddział robotników powinien mieć wydzieloną sobie ilość sążni w prostym stosunku swéy liczby, a zdawaćby się mogło iż w odwrotnym odległości; podzieliwszy więc szczególne liczby robotników przez właściwe odległości, trzebaby rozdzielić 15600 sążni proporcyionalnie do liczb: $36\times\frac{4}{5}$, $25\times\frac{4}{7}$, $32\times\frac{4}{10}$ i $48\times\frac{4}{8}$ (nº 160);

czyli opuszczaiąc spólnego czynnika 4, do liczb $\frac{36}{5}$, $\frac{25}{7}$, $\frac{32}{10}$ i $\frac{48}{8}$ które sprowadzone do nayprostszego mianownika są $\frac{252}{35}$, $\frac{250}{35}$, $\frac{112}{35}$, i $\frac{210}{35}$. A pomiiaiąc znowu mianownika spólnego, zagadnienie sprowadziłbyśmy do rozdzielenia 15600zł. proporcyionalnie do liczb: 252, 250, 112 i 210. Wypadłoby zatém na robotników z 1széy wsi, $4770\frac{20}{103}$sąż. z 2éy $4733\frac{1}{103}$, z 3éy $2120\frac{40}{103}$, a na przybywaiących z 4éy $5975\frac{75}{103}$.

Lecz zastanowiwszy się nad tém zagadnieniem łatwo postrzeżemy, iż wyznaczyć się maiąca ludziom robota nie może być dzielona w stosunku odwrotnym odległości ich mieszkania od mieysca roboty. Wziąwszy bowiem równą liczbę robotników z 2ch mieysc np. z których iedno na 1 milę a drugie na 2 od mieysca roboty odległe, wypadałoby na pierwszych 2 razy więcéy sążni przeznaczyć niż na drugich, co widocznie byłoby niesprawiedliwie. Dosyć tu więc rozdzielić 1od w stosunku prostym liczbę wykopać się maiących sążni na oddziały robotników; potém zaś stosownie do szczególnych odległości iednym iąć drugim dodać wyrachowanych sążni, a to zważaiąc podług okoliczności czas potrzebny do przebycia drogi od mieysca mieszkania do mieysca roboty.

Poddaliśmy to zagadnienie dla tego, aby dać poznać, że iak w prostych rachunkach, tak tém bardziey w nieco zawikłanych bacznym być trzeba na drogę postępowania czyli idąc nią nie obłąkamy się, a zatém czyli nas dokładnie do celu prowadzi.

XIV. Sprowadziwszy ułomki $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, do iednakowego mianownika, są one między sobą iak $\frac{6}{12}$, $\frac{4}{12}$, $\frac{3}{12}$, zatém iak 6, 4, 3; iest więc proporcyia 13 : 24000 i t. d. znaydziemy odpowiedź: dla 1szego 11076 $\frac{12}{13}$zł. dla 2go $7884\frac{8}{13}$ a dla 3go $5538\frac{6}{13}$.

XV. Widzimy 1od iż dział B iest $\frac{4}{3}$ działu A; dział C $\frac{6}{5}$ działu B; dział zaś D iest $\frac{3}{2}$ działu C. Wyraziwszy więc pierwszy przez 1, 2gi będzie wyrażony przez $\frac{4}{3}$; 3ci będzie $\frac{6}{5}$ z $\frac{4}{3}=\frac{24}{15}$, a 4ty $\frac{3}{2}$ z $\frac{20}{11}=\frac{72}{30}=\frac{36}{15}$. Zagadnienie sprowadza się więc do podzielenia 24000zł. proporcyionalnie do liczb 1, $\frac{4}{3}$, $\frac{24}{15}$, $\frac{36}{15}$ czyli $\frac{15}{15}$, $\frac{20}{15}$, $\frac{24}{15}$, $\frac{36}{15}$, i t. d. Znaydziemy dział A=$3789\frac{9}{19}$; dział B $5052\frac{12}{19}$, dział C $6063\frac{3}{19}$, a dział D $9094\frac{14}{19}$.

XVI. Wiemy (n° 126) iż ułomek iest tém mniéyszy im większego ma mianownika przy iednakowym liczniku.

To założywszy, łatwo poiąć iż w tym razie maiątek trzeba podzielić proporcyonalnie do ułomków $\frac{1}{30}$, $\frac{1}{20}$, $\frac{1}{18}$, $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{10}$. Te sprowadzone do iednakowego mianownika są: $\frac{6}{180}$, $\frac{9}{180}$, $\frac{10}{180}$, $\frac{15}{180}$, $\frac{18}{180}$. Są więc między sobą iak liczby 6, 9, 10, 15, 18. Podzieliwszy 360 000zł. proporcyonalnie do tych liczb, będzie dla syna 1szego $37241\frac{17}{29}$, 2go $55862\frac{2}{29}$, 3go $62068\frac{28}{29}$, 4go $93103\frac{13}{29}$, 5go $11172\frac{4}{29}$zł.

XVII. Znalazłszy iż złotemu iednemu odpowiada zł. 0,2351096193951313424 (n° 358) znaydziemy iż pierwszy weźmie 2gi 15669,1144016 3ci 12682,2820432 4ty 11647,329584 5ty 10521,1546 6ty 29683,7916176 zł. 7my 1693,7295584, 8my 306,64248 9ty 1217867728.

XVIII. Osoba A dostanie $13\frac{1}{2}$, B $14\frac{1}{4}$, C $40\frac{17}{36}$; D $28\frac{2}{3}$, E $37\frac{17}{18}$ F $30\frac{1}{6}$. Traci więc ze swego długu A 27, B $28\frac{1}{2}$, C $80\frac{34}{36}$, D $57\frac{1}{3}$, E $75\frac{16}{18}$, F $6\frac{1}{3}$ co czyni na $\frac{0}{0}$. straty $66\frac{2}{3}$.

Karta 175 n° 372.

I. Cena grzywny przypadnie po $67\frac{23}{47}$zł.

II. Postępuiąc podobnię iak w poprzedzaiącém zagadnieniu znaydziemy próbę mieszaniny 14,16.

III. Średnia cena korca iest po $15\frac{7}{8}$zł.

IV. Ponieważ likwor za przylaniem wody ma być tańszy, a zatém w stosunku zniżonéy ceny powinno być go więcéy. Ilość zaś iego znaydziemy przez proporcyią;

zł. zł. gar. gar.
$3\frac{1}{3} : 4 = 100 : x = 120$gar.

nadmiar więc 120gar. nad 100gar. t. i. 20gar. iest szukaną liczbą garcy wody.

V. 2 korce zboża droższego, a 4 korce tańszego składaią mieszaninę po 10zł. korzec (n° 366).

VI. Podobnież znaydziemy iż 2 części droższego srebra a 4 tańszego, czyli $\frac{1}{3}$ droższego a $\frac{2}{3}$ tańszego srebra do każdéy grzywny brać potrzeba.

VII. Znaydziemy podobnym co wyżéy sposobem postępuiąc, że 12 części danego srebra a 2 miedzi, czyli 6 części srebra a 1 miedzi, dadzą srebro żądanéy próby. Do

21 łutów np. trzebaby wziąć 18 z pierwszego, a 3 z drugiéy.

VIII. Postępuię iak gdybym miał z danych gatunków zrobić mięszaninę ceny oznaczonéy i znayduię (n° 366). iż lepszego gatunku wchodzi w mieszaninę $\frac{4}{9}$ a podleyszego $\frac{5}{9}$.

IX. Uważaymy iak gdyby szło o ieden tylko metal np. złoto: porównawszy ilość iego średnią maiącą być w nowéy mieszaninie, z ilościami będącemi iuż w mieszaninach, znaydziemy.

$$90 \begin{cases} 95 \ldots 5 \\ 85 \ldots 5 \end{cases}$$

iż po równéy ilości z każdéy sztuki wziąć potrzeba, a zatém na 100 gram, weźmiemy po 50 z każdéy sztuki. Jakoż 50 gram z 1széy sztuki zawieraią 47,5 gram. złota, a 50 gram. z 2éy zawierać będą 42,5 gram. t. i. razem 90.

X. Porównawszy wyższe ceny z nayniższą, wypada mieszać po 25℔ naytańszego gatunku z 3℔ każdego z 3ch droższych gatunków.

XI. Szukam naprzód ile grzywien z każdego gatunku wziąć trzeba dla zrobienia mieszaniny po 50zł. grzywna.

$$50 \ldots \begin{cases} 60 \ldots 29 \\ 58 \ldots 4 \\ 46 \ldots 8 \\ 21 \ldots 10 \end{cases} \quad 51$$

a ułożywszy proporcyią:

$$51 : 34 = \begin{cases} 29 : x = 19\frac{1}{3} \\ 4 : y = 2\frac{2}{3} \\ 8 : z = 5\frac{1}{3} \\ 10 : v = 6\frac{2}{3} \end{cases}$$

znaydę, że trzeba wziąć $19\frac{1}{3}$ grzyw. z pierwszego gatunku, $2\frac{2}{3}$ grzy. z 2go; $5\frac{1}{3}$ z 3go; i $6\frac{2}{3}$ grzyw. z 4go.

XII. Trzeba naprzód znaleźć cenę cetnara. Podzieliwszy 630tal. przez 35cent. wypada na iloraz 18tal. Zresztą zagadnienie podług (n° 370) łatwo rozwiążemy i znaydziemy że mamy wziąć kruszczu 1go $17\frac{6}{12}$ cent. 2go $2\frac{11}{12}$; 3go $5\frac{10}{12}$ a 4go $8\frac{0}{12}$.

XIII. Podług nº 371 znaydziemy że trzeba wziąć $5\frac{5}{9}$ grzyw. na 29zł. $2\frac{7}{8}$ na 23zł. a $16\frac{6}{9}$ na 21zł.

XIV. Uważam iż 3℔ po 24gr. i funt na 28gr. uczynią 4℔ których wartość cała wynosi 100gr. a zatém funt 1 wypada na 25 gr. Podobnież 2℔ po 15 gr. i funt na 18gr. uczynią 3℔ których wartość razem wynosi 48 gr. a zatém funt 1 po 16gr. Zagadnienie więc sprowadzamy do tego: z towarów na 25gr. i na 16gr. funt, zrobić mieszaninę na 22gr. funt. Podług reguły znaydziemy iż trzeba wziąć 6℔ na 25gr. a 3℔ na 16gr. Idzie więc tylko o sprowadzenie rozwiązania do pierwszych warunków. Dla tego dzielę 6 na 2 części, z którychby iedna była potróyną względem drugiéy, iako to, $1\frac{1}{2}$, $4\frac{1}{2}$; a liczbę 3 na dwie części z których-by iedna była podwóyna względem drugiéy, iako to: 2 i 1; trzeba więc wziąć $1\frac{1}{2}$℔ z pierwszego gatunku, $4\frac{1}{2}$ z 2go, 2℔ z 3go i 1 funt z 4go.

XV. Gdy dane gatunki są wyższéy wartości niż ma być mieszanina, widzimy iż nie można zrobić żądanéy kompozycyi bez przybrania poślednieyszego od niéy gatunku. Do kompozycyi tego rodzaiu przymieszywa się pospolicie miedź która w tym razie za nic się uważa. Układam więc różnicę:

$$10 \ldots \begin{cases} 13 \ldots 10 \\ 11 \ldots 10 \\ 0 \ldots 3 \ldots 1 \end{cases}$$

Gdyby więc naczynie miało ważyć łutów 24; wzięlibyśmy pierwszego i drugiego gatunku srebra po 10 łutów a miedzi 4łut; lecz że ma ważyć funt 1 i 28 łutów czyli 60łut; układam więc proporcyią:

$$24 : 60 = \begin{cases} 10 : x = 25 \\ 10 : y = 25 \\ 4 : z = 10 \end{cases}$$

i znayduię, że trzeba wziąć z pierwszego i drugiego gatunku srebra po 25 łutów, a miedzi 10łut.

Karta 181 nº 381.

I. Przypuszczam iż liczba szukaną iest 7, ta podzielona przez 7 daie na iloraz 1, który rozmnożony przez 15 czyni 15; lecz powinno być 450, mówię więc: ieżeli 15 powstaie z 7, z czegóż powstaie 450? t. i. układam proporcyią 15 : 7=450 : x, x=210 iest liczbą szukaną, co łatwo iest sprawdzić:

II. Przypuszczam iż liczba lat iest 16, ta ze swoią połową czyni 24 od których odiąwszy część 4tą zostaie 18. Układam więc proporcyią, 18 : 16=90 : x. Wypada liczba szukana 80 lat.

III. Widzimy łatwo iż maiątek o który idzie, iest podzielny przez 3 i 5, i taki, że odiąwszy od niego część iego trzecią i dwie piąte, zostaie 32000zł. Przypuszczam więc liczbę 15; a odiąwszy od niéy $\frac{1}{3}$ i $\frac{2}{5}$ iéy części których summa iest 11; mam reszty 4; powiem zatém: ieżeli 4 powstaie z 15; z iakiéyże liczby powstaie 32000zł.? znaydę na odpowiedź 120000zł. które zupełnie odpowiadaią danym warunkom.

IV. Liczba szukana iest $272\frac{8}{11}$.

V. Oznaczywszy dział pierwszéy 1

dział drugiéy będzie . . . 2+7zł.

dział trzeciéy . . . . . 3+7—5zł.

razem . . . 6 działów +9zł.

równe 1000zł. odiąwszy więc 9zł. od 1000zł. i pozostałe 991zł. podzieliwszy przez 6, wypada na iloraz: dział pierwszéy osoby $165\frac{1}{6}$zł. a zatém dział drugiéy będzie $337\frac{2}{6}$zł. a dział 3éy $497\frac{3}{6}$zł.

VI. Przez podobne postępowanie iak w przykładzie poprzedzaiącym, znaydziemy dział 1széy osoby 5472, 2éy 16956; 3éy 8268; 4éy 16896; a 5éy 22368zł.

VII. Liczba szukana iest $54\frac{6}{11}$.

VIII. Zagadnienie to nie daie się rozwiązać przez regułę założenia poiedynczego. Przypuszczam więc naprzód, iż iedna z 2ch liczb niewiadomych iest 13 ażebym dodaiąc do niéy 11 miał 24 podzielne przez 4. W tém przypuszczeniu druga liczba byłaby 6, do któréy przydawszy 11 mam 17 zamiast 39 liczby potróyney względem 13, iak to być powinno podług drugiego warunku zagadnienia: ztąd wynika błąd pierwszy o mniéy, = 22. Przypuszczam 2re iż pierwsza liczba = 9 bym dodaiąc ią do 11 miał 20 podzielne przez 4, co daie 5 na drugą liczbę niewiadomą; do téy ieżeli dodam 11 będzie 16 zamiast 27 liczby potróyney

względem 9. Ztąd wynika błąd drugi także o mniéy, = 11. Nakoniec postąpiwszy podług n° 379 znaydziemy że pierwsza liczba iest 5, a druga 4.

IX. Odp. robił przez dni 46, a próżnował przez dni 14.

X. Przypuszczam iż beczka wina kosztuie 5otal. 2 beczki zatém które dał pierwszy kupiec kosztowały 100tal. lecz że mu zwrócono 40tal. pozostaie 60tal. które zapłacił za cło i sprowadzenie 20 beczek wina. Mówię teraz: ieżeli od 20 beczek zapłacono 60tal. ileż wypada od 64? czwarty wyraz proporcyi okazuie mi 192tal. Że zaś kupiec drugi dał 5 beczek wina które podług przypuszczenia kosztuią 250tal. i nadto 40tal. t. i. razem 290tal., więc różnica czyli błąd iest 98tal. więcéy.

Założywszy iż beczka wina kosztowała 60tal. znaydziemy znowu podobną różnicę o 84tal. więcéy. Postępuiąc nakoniec podług n° 380 znaydziemy cenę beczki 120tal.

XI. Przypuszczam iż ogród kupiono za 100zł. lecz w tym razie przedawszy go za 100—18 wziętoby 82zł. zamiast 7298zł. układam więc proporcyią, 82 : 7298=100 : x; a 4ty wyraz 8900zł. iest ceną szukaną.

XII. Przypuszczam iż iest kapitał 100zł. trzyletni iego procent iest 13zł. lecz przypuszczenie iest fałszywe, bo na końcu 3ch lat miałbym tylko 113zł. powinienem zaś mieć 7797zł. Układam zatém proporcyią 13, 100=7797 : x, które=5997$6\frac{12}{13}$zł. okaże kapitał szukany.

XIII. Uważać należy 320# iako resztę z liczby z któréy $\frac{1}{5}$ i $\frac{1}{4}$ iéy części są odięte. Przypuściwszy iż ta liczba iest 12 odeymiymy od niéy wzmiankowane części, zostaie 5 na składkę osoby pierwszéy, a powinno zostać 320; ułożę więc regułę trzech 5 : 12=320 : x które=768#; $\frac{1}{3}$ téy liczby iest 256, a $\frac{1}{4}$ iest 192 i reszta zostaie się 320#. Maiąc zaś wiadomą iuż składkę każdéy osoby, znaydę łatwo iż 1sza weźmie z zysku $41\frac{2}{3}$, 2ga $33\frac{1}{3}$ a 3cia 25#.

XIV. Przypuszczam iż 1sza szuka kosztowała 1#, 2ga 2#, 3cia 3# i t. d. ostatnia zatém kosztowałaby 12# a wszystkie razem kosztowałyby 78#, lecz ztąd wypada 18# mniéy niż być powinno; przypuszczam iż 1sza sztuka kosztowała 2#, druga 3# i t. d. ostatnia 13#, a wszystkie razem 90#, lecz i tak wypada mniéy 6# niż być powinno. Postępuiąc iuż podług reguły (n° 379), znaydę iż 1sza sztuka kosztowała $2\frac{1}{2}$#, zatém 2ga $3\frac{1}{2}$, 3cia $4\frac{1}{2}$ i t. d. ostatnia $13\frac{1}{4}$.

Karta 201 n° 418.

I. Znaydziemy log. 2ch. odeymuiąc log. 5ciu od log. 10ciu; log. 4ch podwaiaiąc log. 2ch, a potraiaiąc go otrzymamy log. 8iu które iest sześcianém 2ch. Dodaiąc log. 2ch do log. 3ch mieć będziemy log. 6ciu; a mnożąc log. 3ch przez 2 otrzymamy log. 9ciu.

II. Logarytmy szukane są:

1) 5.8970071 (n° 402).
2) 3.6948455.
3) 3.1842939.
4) —o.0579920.

III. Liczby szukane są:

1) 88935000 (n° 408 i t. d.)
2) 5319119,23
3) 3,493;
4) Odiąwszy log. dany od liczby 5, czyli wziąwszy dopełnienie arytmetyczne liczby 5, logarytm pozostały 3.260638 wpada między logarytmy liczb 18223 i 18224. Ułomek więc szukany iest 0,18224.

IV. Log. liczby 0,17 iest—0.769551 (n° 406) mnożę, go przez 5 i mam na iloczyn—3.847755. Odeymuię ten log. od 6 czyli od 6.000000 co mi daie 2,152245 (n° 414). Przydaię 2 do cechy tego logarytmu i szukam iakiéy liczbie odpowiada w tablicach log. 4,152245. Wpada on między liczby 14198 i 14199; biorę 14198 iako liczbę która się naywięcéy zbliża do odpowiedzenia logarytmowi 4.152245, i mam liczbę 141,98. Lecz że log. odiemny—3847755 odiąłem od 6 całkowitych czyli rozmnożyłem go przez 1000000 więc tak rozmnożony należy do liczby 1000000 razy większéy, aby więc sprowadzić do prawdziwéy ważności znalezioną liczbę 141,98 trzeba napisać 0,00014198 (n° 413).

V. Podług n° 396 znaydziemy

1) iż log. szukanego ilorazu iest 0,145731; ten z powiększoną cechą o 4 iedności odpowiada w tablicach liczbie 13987; więc iloraz szukany iest 1,3987. Podobnież

2) log. —0,1312789 odiąwszy od 5, reszta odpowiada w tablicach liczbie 73913, zatém iloraz szukany iest 0,73913.

VI. Pierwiastki szukane są:

1) 141, 2) trzecia część logarytmu liczby 97666 iest 1,6632474 logarytmem pierwiastku szukanego, log. ten z cechą 4 znayduie się w tablicach odpowiadaiący nayblizéy liczbie 46052 którą sprowadzaiąc do ważności podług cechy prawdziwéy, będzie 46,052 pierwiastkiem szukanym. Podobnież

3) Pierwiastek czwarty liczby 364 znaydziemy 4,367; a

4) Pierwiastek siódmy liczby 5 znaydziemy 1,2585.

5) Potroiwszy log. 3. 758609 liczby 5736, będzie 11,275827 log. iéy sześcianu; piąta część tegoż logarytmu iest 2,255165 logarytmem pierwiastku szukanego. Log. ten z cechą zwiększoną o 2 iedności, wpada między logarytmy liczb 17995 i 17996. Pierwiastek szukany iest więc 179,95 mniéy niż o iednę setną zbliżony.

VII. 1) Aby mieć stosunek szukany trzeba podzielić 1166400 przez 25 a z ilorazu wyciągnąć pierwiastek szósty. (n° 298). Biorę więc logarytmy tych liczb, a odiąwszy log liczby 25 od log. 1166400 będę miał log. 4,6689075 ich ilorazu. Szósta część tego logarytmu 0,7781512 iest logarytmem stosunku szukanego. Logarytm ten odpowiada w tablicach liczbie 6, która iest stosunkiem żądanym.

Podobnież 2) log. liczby $2\frac{2}{3}$ odięty od log. liczby $5\frac{3}{4}$ daie log. 0,333699 ich ilorazu; piąta część iego 0,066740 iest logarytmem stosunku szukanego. Log. ten z cechą zwiększoną o 4 iedności odpowiada liczbie 11661 która sprowadzona do prawdziwéy ważności podług cechy, iest 1,1661: i ten iest stosunek szukany. Dla otrzymania średnich szukanych trzeba tylko rozmnożyć pierwszy wyraz $2\frac{2}{3}$ przez 1,1661; następnie iloczyn przez 1,1661; i tak d. Lecz i to działanie za pomocą logarytmów można ułatwić dodaiąc następnie log. stosunku do log. pierwszego wyrazu. Szukaiąc tym sposobem liczb odpowiadaiących w tablicach, będą wypadki następuiące:

	Średnie odpowiadaiące
Log. liczby $2\frac{2}{3}$ 0,4259687	
Więcéy log. stosunku . . . 0,4927085	3,109
Więcéy 2 razy log. stosunku 0,5594483	3,626
Więcéy 3 razy log. stosunku 0,6261881	4,228
Więcéy 4 razy log. stosunku 0,6929279	4,931

VIII. Wiemy z rozwiązania zagadnień n° 338 iż w tym razie trzeba rozmnożyć 100 000zł. $\times(\frac{21}{20})^{10}$. Uskuteczniamy za pomocą logarytmów w ten sposób:

log. 21 = 1,3222193
log. 20 = 1,3010300

więc log. $\frac{21}{20}$ = 0,0211893

logarytm ten 10 razy wzięty będzie logarytmem $(\frac{21}{20})^{10}$ = ... 0,2118930
dodawszy log. 100 000cy . . . 5,0000000

będzie . . . . . 5,2118930 logarytm szukanego kapitału; gdy zaś liczba odpowiadaiąca temu logarytmowi składa się z 6 cyfer; znaydziemy ią podług n° 410=162 889,473. Więc 162889zł.,473 są ważnością szukaną.

IX. Wiemy iż trzeba podzielić 162 889zł.,473 przez $(\frac{21}{20})^{10}$; co uskuteczniemy tak:

log. liczby 162 889,473 iest 5,211 8930 (n 402)
odiąwszy od niego log. $(\frac{21}{20})^{10}$ 0,211 8930

zostaie log. . . . . 5,000 0000 szukanego kapitału pierwiastkowego; logarytm zaś ten iest logarytmem 100 000cy, więc, i t. d.

X. Gdy 5 iest dwudziestą częścią ze 100, ieżeli oznaczymy kapitał przez 1, zwiększy się on przez przydanie procentu na końcu roku o $\frac{1}{20}$, a zatém będzie wyrażony przez ułomek $\frac{21}{20}$. Na końcu zaś roku 2go wyrażenie iego będzie $\frac{21}{20}\times\frac{21}{20}$ czyli $(\frac{21}{20})^2$; na końcu r. 3go będzie $(\frac{21}{20})^3$; i t. d. (n° 338). Ztąd widzimy iż kapitał na końcu każdego r. zwiększa się podług postępu ilorazowego którego pierwszy wyraz iest 1, stosunek $\frac{21}{20}$, a wyrazem ostatnim ma być 2. Idzie więc o liczbę wyrazów. Że zaś ostatni postępu wyraz = stosunkowi wyniesionemu do potęgi oznaczonéy liczbą wyrazów zmnieyszoną o iedność (n° 296), a właśnie ta liczba = liczbie lat przez ile dany kapitał zostać ma na procencie ażeby został podwoiony: oznaczywszy więc pomienioną liczbę wyrazów przez n, będzie $(\frac{21}{20})^n = 2$ a działaiąc przez logarytmy, iest n razy log. $\frac{21}{20}$ ch. = log. 2ch, czyli $n\times$log. $\frac{21}{20}$ch = log. 2ch; zatém $n=\frac{\text{log. } 2^{ch}}{\text{log. } \frac{21}{20}^{ch}}$ (n° 96); log. 2ch iest 0,3010300, log. $\frac{21}{20}$ch iest 0,0211893;

więc $n = \frac{0,30103000}{0,00211893}$. Gubiąc przecinek w dzielnéy i dzielniku t. i. powiększaiąc oba wyrazy ułomku 10 milionów razy i uskuteczniaiąc dzielenie $\frac{30103000}{2111893}$, znaydziemy iloraz szukany 14lat 2mce 14dni.

XI. Gdy uciągnięto z beczki 1szy garniec za który dolano wody, stopień czystości wina zmienił się na $\frac{199}{200}$ swego pierwiastkowego stanu, który oznaczamy przeziedność. Aby znaleźć co zostanie po 2iém działaniu zważmy iż stopień czystości wina zmienia się w tym samym sposobie; zróbmy więc proporcyią $1 : \frac{199}{200} = \frac{199}{200} : x = (\frac{199}{200})^2$ Liczba ta wyraża stopień czystości wina po 2ém działaniu. Zrobiwszy ieszcze $1 : \frac{199}{200} = (\frac{199}{200})^2 : z$, będzie $(\frac{199}{200})^3$ na stopień czystości wina po 3ciém działaniu i t. d. Zatém moc wina czyli stopień iego czystości zmnieysza się za każdém uciągnięciem garca podług postępu ilorazowego którego pierwszy wyraz iest 1, stosunek $\frac{199}{200}$ a wyraz ostatni $\frac{4}{5}$. Idzie tylko o liczbę wyrazów (nº 296) która zmnieyszona o 1, = liczbie garcy uciągnąć się maiących dla sprowadzenia wina do $\frac{4}{5}$ pierwiastkowéy iego czystości. Oznaczywszy pomienioną liczbę wyrazów przez n, będzie $(\frac{199}{200})^n = \frac{4}{5}$, a zatém $n \times \log. \frac{199}{200}^{ch} = \log. \frac{4}{5}^{ch}$; $\log. \frac{199}{200}^{ch}$ iest — 0,0021769; $\log. \frac{4}{5}$ iest = 0,0969100. Lecz że równość między ilościami odiemnemi, iest także między niemi gdy się staną dodatne: będzie $n \times 0,0021769 = 0,0969100$; więc $n = \frac{0,0969100}{0,0021769}$, uskuteczniaiąc dzielenie znaydziemy $44\frac{113}{288}$, t. i. prawie $44\frac{1}{2}$. Jakoż gdyby chciano zrobić pomienione działanie od razu, potrzebaby było utoczyć z beczki piątą część z 200 garcy która iest 40, lecz że podług zagadnienia ulatcza się zawsze i część wody którą dolewaią w beczkę, zatém widoczna iest, że liczba razy, ile maią powtórzyć działanie powinna być większa niż 40.

XII. Aby rozwiązać dane zagadnienie trzeba znać tę prawdę, że gęstość powietrza iest tém mnieyszą im obiętość któréy odpowiada taż sama ilość tego płynu, iest większa; a zatém, ieżeli zwiększamy obiętość któréy odpowiada dana massa powietrza bez wpuszczania powietrza nowego, zamknięte rozszerzać się będzie przez skutek naturalnéy swoiéy sprężystości w stosunku zwiększenia obiętości iemu odpowiadaiącéy.

To założywszy, oznaczam przez 1, gęstość powietrza w stanie naturalnym i takim iak się znayduie pod dzwonem powietrzo-ciągu przed zaczęciem działania. Za pierwszém opuszczeniem stępla obiętość któréy odpowiada massa powietrza zamkniętego pod dzwonem, będzie zwiększona w stosunku 8 do 9, a zatém gęstość iego będzie zmnieyszona w stosunku 9 do 8, t. i. iż stosunek gęstości powietrza w stanie naturalnym do gęstości iego za pierwszém opuszczeniem stępla iest iak $1 : \frac{8}{9}$. Ażeby wiedzieć iaki będzie ten stosunek po 2ém opuszczeniu stępla, zróbmy proporcyią $1 : \frac{8}{9} = \frac{8}{9} : x = (\frac{8}{9})^2$. Za 3ciém opuszczeniem stępla będzie $(\frac{8}{9})^3$, i t. d. podług wyrazów postępu ilorazowego którego pierwszym wyrazem iest 1, stosunek $\frac{8}{9}$, a wyrazem ostatnim ma być $\frac{1}{60}$. Liczbę wyrazów tego postępu zmnieyszoną o 1, t. i. liczbę ile razy trzeba opuścić stępel ażeby gęstość powietrza była zmnieyszona 60 razy, znaydziemy, postępuiąc iak w poprzedzaiących zagadnieniach, $34\frac{8}{11}$ blisko, t. i. ieżeli machina iest dobrze urządzona, po 35 opuszczeniach stępla można być pewnym iż powietrze pod dzwonem iest 60 razy rzadsze niż w stanie naturalnym.

XIII. Wypada logarytmy wyrazów średnich dodać a logarytm skraynego wiadomego odiąć, lub też dodać iego dopełnienie arytmetyczne (nº 415).

Logarytm liczby $1528\frac{4}{5}$ czyli $\frac{7644}{5}$ iest 3,1843507; ten 4 razy wzięty iest	12,7374028
log. 217^{u}	2,3364597
dopełnienie arytmetyczne logarytmu 3478 .	6,4586704
połowa logarytmu liczby 80000 iest 2,4515450 a iego dopełnienie arytmetyczne	7,5484550
Summa	29,0809879

Gdy tu były dwa dopełnienia arytmetyczne, odeymuię 20 z cechy; pozostały log. 9,0809879 z cechą zmnieyszoną o 5 iedności odpowiada zupełnie (oprócz ostatniéy cyfry na którą nieuważamy) liczbie 12050 którą sprowadzaiąc do prawdziwéy ważności podług cechy, będzie (nº 409) liczba 1 205 000 000 4tym wyrazem szukanym.

XIV. Działaiąc przez logarytmy, będzie $l. \frac{2}{3} + l. \frac{5}{7} + \log. \frac{4}{11} = l. 2 + l. 5 + l. 4 - l. 3 - l. 7 - l. 11$. Uskuteczniaiąc znaydziemy:

l. 2^{ch} = 0,30103
l. 5 = 0,69897
l. 4 = 0,60206
dopełnie. arytm. l. 3 = 9,52288
dopełnie. arytm. l. 7 = 9,15490
dopełnie. arytm. l. 11 = 8,95860

29,23844

Gdy są trzy dopełnienia arytmetyczne, cecha iest za wielka o 30 iedności (*ob.* przypis. pod nº 415); odeymuiąc 26 od cechy, będzie 3,23844 na logarytm liczby ieszcze dziesięć tysięcy razy większéy niż ułomek szukany, liczba ta zawiera się między 1731 i 1732, będzie zatém $\frac{2}{3}\times\frac{5}{7}\times\frac{4}{11}=0,1731$ zbliżone do dziesięciotysiącznych części.

XV. Matematyk przyiął rozwiązanie bez żądania wygranéy i rzekł: doday 6526zł. do ważności twoich luidorów, odeymiy od wypadku 10000, reszta będzie nadmiarem twoich luidorów, nad summę 3474zł. Sprawdzaią i znayduią iż tak iest w istocie. Zagaduiący był na to zdumiany, nie znał bowiem własności dopełnień arytmetycznych.

Mógłby był matematyk kazać sobie powiedzieć summę wypadaiącą po dodaniu 6526zł. która daymy iżby była 24478zł. a natychmiast wyraźnieby widział iż 14478zł. iest szukanym nadmiarem, a 17952zł. całą summą znayduiącą się w kiesie luidorów.

ZNACZNIEYSZE OMYŁKI W DRUKU.

Karta	17	wiersz	29	set	popraw	tysięcy
—	18	—	31	12	—	2
—	20	—	22	iloczynów	—	ilości
—	22	—	15	684,249	—	684249
—	27	w przedostat.		995	—	985
—	30	—	2	37	—	57
—	33	—	27	496	—	495
—	36	—	12	397	—	398
—	42	w 3 od końca		012....	—	0,12.....
—	49	—	1	$\frac{15}{12}\cdots\frac{2}{5}$	—	$\frac{5}{12}\cdots\frac{2}{3}$
—	50	w ostatnim		$\frac{5}{12\overline{1}}$	—	$\frac{9}{12\overline{1}}$
—	75	—	4	5,55...	—	0,55...
—	80	—	12	do	—	od
—	108	—	11	680....	—	620...
—	—	—	12	900	—	9000
—	119	—	8	(2+5)	—	(2×5)
—	132	—	5	30	—	50
—	134	—	1	x'	—	x'=
—	137	w 1 w zagad.		$\frac{5}{6}$	—	$\frac{5}{8}$
—	139	—	23	15	—	13
—	144	—	25	1884 : 1909,9	188,4 : 190,99	
—	154	w 5 i 6 od końca		$1466\frac{1}{2}$	—	$1406\frac{11}{12}$
—	164	—	18	$\frac{200}{3}$	—	$\frac{200}{4}$
—	167	w 19		5000	—	50000
—	176	30	24		—	34
—	—	w ostatnim		3500	—	35
—	177	w 14		drugiego	—	trzeciego
—	212	16		155274;	—	155274,

TABLICE METROLOGICZNE

OBEYMUIĄCE

I. MIARY LINIIOWE CZYLI DŁUGOŚCI
II. MIARY KWADRATOWE C. POWIERZCHNI,
III. MIARY SZEŚCIENNE C. OBIĘTOŚCI,
IV. MIARY CIĘŻKOŚCI C. WAGI,
V. MIARY WARTOŚCI C. MONET,

niektórych Miast i Kraiów Europeyskich; tudzież

VI. PODZIAŁY NOWYCH MIAR KRAIOWYCH I STOSUNKI ZBLIŻONE TYCHŻE MIAR Z DAWNEMI POLSKIEMI.

I. MIARY LINIIOWE

1. STOPY I ŁOKCIE WYRAŻONE W MILIMETRACH.

m. znaczy miarę mnieyszą w. większą.

NAZWISKA MIEYSC	MILIMETROW	
	STOPA.	ŁOKIEĆ.
Altona *obacz* Hamburg		
Akwisgran (Aachen)	282,	667,72
Amszterdam . .	283,	690,28
łok. flamandzki		710,58
Anglia	304,7	
Yards		m. 914,74
Ells		w.1143,48
Anszpach i Bayreyt	297,76	m.584,29 w.600,64
Antwerpia . . .	284,23	m. 684,42 w. 694,34
Augszpurg . . .	296,17	m. 592,38 w. 609,52
Bawaria od 1811. r.	291,86	835,01
Bazylea	298,2	
braccio .		544,10
aune . .		1179,35
Berlin od r. 1816. we wszyst: Prowin: Pruskich stopa reńska	313,85	667,71
Bern	m. 293,33 w. 317,69	541,71 691,41
Brabancya ob: Antwerpia		
Bremen	289,2	578,4
Brunszwik . . .	285,	570,72
Bruxella ob. Antw.		
Dania	313,62	627,68
Florencyia i w całey Toskanii od r. 1781. *braccio* = $\frac{1}{4}$ *canna* = . . .		594,18
Francyia dawn. stopa Paryzka = $\frac{1}{6}$ sążnia *(toise)*	324,7	
aune . .		1188,37
teraznieyszy *metr.*		1000,
Frankfurt nad Menem	284,6	547,28
Freyburg . . .		566,65
Gandawa *(Gent)* łok: zwyczayny iak w Lowanium		
łok. do płótna		725,01
Geldryia		670,4

NAZWISKA MIEYSC	MILIMETROW	
	STOPA.	ŁOKIEĆ.
Genewa *(Genf)* .	487,94	1143,7
Genua, *palmo* . .		249,83
Görlica		563,2
Haga	iak daw: Paryz:	iak daw: Amszt:
Hamburg . . .	286,49	572,97
Hannower . . .	292,99	583,98
Heidelberg w Badeńskim	278,59	558,65
Hiszpania . . .	282,66	836,6
Hollandyia ob. Amszt.		
Holsztyn ob. Hamb.		
Inflanty ob. Ryga		
Karlsbad . . .		w. 677,2 m. 591,7
Karlsruhe . . .	291,1	555,
Kassel	284,9	569,4
Kliwiia	295,51	łok. koloń: lub berliń. 558,09
Koblenc		
Kolonia nad ren. .	287,59	575,19
Kraków	356,41	616,98
Leodyum (Lütich, *Liege)*	287,62	551,55
Leyden	313,2	683,06
Linc obacz Wiedeń		
Lipsk . . zwyczayna budownicza	282,65 282,72	565,2
Litwa	iak daw: Paryz:	649,68
Liworno ob. Florencyia		
Lowanium (Löven)	285,66	w. 694,34 m. 684,41
Lubeka	291,	577,04
Luka	589,91	*brac* 595,09
Luneburg ob. Brunszwik		
Luxemburg ob. Antwerp.		
Manheim ob. Heidelberg		
Mantua, *braccio* .		643,81
Mechlin	279,71	iak m. Low:
Medyiolan . . .	397,02	*brac* 586,51
braccio do wełny		675,4

NAZWISKA MIEYSC	MILIMETROW		NAZWISKA MIEYSC	MILIMETROW	
	STOPA.	ŁOKIEĆ.		STOPA.	ŁOKIEĆ.
Meklenburg ob. Lubeka			Rotterdam . . .	312,43	iak Amszt.
			Ryga	274,8	548,16
Modena	517,71	*brac* 648,09	Rzym . . stopa daw:	294,61	*brac* 634,79
Moguncyia (Werkfuss	291,5	551,18	*palmo* do budowli	223,33	*can* 2001,55
Kameralfuss) .	187,5		Sardyniia, *palmo* .	248,36	*raso* 549,29
Namur ob. Geldryia			Salcburg, łok. do iedwabiu		800,84
Naumburg ob. Lipsk			łok. do płótna		1005,64
Neapol *palmo* . .	262,8		Saxonia ob. Lipsk		
canna . .		2112,	Stralsund ob. Lubeka		
Neyszatel . . .	300,	1127,	Sycyliia	242,05	
Nimega ob. Geldryia			*canna* iak w Neapol:		
Norwegia ob. Dania			Szafhauzen . . .		603,43
Norymberga . .	303,86	656,44	Szląsk Austryiacki	289,42	578,4
Oldenburg ob. Bremen			Sztuttgard ob. Wirtemberg		
Osnabrug . . .	279,27	w. 601,62			
		m. 583,35	Szwecyia . . .	297,1	593,73
Ostenda		699,3	Toskaniia ob. Florencyia		
Padwa	428,38				
braccio do iedwabiu		641,57	Trewir ob. Koblenc		
dito do wełny		679,92	Tryiest łok. do iedw.		640,65
Piemont *liprando* .	514,4		łok. do wełny		675,84
raso	iak daw. łok.	Polsk. koron.	Turcyia, *pik* w. .		669,08
Polska, dawne koron:	297,77	595,54	dit. m. .		647,87
nowe od początku r.			Turyn, stopa zwyczay:	342,43	*raso* 603,2
1820	288,	576,	stopa wielka	513,65	
Portugaliia *palmo* .	218,6		Tyrol Hrabstwo .	334,11	804,14
varas .		1092,94	Ulm	288,97	568,46
Praga w Czech: ob. Wiedeń			Węgry ob. Wiedeń		
			Wenecyia . . .	347,4	
Prezburg ob. Wiedeń			*braccio* do iedwab.		688,39
Prusy ob. Berlin			dit. do wełny		684,41
Raguza		513,2	Werona	340,63	
Ratyzbona (Regensburg)	313,56	810,97	*braccio* do iedwab.		648,55
		w. 584,26	dit. do wełny		657,12
Rawenna *braccio* .		m. 578,85	Wiedeń i w całéy Austryi	316,	779,16
Reńska *stopa* . .	313,85		iednak w Austr. wyższey		799,68
Rossyia	354,1		Wirtemberg . .	286,46	614,24
Pospolicie teraz używaią stopy angielsk: lub reńskiéy.			Wirtzburg . . .	294,42	588,84
			Wizmar ob. Hannow.		
arszyn = 16 *werszk.*		711,48	Zurych	300,93	601,86
Roszlok ob. Lubeka					

2. MIARY DROŻNE,

których długość odniesiona iest do długości stopnia południka ziemskiego podług dawnego podziału okręgu.

NAZWISKA MIEYSC.	NA I. STOPIEŃ POŁUD:	NAZWISKA MIEYSC.	NA I. STOPIEŃ POŁUD:
Angliia . . . mil rządowych	69,33	Neapol	57,71
dit. pospolitych	73,	Niemcy ieograficznych . .	15,
dit. morskich .	60,	małych	17,75
dit. *leagues* .	20,	wielkich	12,
Anszpach i Bayreyt . . .	13,	Polska dawnych dużych .	15,
Austryia . . . pocztowych .	14,65	mniéyszych c. morskich	20,
Bawarya mil małych. . .	14,15	nowych .	13,05
dit. wielkich . .	8,69	Portugaliia	w. 15,
Brabancyia	20,		m. 18,
lieues .	25,	Prusy	14,37
Brunszwik Luneburg. . .	10,51	Reńskich mil	14,76
Czechy mil wielkich . . .	12,	Rossyia . . . *werszt* . .	104,3
dit. małych. . .	16,12	Rzym	74,7
Daniia (prawie iak reńskie)	14,77	Saxoniia	12,3
Francyia *lieues*	25,	Szkocyia	w. 50,
morskich mil . .	20,		m. 61,
Flandryia, większe iak reńskie;		Szląsk	17,18
mniéyszych . .	25,	Szwabiia	12,
Hamburg	20,	Szwaycaryia	w. 13,3
Hessyia	11,29		m. 15,06
Hiszpania	26,63	Szwecyia.	10,4
Hollandyia	19,66	Turcyia . . . *berri* . .	66,66
Irlandyia	40,	morskich .	84,68
Litwa	w. 12,44	Ukraina	12,
	m. 20,	Węgry	13,33
Lombardyia	67,25	Westfaliia	10,
Luxemburg	28,	Włochy	60,

II. MIARY KWADRATOWE

KTÓRYCH POWIERZCHNIA WYRAŻONA IEST W ARACH.

NAZWISKA MIEYSC.	LICZBA ARÓW.	NAZWISKA MIEYSC.	LICZBA ARÓW.
Anglia *acre* = 160 prętów □	40,494	Lipsk *morg* = 300 prętom .	55,132
Anspach *morg* = 360 dit. .	45,965	Litwa dit. = dit.	71,228
Antwerpiia *bunder* = 400 dit.	130,291	Liworno *ob.* Toskaniia . .	
Austryia *ob.* Wiedeń.		Magdeburg *ob.* Berlin	
Auszpurg *iauchart* . . .	24,588	Meklenburg *morg* = 300 pręt.	65,036
Bawaryia dit.	34,074	dit. 200 pręt.	43,357
Bazylea dit. = 140 pręt.	31,873	Neapol *moggio*	33,431
Berlin *morg* Magdeb. = 180 pręt. reńs. .	25,532	Norymberga *morg* = 200 pręt. *acker* = 160 pręt.	47,275 21,274
Bern *iauchart* pola . . .	34,399	Polska *morg* = 300 prętom no-	
dit. łąki . . .	30,099	wéy miary . . .	56,15
dit. lasu . . .	37,599	dit. dit. starey miary	59,839
dit. mały . . .	27,519	Pomeraniia dit. dit. . .	65,51
dit. naymniéyszy	26,991	Prussy *ob.* Berlin	
Brunszwik *morg* = 120 pręt.	25,02	Reński *morg* pola = 120 pręt.	17,032
Chełmno dawnéy miary *morg* = 300 prętów . . .	56,034	dit. lasu = 160 pręt. *iauchart* = 60 prętom	22,695 8,516
nowéy miary dit. .	57,796	Rossyia *diesiatyna* . . .	145,698
Daniia *beczka wysiewu* . .	55,471	Saxoniia *ob.* Lipsk.	
Francya *arpent roy.* daw. miar.	51,072	Szkocyia *acre*	51,493
ar nowéy miary . . .	1,	Szwecyia *beczka wysiewu* .	49,352
hectar dit.	100,	Toskania *saccato* = 10 *staioli* = 660 *pertice* . .	55,783
Gdańsk *morg* = 300 prętom	55,555	Węgry *ob.* Wiedeń.	
Genewa *morg*	51,663	Wenecyia *passo* = 25 stóp □	0,03018
Gotha *acker*	21,078	Wiedeń *ioch* czyli *iochart* .	57,583
Hamburg *morg* = 600 prętom	96,522	Wirtemberg *morg* = 384 pręt.	
korzec wysiewu .	42,024	= $\frac{2}{3}$ *iuchart*	31,518
Hannower *morg* = 120 prętom	26,014	Zurych *iauchart* pola . .	32,404
Hiszpaniia *fanego*, 4900 *varas*	35,287	dit. lasu . .	36,004
Hollandyia *morg* = 600 prętom	81,268	dit. łąki . .	28,804
Irlandyia *ob.* Angliia			

III. MIARY SZESCIENNE

(DO CIAŁ SUCHYCH I CIEKŁYCH)

których obiętość wyrażona iest w Litrach.

NAZWISKA MIEYSC I MIAR.	DO CIAŁ SUCHYCH.	DO CIAŁ CIEKŁYCH.
	ZAWIERAIĄ LITRÓW.	
Akwisgran 1 *fass* (beczka) = $\frac{1}{6}$ *malter*	24,687	
kanne do piwa = $\frac{1}{104}$ beczki		1,132
dit. do wódki		1,07
dit. do wina		1,065
Altona 1 *sak* = 2 szeffel = 4 *fass*	210,7418	
stübchen = $\frac{1}{32}$ *tonne* (beczki)		3,6412
Amszterdam *sak* = $\frac{1}{30}$ łasztu	81,072	
mingel $\frac{1}{180}$ oxeftu		1,19019
Anszpach i Bayreyt . . . *simra* do twardego ziarna	338,502	
dit. do owsa	624,132	
maass $\frac{1}{60}$ *eymer* (wiadra)		1,3558
Antwerpiia *viertel* $\frac{1}{65}$ łasztu	76,717	
stoop = $\frac{25}{1252}$ both = $\frac{1}{50}$ *ahm*		3,174
Auszpurg *szaff* = 8 metzen	205,238	
do wina *maas* $\frac{1}{7068}$ *fuder*, $\frac{1}{448}$ *muids*		1,428
Baden *obacz* Karlsruhe.		
Bawarya *schaff* czyli *scheffel* twardego zboża = 6 metzen		
dit. do owsa = 7 metzen 1 metze	37,104	
maass $\frac{1}{60}$ *eimer* = 4 *quartel*		1,06903
Bazylea . . *müdde* czyli *szeffel* = $\frac{1}{8}$ *sack*	16,127	
do wina: *ohm* = $\frac{1}{3}$ *saum* = 96 dawn. = 120 now. *polt*		129,016
Berlin 1 *last* = 3 *winspel* (lecz do owsa i ięczmienia tylko 2 wins.) *winspel* = 2 *malter* = 24 *scheffel*.		
1 *scheffel* = 16 *metzen*	54,727	
do wina: *fuder* = 4 *oxhoft* = 6 *ohm* = 12 *eymer* = 24 *anker* = 768 *quart*. 1 *quart*		1,1703
Bern *maess* = $\frac{1}{12}$ *mütt* = 48 *Imni*	14,011	
maass czyli *pinte* $\frac{1}{25}$ *eymer*		1,670
Brunszwik *himt* = $\frac{1}{40}$ *scheffel* = $\frac{1}{10}$ *wispel*	31,044	
stübchen = 4 *quartier* = $\frac{1}{40}$ ahm		3,6762
Bruxella iak Antwerpiia.		
Chełmno *korzec dawny*	54,4112	
stof $\frac{1}{100}$ beczki		1,3885
Florencyia *staja* = $\frac{1}{3}$ *sacco* = 4 *quarti*	23,684	
do wina: *barillo* = 20 *fiaschi* = 40 *bocali*		41,656
Francyia daw: miary *boisseaux* = $\frac{1}{12}$ *setier* = 16 picotins	31,0126	
pinte = $\frac{1}{72}$ *quartauts* = $\frac{1}{144}$ tiercon		0,9313
nowa miara *ster* czyli *kilolitr*	1000,	
hectolitr (setier)	100,	
decalitr (boisseaux, velte)	10 iako boiss.	10iako velt

NAZWISKA MIEYSC I MIAR.	DO CIAŁ SUCHYCH	DO CIAŁ CIEKŁYCH
	ZAWIERAIĄ LITRÓW.	
litr (pinte)	1,	
Frankurt nad Menem: *simmer* = $\frac{1}{4}$ *malter* = 2 metzen .	28,683	
viertel = 80 dawnym a 90 nowym *maass*		143,4176
Gallicyia Austryiacka . . korzec	122,687	
Gdańsk *szeffel* = $\frac{1}{60}$ *łasztu* = 4 *viertel*	48,639	
do wina: *oxeft* = $1\frac{1}{2}$ *antała (ohm)* = 6 *ankierów*		1,71
= 30 *viertel* = 165 *stofom.* 1. *stof*		
Hamburg *last* = 3 *winspel* = 30 *scheffel.* 1. *scheffel*	105,37	
do wina: *ankier* = $1\frac{1}{4}$ *eymer* = 5 *viertel* = 10		0,90504
stübchen = 40 *quartier.* 1. *quartier*		
Hannower *himt* = $\frac{1}{6}$ *malter* = $\frac{1}{48}$ *winspel* = $\frac{1}{960}$ *last* .	31,1	
do wina: *quartier* = $\frac{1}{1080}$ *oxhoft* = $\frac{1}{64}$ *eymer*		0,97199
Hiszpaniia *fanega* = $\frac{1}{12}$ *cahiz*	4,762	
do wina: *cantaro* = 8 *acumbres* = 32 *quartillos*		15,75
Kassel *szeffel* = $\frac{1}{2}$ *viertel* = 2 *himt*	80,238	
maass do wina		1,9642
dit. do piwa		2,1542
Kopenhaga *tonne* = $\frac{1}{252}$ *last* = 8 *szeffel*	139,11	
do wina: *kanne* = 2 pott		1,93208
Kraków *korzec*	120,099	
Litwa *beczka* = 4 *ćwierciom* = 8 *osminom* = 16 *szesna-*		
stkom = 144 gar.	407,04258	
do napoiu. *czaszka* = 12 garcom		33,9
Londyn: *bushel* = $\frac{1}{2}$ *strikes* = $\frac{1}{4}$ *combs* = $\frac{1}{8}$ *Quarters* .	35,725	
do wina: *gallon* = $\frac{1}{168}$ *rundlets* = $\frac{1}{12}$ *tierces* .		3,63008
Lubeka *szeffel* = $\frac{1}{4}$ *tonne* = $\frac{8}{960}$ *last*	33,403	
do wina: iak Hamburg.		
Luxemburg iak Antwerpiia.		
Medyiolan *staro* czyli *staio* $\frac{1}{8}$ *moggi* = $\frac{1}{120}$ *rubbi* . .	17,297	
do wina: *pinte* = $\frac{1}{4}$ *quartari* = $\frac{1}{8}$ *mines* . . .		1,4877
Moguncyia *simmer (virnsel)* = $\frac{1}{4}$ *malter*	27,347	
do wina *maass* = $\frac{1}{4}$ *viertel* = 4 *schoppen* . . .		1,6947
Munich *metze* = $\frac{1}{60}$ *szeffel* do zboża twardego a $\frac{1}{7}$ *do*	37,104	
owsa		1,06903
do wina: *kanne* = $\frac{1}{600}$ *eymer* = 4 *quartel* . .	51,158	
Neapol *tomolo* = $\frac{1}{600}$ *carro* = 24 *maass*		0,73395
do wina: *caraffa* = $\frac{1}{600}$ *barile*	20,1754	
Norymberga *metze* = $\frac{1}{8}$ *malter* do gładkiego ziarna .	18,8318	
metze do ostrego ditt . .		73,6723
do wina: *eymer* = $5\frac{2}{3}$ *maass*		3,7689 (1)
Polska garniec daw: = $\frac{1}{32}$ korca daw: = $\frac{1}{72}$ becz: daw:		
dit. nowy (od pocz: r. 1820) = $\frac{1}{32}$ kor. = $\frac{1}{25}$		4,
beczki	26,245	
Ratysbona: *meess* = $\frac{1}{4}$ *schaff*		1,2894
do wina: *köpfel* = $\frac{1}{80}$ *eymer*		
Rossyia *czetwert* = 2 *osminy* = 4 *poiok* 8 *czetweri-*	194,556	
ków = 64 *garcy*		
wedro = 4 *czetweriki* = 8 *osmuszków*; 1 *osmu-*		1,58692
szek czyli *kruszka*		

IV. MIARY WAG,

KTÓRYCH CIĘŻKOSCI WYRAŻONE SĄ W GRAMACH,

f. h. znaczy funt handlowy, apt: aptekarski, m. menn. marka menniczna.

NAZWISKA MIEYSC I MIAR.	LICZBA GRAMÓW.	NAZWISKA MIEYSC I MIAR.	LICZBA GRAMÓW.
Akwisgran f. = $\frac{1}{100}$ cetn = $\frac{1}{3}$ *sziffunt*	468,96	Brunszwik f. = $\frac{1}{114}$ cent. . m. menn: iak koloń.	470,891
Altona ob. Hamburg.		Bruxella iak Antwerp.	
Amsterdam 1 *sziffunt* = 3 cent. = 20 *liesfunt* = 37½ *kamieni* = 300 f. *(troysgewicht)* .	492,0044	Drezno ob. Lipsk.	
		Florencya f. h. menn: i apt: .	339,515
		Francyia f. daw. *poids de marc*	489,2
f. handl:	493,9262	wagi nowe. *kilogr* = 10 *hectogr* = ...	1000,
f. Apt: = 12 uncyy . .	369,0033	Gdańsk daw. f. = $\frac{1}{120}$ cetn.	435,421
m. menn: do złota i srebr: *troysmark*	246,0022	Genewa f. ciężki	550,74
		f. lżéyszy	458,95
Angliia f. królewski z 24 unc:	680,2806	Hamburg f. = $\frac{1}{112}$ cetn. .	484,335
dit. *avoir du poids* z 16 un:	453,536	f. = apt. iak w Berl. .	
dit. menn. i jubilerski *Troy* z 24 *karat*	372,6	m. menn. iak kolońska.	
Anszpach i Bayreyt f. . .	509,36	Hannower f. $\frac{1}{112}$ cetn. . .	489,621
z resztą iak w Norymberdze.		dit. apt.	365,0898
Antwerpiia f. = $\frac{1}{8}$ kamienia = $\frac{1}{100}$ cetn:	468,287	do zł. i srebra m. koloń.	
		Inflanty ob. Ryga.	
Auszpurg f. ciężki . . .	491,063	Irlandyia funt	544,774
f. lżéyszy . . .	472,612	Koloniia nad renem f. = $\frac{1}{100}$ cet.	467,62256
m. menn: = 16 łutom .	236,017	m. menn. = ½ f. . .	233,81128
Bamberg f. = $\frac{1}{100}$ cetn. . .	485,648	Kopenhaga f. = $\frac{1}{100}$ cetn. .	499,333
Bawarya daw: f. = $\frac{1}{20}$ kamienia = $\frac{1}{100}$ cetn.	571,4307	f. apt. iak w Berl.	
		marka do złot: i srebra .	234,967
nowy f. od 1811 . .	560,	Kraków funt	405,036
f. aptekarski . . .	360,	m. menn.	198,912
m. menn. nieco większa od kolońsk:	233,951	Lipsk f. = $\frac{1}{22}$ kamienia = $\frac{1}{100}$ cetn.	467,468
Berlin daw: f. $\frac{1}{22}$ ciężkiego a $\frac{1}{11}$ lekkiego kamienia = $\frac{1}{100}$ cent.	468,5358	m. menn: iak w kolonii.	
		Litwa funt $\frac{1}{200}$ cetn. . .	374,828
f. apt:	357,5668	Liworno iak Florencyia.	
m. meun: iak kolońska		Lubeka podział wag iak w	
karat jubilerski = angielsk:		Hamb.	483,326
od r. zaś 1816 f. $\frac{1}{100}$ cetn.	467,7187	m. menn. kolońska.	
f. apt.	350,7835	Madryt *libra* = $\frac{1}{25}$ *arrobas*	460,888
m. menn:	233,85933	do zł. i sr. m. kastylska	230,533
karat jubilerski . . .	0,205537	do kleynotów *quilat* (karat)	0,20573
Bern f. = $\frac{1}{100}$ cetn. . . .	520,13	Medyiol. f. *peso grosso* z 28 unc.	762,971
f. aptekarski z 12 unc.	356,658	f. *peso sottile* z 12 unc.	326,995
m. menn: oraz do iedwab: i soli	244,753	marka do zł. i srebra	234,990
		Moguncyia funt . . .	470,686

NAZWISKA MIEYSC I MIAR.	LICZBA GRAMÓW.	NAZWISKA MIEYSC I MIAR.	LICZBA GRAMÓW.
Neapol *rotolo* = $2\frac{7}{9}$ *libra* .	891,072	*rotolo sottile* $\frac{1}{100}$ *cantaro sottile*	793,965
do zł. i sr.	320,775	do zł. i sr. iak Neapol	
Neyszatel *poids de fer* . .	520,132	Szafhauzen funt *ciężki* . .	584,447
poids de marc iak Franc:		dit. *lekki* . . .	465,0201
Norymberga f. = $\frac{1}{100}$ cetn.	510,34	Szwecyia *schaalfunt* . .	425,128
f. apt.	382,918	do żelaza *marka* = $\frac{1}{20}$ *markf.*	340,084
marka do zł. i srebra	238,563	marka zwana mieyska .	357,954
Polska f. dawniéyszy zwyczay:	405,228	dit. do zł. i srebra . .	210,642
dit. aptekarski . . .	358,51063	f. apt.	356,315
f. now. $\frac{1}{25}$ kamienia $\frac{1}{100}$ cetn.	405,504	Tryiest iak Wiedeń.	
m. menn. iak w Kolonii.		Węgry dit.	
Prezburg funt	382,919	Wenecyia f. *peso grosso* . .	477.506
Ratyzbona funt = $\frac{1}{100}$ cetn.	568,191	f. *peso sottile* . .	302,035
m. do zł: i sre. iak Amszt.		uncyia apt. . . .	250,83
Rossyia *berkowiec* = 10 pudom		mar. do zł. i sreb. .	238,567
= 400 f. f. zaś hand: i men:	408,994	Wiedeń f. = $\frac{1}{100}$ cetn. . .	560,012
Ryga f. = $\frac{1}{20}$ *liesfunta* . .	418,076	f. apt.	420,009
m. do zł. i sr. = $\frac{1}{2}$ funta .		mar. do zł. i sre. . .	280,644
Rzym *lira* f. handl. i menn.	339,227	*karat* jubilerski . . .	0,206085
Stambuł *rottel* = $\frac{1}{2}$ *oka* . .	637,853	Wirtemberg iak w Kolonii.	
chéky do zł. i srebra . .	318,921	Wirtzburg f. = $\frac{1}{100}$ cetn. .	477,1034
Stralsund iak Lubeka.		Wizmar podział wagi iak w	
Sycyliia *rotolo grosso* $\frac{1}{100}$ *cantaro grosso*	873,342	Rosztoku . . . lecz f. .	483,951

V. MIARY MONET

(ZŁOTÉY I SREBRNÉY) RZECZYWIŚCIE BITYCH, (1)

których wartość odniesiona iest do wartości czystéy grzywny kolońskiéy iednegoż metalu. (2)

NAZWISKA MIEYSC I MONET.	NA CZYSTĄ GRZYWNĘ KOLOŃ: RACHUIE SIĘ SZTUK		NAZWISKA MIEYSC I MONET.	NA CZYSTĄ GRZYWNĘ KOLOŃ: RACHUIE SIĘ SZTUK	
	ZŁOTA.	SREBRA.		ZŁOTA.	SREBRA.
Angliia: *gwinea* . .	31,091		*piaster* od r. 1774 .		9,651
sztuki podwóyne i połowy podług stosunku (3)			Kurlan: *duk.* od r. 1780	65,184	
			albertsthaler . . .		9,6
			Medyio. i Mant: *cekin*	67,734	
kronen à 5 szel: szter:		8,509	*pistol*	41,07	
szel: szter: à 12 *pence*		42,55	*scudo* o 6 lirach . .		11,274
Brabancyia: *souverain*			*tallaro*		14,139
d'or	46,364		*lire*		67,64
dukat	68,506		Modena: *pistol* . . .	39,085	
krontalar		9,18	*scudo*		9,465
Löven po $3\frac{1}{2}$ złotych		8,25	*dukato*		17,79
schiling escalins . .		81,61	*lire* de billon . . .		75,77
złoty po 20 sztüwer		29,8	Neapol: szt. po 6 duk:	30,476	
sztuki po 5 dit.		120,82	scudi		10,273
Danija: *speciesdukat.*	68,427		*ducati* po 100 *grani*		12,328
curant dit.	85,714		Niemcy: dukaty podł:		
christians d'or . .	38,769		stopy Rzeszy . . .	67,944	
talary całe		9,25	dit. dit. hollender:	68,184	
sztuka 24 szeling: .		45,333	dit. dit. passierfus	68,426	
dit. 16 dit. . .		72.	dit. dit. z czyst: zł:	67,	
Francyia: *Luis d'or*			*carolinen*	31,135	
od 1726 do 1785. .	31,846		*max d'or*	46,703	
dit. od r. 1785.	33,97		Sask. Augustdory, Pruskie Frydrychsdory, Brunszwickie, Hannowerskie, Hessenkasselskie, Hildesheimskie, w Mecklenburg-Strelitz, w Palatynacie Reńskim,		
sztuka 20 franków	40,575				
talar o 6 livrach .		8,344			
sztuka 5 franków .		10,387			
Genewa szt. 96 lirów	10,104				
Cekin	67,35				
szuka 8 lirów . . .		7,894			
Holandyia *Ruyder* po 1 zł. *kurant* . . .	25,636		sztuki złota	38,621	
dukat	68,184		*talary* konwencyine		13,333
stuka 3 złotowa .		8,083	*speciesth.* 2 zł. reń:		10,
sylling po 6 stüwer		82,07	sztuka $\frac{2}{3}$ talara . . .		18,
stüwer		509,4	sztuka 4 dobre gro:		80,
Hz: *pistole* od r. 1772	38,215		dit. 20 graycarów .		60,

(Jak są gatunki monet rzeczywiście bitych, tak znayduią się też i monet tylko idealnych, t. i. używanych tylko w rachunkach; tak funty szterlingi w Anglii których $2\frac{1}{6}$ rachuią na czystą grzywnę kolońską srebra, są monetą umysłową; taką w Niemczech złoty reński, taką u nas iest dukat (zł. 18,) i szeląg trzecia część grosza.

Prawne oznaczenie wagi i czystości kruszcu monety zowie się stopą menniczną. Ta więc oznacza ciężkość szczególnych sztuk, tudzież ilość w nich metalu przedniéyszego i pośledniéyszego który zwykle przymieszywany iest w monecie (ob. notę pod no 367). Że zaś większa część europeyskich kraiów stosuie swoie monetę do wagi kolońskiéy; przeto i tu stosowanie się takowe zachowano.

Opuszczać tu będziemy podobną uwagę przy innych monetach, wyiąwszy gdzie stosunek iest odmienny. Wszakże oczywista iest, iż gdy n. p. w Genewie rachuie się 10,104 sztuk złota o 96 lirach na czystą grzywnę kolońską złota, podobnych sztuk o 48 lirach t. i. przez połowę mniéyszych trzeba będzie na tęż grzywnę 20,208. Toż rozumie się względem sztuk podwóynych, i t. d. iakiéy monety, gdzie są używane.

Obszerną wiadomość tak co do monet iako też innych miar powziąć można z książki: Nelkenbrechers Taschenbuch der Münz-Maass- und Gewichtskunde 15*te* wydanie w Berlinie 1820.

NAZWISKA MIEYSC I MONET.	NA CZYSTĄ GRZYWNĘ KOŁOŃ: RACHUIE SIĘ SZTUK	
	ZŁOTA.	SREBRA.
Polska: duk: od r. 1765	67,	
dit. od r. 1810. .	68,184	
szt. 50 złot. od r. 1816	26,	
dit. 25 złotowe . .	52,	
talary zwane *bite* od r. 1765 do 1787 . .		10,
dit. dit. od r. 1787 do 1794		10,4375
talary pozł: 6 od 1794 do 1795		$14\frac{1}{12}$,
dit. od r. 1810 . . .		14,
złotówki od r. 1816		86,688
dwuzłotówki i 5 złotówki podług proporcyi		
Portugaliia: *dobraons*	4,7307	
dobras	8,999	
nowe *crusadi* . . .	237,037	
crusadi		17,982
Prus: *tal:* z 24 dob: gr. (obacz Niemcy)		14,
Rossyia: *duk:* po 5 rubli	39,01	
imperyiały po 10 rubli od 1789	19,636	
dit. daw: od r. 1755	15,402	
nowe *dukaty* Pawła I. od r. 1797 . . .	68,09	
ruble od r. 1798 . .		13,
sztuki o 10 *kopiiek* .		130,
ruble P. wł. od r. 1797		9,216
Rzym: *cekiny* . . .	69,184	
pistole	46,637	
scudo à 5 lire . . .		9,523
testono		31,745
Sabaudyia i Piemont:		
dopie od r. 1786 .	28,275	
dit. dawniéysze .	26,798	
cekiny po 9 lire . .	68,78	
scudi po 6 lire . . .		7,333
Sardynnia: *carlini* po 25 lire	16,242	
scudi po $2\frac{1}{2}$ dit. . .		11,056
Sycyliia: *oncie* po 3 duk: królewskie . .	60,675	
oncia po 30 *tari* . .		4,1094
scudo po 12 dit. . .		10,273
Szwaycaryia: sztuka o 32 frankach	16,985	

NAZWISKA MIEYSC I MONET.	NA CZYSTĄ GRZYWNĘ KOŁOŃ: RACHUIE SIĘ SZTUK	
	ZŁOTA.	SREBRA.
dukat bazelski, berneński i t. d. . . .	98,425	
pistol genewski . .	45,291	
dit. neyszatelski .	38,62	
nowy luidor berneń	33,97	
sztuka o 4 frankach		8,639
talar bazel. od r. 1764		11,85
dit. 1765		12,307
dit. genewski o 3 liwrach		10,386
dit. neyszatelski od r. 1712		9,831
wiedzieć tu ieszcze trzeba, iż szczególne kantony różne maią gatunki pieniędzy.		
Szwecyia: *dukaty* .	68,8	
speciesthaler . . .		9,093
dawne Karolin. czyli sztuki 2 markowe		32,85
Toskania: *ruspono* à 40 *lire*	22,389	
zecchino czyli *ruspo*	67,167	
dawne *pistole* od r. 1746	38,095	
testono à 3 *paoli* . .		31,75
lire		62,93
ducaton		15,893
Turcyia: *zerimahhud* od r. 1781	109,675	
dit: od r. 1764 do 1781	95,425	
dit: dawniéysze . .	91,763	
fonduc	85,09	
piaster o 40 *para* .		38,4
Wenecyia: *zecchino* à 22 lire	66,86	
ducado d'oro à 14 dit.	107,48	
dawne *pistole* à 38 dit	38,713	
ducati à 8 lire . . .		12,415
scudo à $12\frac{2}{3}$ dit. . .		8,02
taleri à 10 dit. . .		9,941
Zjednoczone Stany Ameryki:		
Eagle (orzeł) po 10 dolarów	14,578	
doller czyli *piaster* à 10 *dimes*		9,72
dimes à 10 *cents* . .		97,2

VI. PODZIAŁY NOWYCH MIAR POLSKICH, I STOSUNKI ZBLIŻONE TYCHŻE MIAR Z DAWNEMI POLSKIEMI.

PODZIAŁY NOWYCH MIAR POLSKICH.

I. MIARY DŁUGOŚCI CZYLI LINIOWE.

a) podział łokcia.

Łokieć.	Stop.	Cwierci.	Calów.	Linii.	Milimetrów
1	2	4	24	288	576
	1	2	12	144	288
		1	6	72	144
			1	12	24
				1	2

b) Podział sążnia.

Sążeń.	Łokci	Stop.	Calów.	Linii.	Milimetrów
1	3	6	72	864	1728
	1	2	24	288	576
		1	12	144	288
			1	12	24
				1	2

c) Podział sznura mierniczego.

Sznur.	Prętów	Łokci.	Pręcików czyli stop geometrycznych.	Ławek.	Calów.	Linii.	Milimetrów.
1	10	75	100	1000	1800	21600	43200
	1	$7\frac{1}{2}$	10	100	180	2160	4320
		1	$1\frac{1}{3}$	$13\frac{1}{3}$	24	288	576
			1	10	180	216	432
				1	1,8	21,6	43,2
					1	12	24
						1	2

d) miary dróżne.

Podział mili polskiéy.

Mila.	Pół mili.	Cwierć mili.	Pół ćwierci mili, czyli stacye milowe.	Łokci.	Cali.	Linii.	Milimetrów.
1	2	4	8	14816	12	3,74	8534311,48952
	1	2	4	7408	6	1,87	4267155,74476
		1	2	3704	3	0,93	2133577,87238
			1	1852	1	6,46	1066788,93619

II. MIARY POWIERZCHNI CZYLI KWADRATOWE.

a) podział łokcia □

Łokieć □	Stóp □	Cwierci □	Calów □	Linii □	Milimetrów □
1	4	16	576	82944	331776
	1	4	144	20736	82944
		1	36	5184	20736
			1	144	576
				1	4

b) podział sążnia □

Sążeń □	Stóp □	Calów □	Linii □	Milimetrów □
1	36	5184	746496	2985984
	1	144	20736	82944
		1	144	576
			1	4

c) Podział sznura □

Sznur □	Prętów □	Łokci □	Prętików □ czyli stop geometrycz.	Ławek □	Calów □	Linii □	Milimetrów □
1	100	5625	10000	1000000	3240000	466560000	1866240000
	1	$56\frac{1}{4}$	100	10000	32400	4665600	18662400
		1	$1\frac{7}{9}$	$177\frac{7}{9}$	576	82944	331776
			1	100	324	46656	186624
				1	3,24	466,56	1866,24
					1	144	576
						1	4

d) podział włóki □

Włoka	Morgów	Sznurów □	Prętów □	Łokci □	Pręcików □	Ławek □
1	30	90	9000	506250	900000	90000000
	1	3	300	16875	30000	3000000
		1	100	5625	10000	1000000
			1	$56\frac{1}{4}$	100	10000
				1	$1\frac{7}{9}$	$177\frac{7}{9}$
					1	100

III. MIARY OBIĘTOŚCI CZYLI SZEŚCIENNE.

a) podział łokcia sześciennego

Łokieć S.	Stóp S.	Cwierci S.	Calów S.	Linii S.	Milimetrów S.
1	8	64	13824	23887872	191102976
	1	8	1728	2985984	23887872
		1	216	373248	2985984
			1	1728	13824
				1	8

b) podział sążnia sześciennego

Sążeń sz.	Stóp sz.	Calów S.	Linii Sześć.	Milimetr. sześcien.
1	216	373248	644972544	5159780352
	1	1728	2985984	23887872
		1	1728	13824
			1	8

c) podział korca (miara rzeczy sypnych).

Korzec.	Półkorców.	Cwierci.	Garcy.	Kwart.	Kwaterek.	Calów sześci.	Linii sześciennych	Milimetrów sześć.
1	2	4	32	128	512	$9259\frac{7}{27}$	16000000	128000000
	1	2	16	64	256	$4629\frac{17}{27}$	8000000	64000000
		1	8	32	128	$2314\frac{22}{27}$	4000000	32000000
			1	4	16	$289\frac{19}{54}$	500000	4000000
				1	4	$72\frac{73}{216}$	125000	1000000
					1	$18\frac{73}{864}$	31250	250000
						1	1728	13824
							1	8

№ 1570.

IV. MIARY CIĘŻKOSCI CZYLI WAGI.

podzia centnara

Cetnar.	Kamieni.	Funtów.	Uncyi.	Łutów.	Drachm.	Skrupułów.	Granów.	Graników.	Miligramów.
1	4	100	1600	3200	12800	38400	921600	5068800	40550400
	1	25	400	800	3200	9600	230400	1267200	10137600
		1	16	32	128	384	9216	50688	405504
			1	2	8	24	576	3168	25344
				1	4	12	288	1584	12672
					1	3	72	396	3168
						1	24	132	1056
							1	$5\frac{1}{2}$	44
								1	8

V. MIARY WARTOSCI CZYLI MONET.

MONETA ZŁOTA.		MONETA SREBRNA.						MONETA MIEDZIANA	
podwoyny zł. królew.	poiedynczy zł. królewski.	10cio złot.	5cio złot.	2u złot.	1dyu złoty.	10cio grosz.	5cio grosz.	3 groszowki.	grosze
1	2	5	10	25	50	150	300	500	1500
	1	$2\frac{1}{2}$	5	$12\frac{1}{2}$	25	75	150	250	750
		1	2	5	10	30	60	100	300
			1	$2\frac{1}{2}$	5	15	30	50	150
				1	2	6	12	20	60
					1	3	6	10	30
						1	2	$3\frac{1}{3}$	10
							1	$1\frac{2}{3}$	5
								1	3

№ 1540.

Gimnazjum męsk. im. J. [illegible]

…VIE…

…IARY CIĘŻKOSCI CZYLI WAGI.

…podzia centnara

	Łu-tów.	Drachm.	Skrupu-łów.	Gra-nów.	Grani-ków.	Miligra-mów.
	3200	12800	38400	921600	5068800	40550400
	800	3200	9600	230400	1267200	10137600
	32	128	384	9216	50688	405504
	2	8	24	576	3168	25344
	1	4	12	288	1584	12672
		1	3	72	396	3168
			1	24	132	1056
				1	$5\frac{1}{2}$	44
					1	8

…RY WARTOSCI CZYLI MONET.

	MONETA SREBRNA.					MONETA MIEDZIANA	
	5cio złot.	2u złot.	1dnu złoty.	10cio grosz.	5cio grosz.	3 grószowki.	grosze
	0	25	50	150	300	500	1500
	5	$12\frac{1}{2}$	25	75	150	250	750
ure							62,93
ducaton							15,893

13,

120

Chodk… …ca… …ego i …anica stosunki dawnych miar i wag francuzkich

STOSUNKI ZBLIŻONE.

POLSKICH MIAR NOWYCH Z DAWNEMI

WYRAŻONE W LICZBACH CAŁYCH.

17. nowych łokci czynią prawie 16 dawnych koronnych, czyli raczéy, stosunek łokci nowych do dawnieyszych iest 67 : 63

mil nowych równaią się prawie 8 większym milom dawnieyszym, których rachowano 15 na stopień południka, czyli dokładniéy stosunek mil nowych do dawnieyszych iest 20 : 23.

16 morgów nowych równiaią się prawie 15 morgom dawnieyszym, czyli raczéy stosunek morgów nowych do dawnych polskich iest 81 : 76. (1)

16 korcy nowych równaią się prawie 17 korcom dawnieyszym koronnym, czyli raczéy stosunek korcy nowych do dawnieyszych iest 212 : 225.

1468 funtów nowych równaią się bardzo blisko 1469 funtom dawnieyszym.

(1) Obacz: wspomnione wyżéy porównanie teraźnieyszych i dawnieyszych miar i wag w Królestwie Polskiém używanych przez Jul: Colberg kar. 52.