





WYKŁAD
GEOMETRYI RYSUNKOWEY.

Bibliothecae Scholae Białej
D: 16 Julii Anno 1888.

WYKŁAD GEOMETRYI RYSUNKOWEY

DLA UŻYCIA

UCZNIOW INSTYTUTU DROG
KOMMUNIKACYNYCH

PRZEZ

M. P O T I E R

UCZNIA SZKOŁY POLITECHNICZNEY, PODPÓŁKOWNIKA
W KORPUSIE DROG KOMMUNIKACYNYCH,
KAWALERA ORDERU Św. WŁODZIMIERZA
4tey KLASZY.

Przetłumaczył G. A. Hreczyński.

N 1583

Biblioteka
Znak 575
No inw. 2203.

w WILNIE i WARSZAWIE

NAKŁADEM I DRUKIEM JÓZEFA ZAWADZKIEGO TYPO-
GRAFA UNIwersYTETU WILeNSKIEGO.

1817.

Dozwala się drukować pod tym warunkiem, aby po wydrukowaniu, nie zaczynając przedawać, złożone były w Komitecie Cenzury exemplarze książki tej: ieden dla tegoż Komitetu, dwa dla Departamentu ministerium oświecenia, dwa exemplarze dla IMPERATORSKIEY publiczney biblioteki, i ieden dla IMPERATORSKIEY Akademii nauk. Wilno dnia 17 Marca 1817 roku.

Z. Niemcewski P. O. Członek Komitetu Cenzury.

PORZĄDEK MATERYY.

XIĘGA PIERWSZA.

O linii prostej i płaszczyźnie.

Opisania

karta.

1

TWIERDZENIA POCZĄTKOWE.

- Twierdzenie I. Punkt i dwa jego rzuty leżą na płaszczyźnie prostopadłej do osi rzutu. 5
 Twier. II. Rzuty l. prostej są l. prostemi. 6
 Twier. III. Dwa ślady płaszczyzny danej przecinają oś rzutu w tym samym punkcie. 7
 Twier. IV. Punkt jest oznaczony kiedy są dane dwa jego rzuty. tamże.
 Twier. V. L. prosta jest oznaczona kiedy dwa iey rzuty są dane. tamże.
 Twier. VI. Płaszczyzna jest oznaczona kiedy dwa iey ślady są dane. 8

ZAGADNIENIA POCZĄTKOWE.

- Zagadnienie I. Wykreślić l. prostą przechodzącą przez dwa punkta dane. 9
 Zagad. II. Naznaczyć punkta przecięcia się l. prostej danej z płaszczyznami rzutu tamże.
 Zagad. III. Wykreślić część l. prostej zawartą między dwoma punktami danymi. 10
 Zagad. IV. Przez punkt dany poprowadzić l. prostą równoległą do l. prostej danej. 11
 Zagad. V. Przez punkt dany poprowadzić linią prostopadłą do płaszczyzny danej. 12
 Zagad. VI. Wykreślić linią przecięcia się dwóch płaszczyzn danych. 13
 Zagad. VII. Przez punkt dany poprowadzić płaszczyznę równoległą do płaszczyzny danej. 14
 Zagad. VIII. Płaszczyznę daną i punkt na niej będący położyć na iedney z płaszczyzn rzutu. 15



ZASTOSOWANIA.

- Zastosowanie I. Poprowadzić płaszczyznę przez
dwie dane l. proste z sobą się przecinające 17
Zastos. II. Wykreślić płaszczyznę przez dane
trzy punkta przechodzącą tamże.
Zastos. III. Mając daną płaszczyznę i na niej
l. prostą, położyć tę płaszczyznę na jednej
z płaszczyzn rzutu. 18
Zastos. IV. Wykreślić trójkąt którego by wierz-
chołkami były trzy punkta dane tamże.
Zastos. V. Wykreślić kąt zawarty dwiema l.
prostemi danymi. 19
Zastos. VI. Przez l. prostą daną poprowadzić
płaszczyznę równoległą względem drugiej l.
prostej danej. 20
Zastos. VII. Przez punkt dany poprowadzić
płaszczyznę równoległą do dwóch l. prostych
danych. tamże.
Zastos. VIII. Naznaczyć punkta przecięcia się
płaszczyzny danej z l. prostą daną. 21
Zastos. IX. Przez punkt dany poprowadzić pla-
szczyznę prostopadłą do l. prostej danej tamże.
Zastos. X. Przez punkt dany poprowadzić pro-
stopadłą do l. prostej danej 22
Zastos. XI. Przez daną l. prostą poprowadzić
płaszczyznę prostopadłą do płaszczyzny danej. tamże
Zastos. XII. Wykreślić kąt zawarty między l.
prostą daną i daną płaszczyzną. 23
Zastos. XIII. Wykreślić kąt dwóch płaszczyzn
danych. 24
Zastos. XIV. Wykreślić najmniejszą odległość
dwóch l. prostych danych. tamże.

XIĘGA DRUGA.

O powierzchniach krzywych.

Opisania. 26

TWIERDZENIA POEZĄTKOWE.

Twier. I. Płaszczyzna przechodząca przez dwie
styczne do téj saméj powierzchni w tym sa-
mym iey punkcie jest w tymże punkcie sty-
czną do téj powierzchni. 31

karta.

- Twier. II. Jeżeli płaszczyzna jest styczną do po-
wierzchni mającej rodzącą l. prostą, linią
rodzącą która przechodzi przez punkt do-
tknięcia leży na płaszczyźnie stycznej - tamże.
Twier. III. Jeżeli dwie l. proste są w tym sa-
mym punkcie styczne do téj saméj powier-
zchni, a przez punkt dotknięcia poprowadzo-
ne będą płaszczyzny do nich prostopadłe,
przecięcie się tych płaszczyzn będzie węgiel-
ną powierzchni. 32
Twier. IV. Przecięcia walca płaszczyznami ró-
wnoległemi są l. krzywe równe i mogące
przystać do siebie. tamże.
Twier. V. Płaszczyzna styczna do walca w ie-
dnym z punktów rodzącej jest styczną i we
wszystkich iey punktach. 34
Twier. VI. Przecięcia ostrokągu płaszczyznami
równoległemi są l. krzywe podobne. 35
Twier. VII. Płaszczyzna styczna z ostrokągiem
jest styczną we wszystkich punktach rodzą-
cej która przez punkt dotknięcia przechodzi. 36
Twier. VIII. Kiedy linia rodząca obraca się
około osi i tworzy powierzchnią toczoną, ka-
żdy iey punkt opisuje koło mające środek na
osi i którego płaszczyzna jest do osi prosto-
padła. 37
Twier. IX. Wszystkie przecięcia powierzch-
ni toczoney przez płaszczyzny południowe są l.
krzywe równe i mogące przystać do siebie. 39
Twier. X. Węgielna któregośkolwiek z przecięć
południowych jest także węgielną toczoney
powierzchni. 40
Twier. XI. Linia przecięcia płaszczyzny dwoi-
stej od płaszczyzny równoległej względem
iey kierownic jest prosta. 42

ZASTOSOWANIA.

Zastos. I. Mając daną linią rodzącą i kierowni-
cę walca, wykreślić l. krzywą przecięcia tego
walca przez którąkolwiek z płaszczyzn rzuto-
wych. 44

- Zastos. II. Mając daną podstawę walca, linią rodzącą i punkt na jego powierzchni, poprowadzić płaszczyznę styczną do walca w tym punkcie. 45
- Zastos. III. Mając daną podstawę walca, linią rodzącą i punkt na jego powierzchni, poprowadzić węgelną walca w tym punkcie. tamże.
- Zastos. IV. Przez dany punkt w przestrzeni poprowadzić płaszczyznę styczną z walcem którego podstawa i rodząca są dane. 46
- Zastos. V. Z punktu danego poprowadzić węgelną walca którego podstawa i rodząca są dane. 47
- Zastos. VI. Poprowadzić płaszczyznę równoległą względem l. prostej danej styczną do walca którego dane są podstawa i rodząca. 48
- Zastos. VII. Poprowadzić równoległe do płaszczyzny danej węgelną walca którego podstawa i rodząca są dane. 49
- Zastos. VIII. Mając daną kierownicę i wierzchołek ostrokągu, wykreślić l. krzywą przecięcia tego ostrokągu od którejkolwiek z płaszczyzn rzutowych. 50
- Zastos. IX. Przez punkt dany na ostrokągu którego wierzchołek i podstawa są dane, poprowadzić płaszczyznę z nim styczną. 51
- Zastos. X. Przez punkt dany na ostrokągu, którego wierzchołek i podstawa są dane, poprowadzić jego węgelną. 52
- Zastos. XI. Przez punkt dany w przestrzeni poprowadzić płaszczyznę styczną z ostrokągiem którego wierzchołek i podstawa są dane. tamże.
- Zastos. XII. Przez punkt dany poprowadzić węgelną ostrokągu którego wierzchołek i podstawa są dane. 53
- Zastos. XIII. Poprowadzić równoległe względem danej l. prostej płaszczyznę styczną z ostrokągiem którego wierzchołek i podstawa są dane. 54
- Zastos. XIV. Poprowadzić równoległe do płaszczyzny danej węgelną ostrokągu którego wierzchołek i podstawa są dane. 55

- Zastos. XV. Mając oś i rodzącą powierzchnię toczoną, wykreślić l. krzywą przecięcia tej przez południową płaszczyznę równoległą względem płaszczyzny pionowej. 56
- Zastos. XVI. Przez punkt dany na powierzchni toczony, której oś i rodząca płaska są dane, poprowadzić płaszczyznę styczną do tej powierzchni. 57
- Zastos. XVII. Przez punkt dany na toczonyj powierzchni, której oś i rodząca płaska są dane, poprowadzić tej powierzchni węgelną. 58
- Zastos. XVIII. Poprowadzić równoległe do l. prostej danej walec styczny z powierzchnią toczoną której oś i rodząca płaska są dane. 59
- Zastos. XIX. Przez punkt dany w przestrzeni poprowadzić ostrokąg styczny do powierzchni toczonyj której oś i rodząca płaska są dane. 60
- Zastos. XX. Poprowadzić przez l. prostą daną, płaszczyznę styczną do toczonyj powierzchni, której oś i rodząca płaska są dane. 62
- Zastos. XXI. Przez punkt dany w przestrzeni poprowadzić węgelną powierzchnię toczonyj której oś i rodząca płaska są dane. 63
- Zastos. XXII. Poprowadzić równoległe do l. prostej danej węgelną powierzchnię toczonyj której oś i rodząca płaska są dane. 64
- Zastos. XXIII. Równoległe względem płaszczyzny danej poprowadzić płaszczyznę styczną do toczonyj powierzchni której oś i rodząca płaska są dane. 65
- Zastos. XXIV. Mając dany punkt na jednej z kierownic dwoistego walca danego, wykreślić rodzącą która punkt ten przechodzi. 66
- Zastos. XXV. Wykreślić l. krzywą przecięcia dwoistego walca danego od płaszczyzny danej równoległej względem płaszczyzny poziomej tamże.
- Zastos. XXVI. Wykreślić rodzącą poprzeczną płaszczyzny dwoistej przechodzącą przez punkt dany na tej płaszczyźnie. 67
- Zastos. XXVII. Mając dwoisty walec dany przez dwie kierownice płaskie i płaszczyznę

- równoległości, poprowadzić dwoistą płaszczyznę styczną do tego walca podług rodzącej danej. 68
- Zastos. XXVIII. Przez punkt dany na walcu dwoistym, którego dwie kierownice płaskie i płaszczyzna równoległości są dane, poprowadzić płaszczyznę styczną do tego walca tamże.
- Zastos. XXIX. Przez punkt dany na walcu dwoistym, którego dwie kierownice płaskie i płaszczyzna równoległości są dane, poprowadzić jego węgelną. 69
- Zastos. XXX. Maiąc daną płaszczyznę, która przechodzi przez daną rodzącą danego walca dwoistego, naznaczyć punkt dotknięcia tej płaszczyzny z walcem dwoistym. 70
- Zastos. XXXI. Przez punkt dany poprowadzić ostrokąg styczną z walcem dwoistym którego dane są dwie kierownice płaskie i płaszczyzna równoległości. tamże.
- Zastos. XXXII. Przez daną l. prostą poprowadzić płaszczyznę styczną do walca dwoistego którego dwie kierownice płaskie i płaszczyzna równoległości są dane. 71
- Zastos. XXXIII. Przez punkt dany poprowadzić węgelną dwoistego walca którego są dane dwie kierownice płaskie i płaszczyzna równoległości. 72
- Zastos. XXXIV. Równolegle względem l. prostej danej poprowadzić walec styczną z walcem dwoistym którego dwie kierownice płaskie i płaszczyzna równoległości są dane. 74
- Zastos. XXXV. Równolegle do płaszczyzny danej poprowadzić płaszczyznę styczną z dwoistym walcem którego dwie kierownice płaskie i płaszczyzna równoległości są dane. 75
- Zastos. XXXVI. Poprowadzić równolegle do l. prostej danej węgelną dwoistego walca którego dwie kierownice płaskie i płaszczyzna równoległości są dane. 76

XIĘGA TRZECIA.

O wzajemnych przecięciach się powierzchni i o stycznych tych przecięć.

- Zastos. I. Maiąc l. krzywą daną przez przecięcie się dwóch danych powierzchni, z punktu na niej wziętego poprowadzić iey styczną. 77
- Zastos. II. Z punktu danego poprowadzić styczną do l. krzywej danej przez przecięcie się dwóch danych powierzchni. 78
- Zastos. III. Maiąc l. krzywą daną przez przecięcie się dwóch danych powierzchni, poprowadzić do niej styczną równoległą względem l. prostej danej. tamże.
- Zastos. IV. Maiąc l. prostą daną i walec dany przez swoją podstawę i rodzącą, naznaczyć ich wspólne przecięcie się. 79
- Zastos. V. Maiąc daną płaszczyznę i walec dany przez swoją podstawę i rodzącą, wykreślić ich wspólne przecięcie się. 80
- Zastos. VI. Maiąc ostrokąg dany przez swoją podstawę i wierzchołek, naznaczyć jego przecięcie się z l. prostą daną. tamże.
- Zastos. VII. Maiąc ostrokąg dany przez swoją podstawę i wierzchołek, wykreślić l. krzywą jego przecięcia od płaszczyzny danej. 81
- Zastos. VIII. Maiąc powierzchnią toczoną daną przez swoją oś i rodzącą płaską, wykreślić l. krzywą iey przecięcia od płaszczyzny danej. 82
- Zastos. IX. Maiąc powierzchnią toczoną daną przez swoją oś i rodzącą płaską, naznaczyć iey przecięcie się z l. prostą daną. tamże.
- Zastos. X. Maiąc dwoisty walec dany przez swoje dwie kierownice płaskie i płaszczyznę równoległości, wykreślić l. krzywą jego przecięcia się z płaszczyzną daną. 83
- Zastos. XI. Maiąc dwoisty walec dany przez dwie swoje kierownice płaskie i płaszczyznę równoległości, naznaczyć jego przecięcie się z l. prostą daną. tamże.

	karta.
Zastos. XII. Wykreślić l. krzywą przecięcia się dwóch walców danych przez swoje podstawy i rodzaje.	84
Zastos. XIII. Wykreślić l. krzywą przecięcia się walca danego przez swoją podstawę i rodzającą z ostrokretem którego są dane podstawa i wierzchołek.	85
Zastos. XIV. Wykreślić przecięcie się walca danego przez swoją podstawę i rodzającą z powierzchnią toczoną której są dane oś i rodzająca płaska.	86
Zastos. XV. Wykreślić l. krzywą przecięcia się walca danego przez swoją podstawę i rodzającą z powierzchnią walca dwoistego którego są dane dwie kierownice płaskie i płaszczyzna równoległości.	87
Zastos. XVI. Wykreślić l. krzywą przecięcia się dwóch ostrokreśców danych przez swoje podstawy i wierzchołki	tamże.
Zastos. XVII. Mając ostrokreg dany przez swoją podstawę i wierzchołek, wykreślić l. krzywą jego przecięcia się z powierzchnią toczoną której oś i rodzająca płaska są dane.	88
Zastos. XVIII. Mając ostrokreg dany przez swoją podstawę i wierzchołek, wykreślić l. krzywą jego przecięcia się z dwoistym walcem którego dane są dwie kierownice płaskie i płaszczyzna równoległości.	89
Zastos. XIX. Wykreślić l. krzywą przecięcia się dwóch toczonych powierzchni danych przez swoje osi i rodzaje płaskie.	tamże.
Zastos. XX. Mając toczoną powierzchnię daną przez swoją oś i rodzającą płaską, wykreślić l. krzywą przecięcia się jej z dwoistym walcem którego dane są dwie kierownice płaskie i płaszczyzna równoległości.	91
Zastos. XIX. Wykreślić l. krzywą przecięcia się dwóch walców dwoistych danych przez swoje kierownice płaskie i płaszczyznę równoległości.	tamże.
Przypiski do Xięgi drugiej.	93.



GEOMETRYI RYSUNKOWEY

XIĘGA PIERWSZA.

O LINII PROSTEY I PŁASZCZYZNIE.

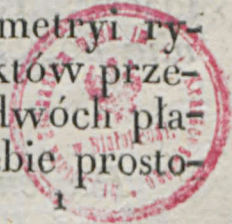
OPISANIA.

1.

Geometryia rysunkowa iest sztuką kręślenia geometrycznego punktów, linii albo powierzchni, oznaczonych przez ich położenie albo rodzenie się, odniesione do punktów, linii albo powierzchni danych.

2.

Oznaczają się w geometryi rysunkowey położenia punktów przestrzeni, odnosząc ie do dwóch płaszczyzn nawzajem do siebie prosto-



padłych, zwanych *plaszczyznami rzutu* albo *rzutowemi*.

3.

Ich wzajemne przecięcie się iest *osią rzutu*.

4.

Jedna z tych plaszczyzn rozciągająca się równolegle do poziomu nosi imię *plaszczyzny poziomey*, a wtedy druga *pionową* się nazywa.

W rysunku uważa się plaszczyzna pionowa w takim położeniu iak gdyby pochylać się przez obrot około osi rzutu padła na plaszczyznę poziomą.

5.

Nazywamy *rzutem poziomym punktu* koniec prostopadley na plaszczyznę poziomą od tego punktu idący. Ta prostopadła zowie się *linią poziomie rzucającą*.

6.

Rzutem pionowym tegoż punktu

iest koniec prostopadley od niego na plaszczyznę pionową prowadzoney. Ta prostopadła zowie się *linią pionowie rzucającą*.

7.

Rzutem poziomym l. prostey nazywamy linią prowadzoną na plaszczyznie poziomey, przechodzącą przez końce wszystkich linii poziomie rzucających punkta linii daney.

8.

Rzutem pionowym teyże linii, iest linią na plaszczyznie pionowey, przechodzącą przez końce wszystkich linii pionowie rzucających punkta linii daney.

9.

Sladem poziomym plaszczyzny nazywa się iey przecięcie z plaszczyzną poziomą.

10.

Sladem pionowym teyże pla-

szczyzny jest przecięcie się iey z płaszczyzną pionową.

11.

Płaszczyzną posilkową nazywa się trzecia rzutowa płaszczyzna, położona dowolnie względem płaszczyzn rzutu dwóch pierwszych, używana dla uproszczenia niektórych wykreśleń.

Uważa się w rysunku płaszczyzna posilkowa jako położona na którejkolwiek z płaszczyzn rzutu.

TWIERDZENIA POZĄTKOWE.

TWIERDZENIE 1.

Punkt i dwa iego rzuty leżą na płaszczyźnie prostopadłej do osi rzutu.

Dwie linie rzucające punkt dany, przez ten punkt przechodząc, leżąc muszą na iedney płaszczyźnie, i na tey płaszczyźnie znajdować się musi i punkt dany i dwa iego rzuty.

Jest ta płaszczyzna prostopadłą do poziomey, przechodzi bowiem przez linią do niej prostopadłą to jest przez linią punkt dany poziomie rzucającą; dla podobney przyczyny jest także prostopadłą do płaszczyzny pionowej; musi być przeto prostopadłą do wzajemnego tych dwóch płaszczyzn przecięcia się czyli do osi rzutu.

Wniosek. Stąd wypada: że l. proste wyrażające wspólne przecięcia się tey płaszczyzny z płaszczyznami rzutu, są, jedna na płaszczyźnie pionowej, druga na płaszczyźnie poziomey, prostopadłe do osi rzutu i w jeden się punkt iey zbiegają.

Kiedy płaszczyzna pionowa pochyli się tak, aby wzięła kierunek przedłużenia płaszczyzny poziomey, naówczas dwie pomienne linie znajdując się na płaszczyźnie

poziomey i będąc prostopadłemi do osi rzutu w tym samym punkcie, stanowić będą iednę l. prostą: a ponieważ każda z tych linii ma na sobie ieden z rzutów punktu danego, idzie zatém, że w rysunku, *l. prosta łącząca rzuty punktu, poziomy z pionowym, jest prostopadła do osi rzutu.*

TWIERDZENIE II.

Rzuty l. prostey są l. prostemi.

Co do rzutu na płaszczyźnie poziomey:

Linie poziomie rzucające punkta daney l. prostey są prostopadłe do płaszczyzny poziomey, a przeto między sobą równoległe; aże każda z nich przechodzi przez l. prostą daną, będą się więc wszystkie znajdować na iedney płaszczyźnie prostopadłej do płaszczyzny poziomey: stąd poziomy rzut daney l. prostey, iako przecięcie się tej płaszczyzny z poziomą, jest l. prostą.

To samo rozumowanie stosuje się do rzutu pionowego.

Nota. Płaszczyzna obejmująca wszystkie prostopadłe, z punktów daney l. prostey na płaszczyznę poziomą prowadzone, nazywa się *plaszczyną poziomą rzucającą* l. prostą daną: a ta która przechodzi przez wszystkie prostopadłe do płaszczyzny pionowej z punktów daney l. prostey idące, zowie się *plaszczyną pionową rzucającą*.

TWIERDZENIE III.

Dwa ślady płaszczyzny daney przecinaia oś rzutu w tym samym punkcie.

Ponieważ na płaszczyźnie daney znajdują się oba iey ślady, i każdy z nich jest położony na iedney z płaszczyzn rzutu, nie mogą się zatém z sobą spotkać, tylko w punkcie wspólnym dla trzech płaszczyzn, a ten punkt jest przecięciem się płaszczyzny daney z osią rzutu.

TWIERDZENIE IV.

Punkt jest oznaczony kiedy są dane dwa iego rzuty.

Kiedy dwa rzuty punktu są dane, tém samém oznaczone jest położenie dwóch linii ten punkt rzucających; ponieważ zaś te linie są na iedney płaszczyźnie, i na każdej z nich punkt szukany znajdować się powinien, swoim więc przecięciem się ten punkt oznaczają.

TWIERDZENIE V.

L. prosta jest oznaczona kiedy dwa iey rzuty są dane.

Kiedy dwa rzuty l. prostey są dane, oznaczone jest tém samém położenie dwóch płaszczyzn tę l. prostą rzucających; a ponieważ na każdej z nich l. prosta szukana

znaydować się powinna, wspólném więc ich przecięciem się oznaczoną zostanie.

TWIERDZENIE VI.

Plaszczyzna jest oznaczona kiedy dwa iey ślady są dane.

Dwa ślady płaszczyzny są dwie l. proste na niey się znajdujące. Te dwie linie wyznaczają położenie szukanej płaszczyzny; przez dwie albowiem l. proste iedną tylko płaszczyzna może przechodzić.

ZAGADNIENIA POCZĄTKOWE.

ZAGADNIENIE I.

Wykręślić l. prostą przechodzącą przez dwa punkta dane.

Niech będą A i B rzuty poziome, A' i B' rzuty pionowe punktów danych. Fig. 1.

Przez poziome rzuty A i B punktów danych prowadzi się l. prosta AB ; ta będzie rzutem poziomym l. prostej szukanej.

Kiedy l. prosta szukana ma przechodzić przez punkta (AA') i (BB') rzut iey poziomy przejdzie przez poziome tych punktów rzuty A i B , będzie zatem l. prostą AB .

To samo rozumowanie stosując do płaszczyzny pionowej, wypadnie, że pionowym rzutem l. prostej szukanej jest linia $A'B'$ przez pionowe rzuty A' , B' punktów danych prowadzona.

ZAGADNIENIE II.

Naznaczyć p. dla przecięcia się l. prostej danej z płaszczyznami rzutu.

Niech AB wyraża poziomy rzut l. prostej danej, $A'B'$ rzut iey pionowy. Fig. 2.

Dla znalezienia punktu przecięcia się

tey linii z płaszczyzną poziomą, przedłużyć się rzut pionowy AB' póki nie spotka osi rzutu w punkcie B' ; ten punkt będzie rzutem pionowym punktu szukanego.

Punkt szukany należąc do płaszczyzny poziomej, kiedy będzie rzucony pionowie, trafi na oś rzutu.

Jest on punktem l. prostey daney, pionowie zaś rzucony, padnie na iey rzut pionowy $A'B'$.

Ponieważ tedy pionowy rzut szukanego punktu znajdować się powinien i na pionowym rzucie l. prostey daney i na osi rzutu, jest nim przeto punkt B' obudwom tym l. prostym wspólny.

Przez punkt przecięcia B' prowadzi się linia BB' prostopadła do osi rzutu; punkt B , w którym ta prostopadła spotyka rzut poziomy daney l. prostey, jest punktem iey przecięcia się z płaszczyzną poziomą.

Punkt szukany powinien się znajdować na linii BB' pionowie go rzucający, powinien być także na rzucie poziomym AB l. prostey daney; jest nim przeto punkt B obu tym liniom wspólny.

Podobną drogą naznacza się punkt A w którym dana l. prosta płaszczyznę pionową spotyka.

ZAGADNIENIE III.

Wykreślić długość części l. prostey zawartą między dwoma punktami danymi.

Fig. 3.

Niech A i B będą rzuty poziome, A' i B' rzuty pionowe dwóch punktów danych.

Przez pionowy rzut B' iednego z punktów danych prowadzi się prostopadła Bb' do pionowego rzutu $A'B'$ części daney l. prostey i nadaie się iey długość równa różnicy Bb dwóch linii pionowie rzucających punkta dane.

Koniec b' tey prostopadłej łączy się l. prostą z pionowym rzutem A' drugiego punktu danego; linia $A'b'$ objęta temi dwoma punktami będzie długością szukaną.

Wystawmy sobie w przestrzeni l. prostą wychodzącą z punktu A' równoległą do l. prostey daney.

Część tey równoległej zawarta między liniami pionowie rzucającemi punkta dane będzie równa części daney l. prostey między danymi punktami objętej.

Nadto ta część równoległej będzie przeciwprostokątną trójkąta którego boki kąt prosty zawierające będą: pionowy rzut $A'B'$ długości szukaney i różnica Bb linii pionowie rzucających punkta dane. Boki więc iego kąt prosty obejmujące są równe ramionom kąta prostego w trójkącie $A'b'b'$ wykreślonym na płaszczyźnie pionowej; przeciwprostokątna zaś $A'b'$ będzie równa szukaney części (AA') (BB') daney l. prostey.

Podobne rozumowanie stosowane do płaszczyzny poziomej przyprowadziłoby do rysunku na tey płaszczyźnie podobnego poprzedzającemu.

ZAGADNIENIE IV.

Przez punkt dany poprowadzić l. prostą równoległą do l. prostey daney.

Niech DC i A będą rzuty poziome, $D'C'$ Fig. 4.

i A' rzuty pionowe danej l. prostej i punktu danego.

Dla wykreślenia poziomego rzutu l. prostej szukanej, prowadzi się przez rzut poziomy A danego punktu l. prosta AB równoległa względem poziomego rzutu DC l. prostej danej; ta równoległa będzie rzutem poziomym żądanym.

Ponieważ szukana linia ma być równoległa do l. prostej danej, płaszczyzny przeto poziomie je rzucające a następnie i same rzuty będą równoległe.

Dla tej samej przyczyny linia AB równoległa do DC będzie rzutem pionowym l. prostej szukanej.

ZAGADNIENIE V.

Przez punkt dany poprowadzić linię prostopadłą do płaszczyzny danej.

Niech AX będzie śladem poziomym AX Fig. 5. śladem pionowym płaszczyzny danej, B rzutem poziomym, B' rzutem pionowym punktu danego.

Dla wykreślenia poziomego rzutu linii szukanej, prowadzi się przez rzut poziomy B danego punktu linia CB prostopadła do śladu poziomego AX płaszczyzny danej; ta linia będzie rzutem poziomym prostopadłej szukanej.

Płaszczyzna poziomie rzucająca l. prostą szukaną będzie razem prostopadła i do płaszczyzny danej i do płaszczyzny poziomej, będzie więc prostopadła

do poziomego śladu płaszczyzny danej, a następnie rzut poziomy linii szukanej będzie prostopadły do tegoż śladu.

Dla podobnej przyczyny l. prosta CB' prostopadła do AX będzie rzutem pionowym l. prostej szukanej.

ZAGADNIENIE VI.

Wykreślić linię przecięcia się dwóch płaszczyzn danych.

Niech AX, AY, wyrażają ślady poziome płaszczyzn danych; AX, AY ich ślady pionowe. Fig. 6.

Dla wykreślenia rzutu poziomego l. prostej szukanej, punkt A' przecięcia się pionowych śladów płaszczyzn danych rzuca się na płaszczyznę poziomą; rzut jego B należeć będzie do żądanego rzutu poziomego.

Punkt A znajdując się razem na dwóch pionowych śladach płaszczyzn danych jest punktem należącym do wspólnego tych płaszczyzn przecięcia się, a zatem jego rzut poziomy B należy do poziomego rzutu tegoż przecięcia.

Przez punkt B i przez punkt A wzajemnego spotkania się poziomych śladów płaszczyzn danych poprowadzona l. prosta będzie poziomym rzutem szukanym.

Punkt A zezyscia się dwóch poziomych śladów płaszczyzn danych należąc do wspólnego przecięcia się tych płaszczyzn i znajdując się na płaszczyźnie poziomej, należeć będzie do poziomego rzutu tegoż przecięcia się: a ponieważ i punkt B pierwszy znale-

ziony do tego samego rzutu należy; jest przeto oznaczony poziomy rzut wzajemnego przecięcia się dwóch płaszczyzn danych.

Podobną drogą znaleźlibyśmy $B'A'$ rzut pionowy przecięcia się szukanego.

ZAGADNIENIE VII.

Przez punkt dany poprowadzić płaszczyznę równoległą do płaszczyzny danej.

Fig. 7. Niech BX będzie śladem poziomym, $B'X$ śladem pionowym płaszczyzny danej, A rzutem poziomym, A' rzutem pionowym punktu danego.

Dla wykreślenia poziomego śladu płaszczyzny żądanej, prowadzi się przez dany punkt (AA') równoległa do śladu pionowego $B'X$ płaszczyzny danej (Zagad. IV.), i naznacza się punkt przecięcia D tej l. prostej z płaszczyzną poziomą.

Ta równoległa będzie całkiem leżeć na płaszczyźnie szukaney i spotka płaszczyznę poziomą w punkcie D należącym do poziomego śladu żądanej płaszczyzny.

Przez punkt znaleziony D prowadzi się DY równoległa do poziomego śladu BX płaszczyzny danej; ta równoległa będzie śladem poziomym płaszczyzny żądanej.

Kiedy bowiem dwie płaszczyzny mają być równoległe, ich ślady równoległemi być powinny.

Podobnym sposobem wykreśli się linia $D'Y$ równoległa do pionowego śladu danej

płaszczyzny wyrażająca ślad pionowy płaszczyzny żądanej. Można prościej ten ostatni ślad otrzymać, prowadząc, przez punkt Y wzajemnego zbieżenia się poziomego śladu DY płaszczyzny żądanej z osią rzutu, linią YD' równoległą do śladu pionowego XB' płaszczyzny danej.

ZAGADNIENIE VIII.

Płaszczyznę daną i punkt na niej będący położyć na iedney z płaszczyzn rzutowych (a).

Niech AX będzie śladem poziomym, $A'X$ śladem pionowym płaszczyzny danej, B rzutem poziomym, B' rzutem pionowym punktu danego.

Zalóżmy sobie położyć na płaszczyznę pionową daną płaszczyznę obracającą około śladu pionowego $A'X$. Przez rzut piono-

(a) Kiedy punkt dany znajduje się na płaszczyźnie także danej, poprowadzona przez ten punkt równoległa do iednego ze śladów płaszczyzny danej spotyka płaszczyznę rzutu na której się drugi ślad znajduje w punkcie do tego śladu należącym. Mając przeto daną płaszczyznę i chcąc obrócić punkt na niej leżący, następujące robi się wykreślenie:

Obiera się dowolnie na płaszczyźnie np. poziomej punkt i ten się uważa za rzut poziomy punktu szukanego. Przez ten punkt prowadzi się równoległa do poziomego śladu płaszczyzny danej.

Z punktu, w którym ta równoległa spotyka oś rzutu, wyprowadza się na płaszczyźnie pionowej prostopadła do osi. Przez punkt przecięcia się poprowadzonej prostopadłej ze śladem pionowym prowadzi się równoległa do osi rzutu. Przez obrany rzut poziomy prowadzi się prostopadła do osi rzutu; punkt w którym ta prostopadła schodzi się z równoległą do osi rzutu na płaszczyźnie pionowej nakreślona będzie rzutem pionowym punktu żadanego.

wy B' punktu danego prowadzi się prostopadła B'a' do pionowego śladu A'x płaszczyzny daney.

Rzut pionowy B' punktu danego, sam punkt dany i kład jego (b) leżąc będą na płaszczyźnie prostopadłej do pionowego śladu płaszczyzny daney; kład przeto punktu danego znajdować się powinien na jednym z punktów śladu pionowego tej nowej płaszczyzny; tym zaś śladem jest linia B'a'.

Kręśli się rzeczywista długość (Zagad. III.) l. prostej zawartej między punktem danym i punktem a' w którym prostopadła B'a' spotyka ślad pionowy A'X płaszczyzny daney. Niech tę długość wyraża l. prosta a'c'.

Na prostopadłej B'a' do pionowego śladu A'X, bierze się część a'b' od tego śladu poczynając się, równa długości a'c'; tym sposobem naznacza się punkt b', który jest punktem szukanym.

Kład punktu powinien się zawsze znajdować w jednakiej odległości od jakiegokolwiek punktu śladu pionowego płaszczyzny daney, a zatem i od punktu a'.

Taką samą drogą postępować należy chcąc położyć płaszczyznę daną na płaszczyznę poziomą.

(b) Kiedy z dwóch płaszczyzn z sobą się przecinających jedną obracając około wspólnego przecięcia się będziemy nachylać i przykładac do płaszczyzny drugiej, to działanie nosisz będzie nazwisko *kładzenia* płaszczyzny pierwszej na płaszczyznę drugą. Jeżeli na pierwszej z nich znajdować się będą punkta albo linie które za iey pomocą na drugą się płaszczyznę przenoszą, bierze ona podówczas imię płaszczyzny *kładzącej* te punkta i linie. Punkta i linie na płaszczyźnie drugiej położone które są takby piętna zostawione na niej od punktów i linii znajdujących się na płaszczyźnie kładzącej zowią się *kladami* tych ostatnich (N. T.).

ZASTOSOWANIA.

ZASTOSOWANIE I.

Poprowadzić płaszczyznę przez dwie dane l. proste z sobą się przecinające.

Dla wykreślenia poziomego śladu żądanej płaszczyzny, naznaczaia się punkta w których dwie dane l. proste spotykają płaszczyznę poziomą. L. prosta łącząca te punkta będzie śladem żądanym.

Dane l. proste leżą na płaszczyźnie szukaney, na niey więc znajdować się muszą i punkta w których one przecinają płaszczyznę poziomą.

Podobne wykreślenie naznaczy ślad pionowy.

ZASTOSOWANIE II.

Wykreślić płaszczyznę przez dane trzy punkta przechodzącą.

Dwa którekolwiek punkta łączą się z sobą l. prostą. Prowadzi się druga l. prosta przez punkt pozostały i jeden z pierwszych. Przez te dwie linie przeprowadza się płaszczyzna (Zastos. I.) która będzie płaszczyzną żadaną.

Ta płaszczyzna przechodząc przez dwie l. pro-

ste na których się trzy punkta dane znajdują, tém samém przez te trzy punkta przechodzi.

ZASTOSOWANIE III.

Mając daną płaszczyznę i na niej l. prostą, położyć tę płaszczyznę na iedney z płaszczyzn rzutu (c).

Chcąc położyć na płaszczyznę poziomą, obieraia się na daney l. prostej dwa punkta i kładzie się płaszczyzna dana z temi dwoma punktami na płaszczyznę poziomą: l. prosta łącząca kłady punktów będzie kładem szukanym l. prostej daney.

ZASTOSOWANIE IV.

Wykreślić trójkąt któregoby wierzchołkami były trzy punkta dane.

Rozwiązanie pierwsze.

Kreśli się prawdziwa długość (Zagad. III.) l. prostych łączących trzy punkta dane. Temi długościami zawiera się trójkąt który będzie trójkątem żądanym.

Drugie rozwiązanie.

Przez trzy dane punkta prowadzi się

(c) Kład l. prostej na płaszczyźnie pionowej powinien przechodzić przez punkt w którym pionowy rzut daney l. prostej spotyka ślad pionowy płaszczyzny daney, albowiem w kładzeniu l. prostej ten punkt jest stały.

płaszczyzna (Zastos. II.) Ta z trzema na niej punktami kładzie się na iedną z płaszczyzn rzutu. Kłady punktów połączysz l. prostemi otrzyma się trójkąt żądany.

ZASTOSOWANIE V.

Wykreślić kąt zawarty dwiema l. prostemi danemi.

Rozwiązanie pierwsze.

Bierze się po iednym punkcie na każdej z l. prostych danych i rysuje się trójkąt mający za wierzchołki punkta obrane i punkt przecięcia się l. prostych danych (Zast. IV.). W tym trójkącie kąt którego wierzchołek jest w punkcie zeyścia się l. prostych danych będzie kątem szukanym.

Drugie rozwiązanie.

Przez dwie linie dane prowadzi się płaszczyzna (Zastos. I.). Ta płaszczyzna z liniami na niej będącemi kładnie się na iedney z płaszczyzn rzutowych (Zastos. III). Kąt między kładami danych l. prostych zawarty będzie równy kątowi w przestrzeni.

Jeżeli się linie dane nie przecinaia, wtedy z punktu na iedney z nich wziętego prowadzi się równoległą do drugiej, a tym sposobem rozwiązanie zagadnienia na ten przypadek przywodzi się do wykreślenia poprzedzającego; bo zrysowaw-

szy kąt obeymujący się linią poprowadzoną i linią daną z nią się schodzącą, ten równy będzie pochyłości l. prostych danych.

ZASTOSOWANIE VI.

Przez l. prostą daną poprowadzić płaszczyznę równoległą względem drugiej l. prostey daney.

Przez punkt wzięty na pierwszej l. prostey daney prowadzi się równoległa do drugiej.

Przez linią poprowadzoną i przez pierwszą z danych przesuwą się płaszczyzna (Zastos. I.); będzie ona płaszczyzną żadaną.

Ta albowiem płaszczyzna przechodzi przez l. prostą daną, a mając na sobie linią równoległą do drugiej daney l. prostey jest także do niej równoległą.

ZAGADNIENIE VII.

Przez punkt dany poprowadzić płaszczyznę równoległą do dwóch l. prostych danych.

Przez punkt dany prowadzą się l. proste równoległe do dwóch l. prostych danych. Przez te dwie równoległe przeprowadza się płaszczyzna, i ta będzie płaszczyzną żadaną.

Przechodzi ona albowiem przez punkt dany, i mając na sobie dwie równoległe do dwóch l. prostych danych jest też sama do nich równoległą.

ZASTOSOWANIE VIII.

Naznaczyć punkt przecięcia się płaszczyzny daney z l. prostą daną.

Bierze się punkt na l. prostey daney. Przez linią poziomą ten punkt rzucającą i linią daną prowadzi się płaszczyzna (Zastos. I.) która będzie płaszczyzną poziomą rzucającą l. prostą daną.

Kręśli się linią przecięcia tej płaszczyzny od płaszczyzny daney; punkt spotkania się tej linii z l. prostą daną będzie punktem szukanym.

Te dwie linie na iedney leżąc płaszczyźnie przeczną się, a punkt ich wspólny należąc razem i do linii daney i do daney płaszczyzny wyrażać będzie przecięcie szukane.

ZASTOSOWANIE IX.

Przez punkt dany poprowadzić płaszczyznę prostopadłą do l. prostey daney.

Przez punkt iakikolwiek wzięty na osi rzutu prowadzą się na rzutowych płaszczyznach linie prostopadłe do rzutów daney l. prostey; te linie będą śladami płaszczyzny prostopadłej do linii daney.

Kiedy rzuty linii daney są prostopadłe do śladów tej płaszczyzny, będzie też sama linią dana do niej prostopadłą, i nawzajem ta płaszczyzna będzie prostopadłą do linii daney.

Do tej płaszczyzny równoległa przez

punkt dany poprowadzona będzie płaszczyzną żadaną.

Ostatnia albowiem płaszczyzna przechodzi przez punkt dany, i będąc równoległą z płaszczyzną prostopadłą do linii daney, jest także do niej prostopadłą.

ZASTOSOWANIE X.

Przez punkt dany poprowadzić prostopadłą do l. prostej daney.

Przez punkt dany prowadzi się płaszczyzna prostopadła do l. prostej daney (Zastos. IX.). Naznacza się punkt w którym ta płaszczyzna przecina l. prostą daną (Zastos. VIII.). Kreśli się l. prosta przez ten punkt przecięcia i punkt dany przechodząca: ta linia będzie prostopadłą żadaną.

Ta bowiem linia przechodzi przez punkt dany i przecina linią daną, a nawiązując się na płaszczyźnie prostopadłej do tej linii, jest także do niej prostopadłą.

ZASTOSOWANIE XI.

Przez daną l. prostą poprowadzić płaszczyznę prostopadłą do płaszczyzny daney.

Z punktu obranego na daney l. prostej prowadzi się prostopadła do płaszczyzny daney. Przez tę prostopadłą i linią daną przeprowadza się płaszczyzna (Zastos. I.); będzie ona płaszczyzną żadaną.

Mieści albowiem na sobie tą płaszczyzną linią daną, a przechodząc przez linią prostopadłą do daney płaszczyzny, jest także do niej prostopadłą.

ZASTOSOWANIE XII.

Wykreślić kąt zawarty między l. prostą daną i daną płaszczyzną.

Rozwiązanie pierwsze.

Z punktu dowolnie obranego na daney l. prostej prowadzi się prostopadła do płaszczyzny daney. Kreśli się kąt zawarty między tą prostopadłą i daną l. prostą; ten kąt będzie dopełnieniem żadanego.

Ten bowiem kąt jest jednym z kątów ostrych trójkąta prostokątnego, którego wierzchołkami są 1^o punkt wzięty dowolnie na linii daney. 2^o koniec prostopadłej na płaszczyznę daną z tego punktu idącej. 3^o punkt przecięcia się linii daney z daną płaszczyzną; powiększony więc kątem szukanym wyrównywa kątowi prostemu.

Drugie rozwiązanie.

Prowadzi się przez linią daną płaszczyzna prostopadła do płaszczyzny daney (Zastos. XI).

Naznacza się wzajemne tych dwóch płaszczyzn przecięcie. Kreśli się kąt między tém przecięciem a linią daną zawarty, i ten będzie kątem żadanym.

ZASTOSOWANIE XIII.

Wykreślić kąt dwóch płaszczyzn danych.

Wykreśla się linia wzajemnego danych płaszczyzn przecięcia.

Przez punkt na tej linii wzięty prowadzi się płaszczyzna do niej prostopadła (Zastos. IX.).

Kreśla się linie przecięcia płaszczyzny poprowadzonej od płaszczyzn danych.

Rysuje się kąt temi liniami zawarty, który będzie kątem płaszczyzn podanych.

Te bowiem linie są na płaszczyznach danych prostopadłe do ich przecięcia się, obejmują więc kąt który jest kątem tych płaszczyzn.

ZASTOSOWANIE XIV.

Wykreślić najmniejszą odległość dwóch l. prostych danych.

Najkrótsza odległość dwóch l. prostych z sobą się nieprzecinających jest l. prosta do obu razem prostopadła. Dla znalezienia tej linii:

Przez punkt wzięty na jednej z l. prostych danych prowadzi się równoległa do drugiej.

Przez tę równoległą i przez pierwszą linią daną przeprowadza się płaszczyzna (Zastos. I.).

Przez drugą z linii danych prowadzi

się płaszczyzna prostopadła do płaszczyzny poprzedzającej (Zastos. XI.).

Naznacza się punkt przecięcia płaszczyzny prostopadłej z pierwszą linią daną (Zastos. VIII.).

Z tego punktu wyprowadza się prostopadła do płaszczyzny przechodzącej przez daną linią pierwszą i przez równoległą do drugiej linii danej. Ta prostopadła będzie najkrótszą odległością szukaną.

Przechodzi ona albowiem przez punkt pierwszej linii danej, a będąc prostopadłą do płaszczyzny, na której się ta linia znajduje, jest też i do niej prostopadłą.

Nadto ta prostopadła leżąc na płaszczyźnie przechodzącej przez drugą linią daną prostopadłej do płaszczyzny na której się pierwsza linia znajduje, musi drugą linią daną przecinać; musi zaś ją przecinać pod kątami prostymi bo jest prostopadłą do płaszczyzny na której leży do niej równoległa.

Znaleziona więc linia przecina dwie dane i jest do obu prostopadłą.

GEOMETRYI RYSUNKOWEY

XIĘGA DRUGA.

O POWIERZCHNIACH KRZYWYCH.

OPISANIA.

1.

Rzutem poziomym l. krzywey w przestrzeni będącey, iest l. krzywa na płaszczyźnie poziomey, utworzona przez poziome rzuty wszystkich punktów linii pierwszej.

Rzutem pionowym iest l. krzywa podobnie na płaszczyźnie pionowej powstająca.

2.

Wszystkie styczne do powierzchni w jednym iey punkcie leżą na jednej płaszczyźnie zwanej *plaszczyną styczną* (1).

27

3.

Styczna l. krzywey leżącey na iakiey powierzchni iest też styczną i do tey powierzchni.

4.

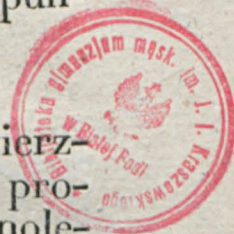
Węgielną powierzchnią iest l. prosta która przechodząc przez punkt tey powierzchni iest prostopadłą do płaszczyzny stycznej w tymże punkcie.

5.

Nazywa się *walcem* powierzchnią utworzoną przez ruch l. prostey, która będąc zawsze równoległą względem l. prostey daney przebiega wszystkie punkta l. krzywey, daney co do wielkości i położenia.

6.

Nazywa się *Ostrokreśm* powierzchnią zrodzoną przez ruch l. prostey, która przechodząc przez punkt stały przebiega wszystkie punkta l. krzywey daney co do wielkości i położenia.



Powierzchnią toczoną zowie się powierzchnia zrodzona przez obrot pewney niezmienney l. krzywey około stałej osi, tak, że każdy punkt linii we wszystkich iey położeniach, jest równie oddalony od punktów osi.

Plaszczyzną południową toczoney powierzchni jest każda płaszczyzna przez iey oś przechodząca.

Walca dwoistego ma imię powierzchni utworzona przez ruch l. prostey, która będąc zawsze równoległą do płaszczyzny daney, przebiega punkta dwóch l. krzywych danych co do wielkości i położenia.

Walcem stycznym daney powierzchni nazywa się walec utworzony przez wszystkie styczne do

tey powierzchni równoległe względem l. prostey daney.

Ostrokreśnięm stycznym daney powierzchni jest ostrokąg utworzony przez wszystkie styczne do tey powierzchni z iednego stałego punktu wychodzące.

L. krzywa na daney powierzchni leżąca która przechodzi przez wszystkie punkta powierzchni wspólne iey z walcem stycznym lub stycznym ostrokreśnięm zowie się *linią dotknięcia*.

Dwie powierzchnie są styczne nawzajem w pewnym punkcie, kiedy mają wspólną płaszczyznę styczną w tym punkcie.

L. krzywe które przez ruch swój dają początek pewney powierz-

chni noszą nazwisko *linii rodzących*.

14.

L. krzywe stałe które służą do kierowania liniami rodzącymi zowią się *kierownicami*.

15.

Plaszczyzny dwoistej ma imię wałek dwoisty którego kierownicami są dwie l. proste.

16.

Plaszczyzna dwoista, któraby, mając tę samą płaszczyznę równoległości z dwoistym wałcem danym, miała za kierownice dwie l. proste styczne do kierownic dwoistego walca w punktach odpowiadających temu samemu położeniu rodzącej, będzie styczną do walca dwoistego we wszystkich punktach tej rodzącej.

TWIERDZENIA POZĄTKOWE.

TWIERDZENIE I.

Plaszczyzna przechodząca przez dwie styczne do tej samej powierzchni w tym samym iey punkcie jest w tymże punkcie styczną do tej powierzchni.

Ponieważ wszystkie styczne w tym samym punkcie do tej samej powierzchni na iednej się znajdują płaszczyźnie, idzie zatem że płaszczyzna przez dwie z nich którekolwiek przechodząca ma na sobie wszystkie inne i jest styczną do powierzchni w tym punkcie.

TWIERDZENIE II.

Jeżeli płaszczyzna jest styczną do powierzchni mającej rodzącą l. prostą, linia rodząca która przechodzi przez punkt dotknięcia leży na płaszczyźnie stycznej.

Linia rodząca która przechodzi przez punkt dotknięcia, jest razem i iedną z linii na powierzchni leżących i styczną do tej powierzchni; iako więc styczna w tym samym punkcie w którym się dotyka pla-

szczyzna musi się całkiem na tej płaszczyźnie znajdować.

TWIERDZENIE III.

Jeżeli dwie l. proste są w tym samym punkcie stycznem do tej samej powierzchni, a przez punkt dotknięcia poprowadzone będą płaszczyzny do nich prostopadłe, przecięcie się tych płaszczyzn będzie węgielną powierzchni.

To przecięcie się będzie prostopadłe razem do dwóch stycznych, będzie więc prostopadłe i do płaszczyzny styczney, a zatem będzie tej powierzchni węgielną.

TWIERDZENIE IV.

Przecięcia walca płaszczyznami równoległymi są l. krzywe równe i mogące przystać do siebie.

To założenie dowiedzione względem dwóch przecięć, będzie już dowiedzione i na wszelką ich liczbę.

Będzie zaś dowiedzione o dwóch przecięciach jeżeli się okaże równość cięciw, które, w dwóch l. krzywych z przecięcia utworzonych, łączą punkta na tych samych liniach rodzących położone: wtedy albowiem wpisawszy w jedno z przecięć iakikolwiek wielokąt, można będzie wpi-

sać w drugie równy mu co do boków i kątów; przykładając do siebie te wielokąty, ich wierzchołki odpowiadające które są punktami linii przecięć zgodzą się z sobą, aże ta własność ma miejsce we wszelkich wielokątach wpisać się w przecięcia mogących, idzie zatem, że i przecięcia same we wszystkich swych punktach do siebie przystaną.

Niech DAC, D'A'C' wyrażają dwa przecięcia równoległe walca CA; DD', AA' ^{Fig. 9.} niech będą jego rodzące; A, A', D, D' punkta w których rodzące spotykają linie przecięć; łączą się te punkta l. prostymi AD, A'D'.

Linie rodzące AA', DD' są równoległe, równoległymi są także płaszczyzny przecięć DAC, D'A'C'; będą przeto cięciwy DA, D'A' równoległe a następnie i równe.

Wniosek I. Stąd wypada, że cięciwy, które w każdej z linii przecięć odpowiadają tym samym rodzącym, obeymują kąty równe, trójkąty albowiem DEA, D'E'A' są sobie równe.

Wniosek II. Styczne AB, A'B' do dwóch przecięć prowadzone przez punkta wzięte na tej samej rodzącej są względem siebie równoległe; bo jeżeli przystają l. krzywe, styczne odpowiadających punktów z sobą zgadzać się muszą.

TWIERDZENIE V.

Plaszczyzna styczna do walca w jednym z punktów rodzącej, jest styczną i we wszystkich iey punktach.

Fig. 9.

Niech będzie walec dany AC' , A punkt dotknięcia, AA' rodząca która przez punkt dotknięcia przechodzi, ABA' płaszczyzna styczna.

Przez punkt A i drugi A' gdziekolwiek wzięty na rodzącej AA' prowadzą się dwie płaszczyzny równoległe ABC , $AB'C'$ które przecinaia walec podług dwóch l. krzywych AC , $A'C'$.

Ponieważ w punkcie A dana płaszczyzna styczna ABA' oprócz rodzącej AA' ma na sobie drugą linią AB' styczną z walcem, musi być przeto i w tym punkcie styczną do walca.

To rozumowanie stosować się może do wszystkich punktów rodzącej AA' ; idzie zatem że płaszczyzna styczna z walcem jest styczną we wszystkich punktach rodzącej przez którą przechodzi.

Wniosek. Stąd wypada że wszystkie węgienne należące do punktów stykania się płaszczyzny z walcem znajdują się na iednej płaszczyźnie prostopadłej na płaszczyznę styczną.

TWIERDZENIE VI.

Przecięcia ostrokągu płaszczyznami równoległemi są l. krzywe podobne.

To twierdzenie dowiedzione względem dwóch przecięć będzie tém samém dowiedzione na każdą ich liczbę.

Niech DBC , $D'B'C'$ wyrażaia dwa prze-
cięcia równoległe ostrokągu ADB . Wy-
stawmy sobie trzy linie rodzące ABB' ,
 ACC' , ADD' które spotykają przecięcia
w punktach B, B', C, C', D, D' i na płaszczyźnie każdego z przecięć połączmy te punkta cięciwami BC , BD , $B'C'$, $B'D'$.

Trójkąty podobne ABC i $AB'C'$, ABD
i $AB'D'$ dadzą proporcycie $\frac{AB}{AB'} = \frac{BD}{B'D'}$,

$$\frac{AB}{AB'} = \frac{BD}{B'D'} \text{ skąd } \frac{BD}{BC} = \frac{B'D'}{B'C'}$$

To rozumowanie, iako odniesione do dwóch rodzących dowolnie wziętych, stosuje się do wszystkich innych: stąd w dwóch równoległych przecięciach wszystkie cięciwy odpowiadające tym samym rodzącym są między sobą w stałym stosunku: iakikolwiek przeto wielokąt będzie wpisany w jedno z przecięć zawsze można wpisać podobny mu w przecięcie drugie; idzie zatem że te dwa przecięcia będą l. krzywe podobne.

Wniosek. Stąd wypada że styczne Cc , Cc' do przecięć równoległych ostrokreśgu, prowadzone przez punkta znajdujące się na tej samej rodzącej, są równoległe; gdyby albowiem jedna z nich Cc' będąc równoległą nie była styczną, byłaby cięciwą, a wtedy nie mogłaby być równoległą tylko do cięciwy sobie odpowiadającej w przecięciu drugim.

TWIERDZENIE VII.

Plaszczyzna styczna z ostrokreśgiem jest styczną we wszystkich punktach rodzącej która przez punkt dotknięcia przechodzi.

Niech będzie ostrokrag dany OAC' , A Fig. 11. punkt dotknięcia, OAB' plaszczyzna styczna, OA rodząca która przez punkt dotknięcia przechodzi.

Przez punkta A i A' prowadzą się dwie plaszczyzny równoległe które przecinaia ostrokrag w l. krzywych AC , $A'C$.

Przez też punkta prowadzą się l. proste AB , $A'B'$ styczne przecięć; te linie będą równoległe, a ponieważ AB leży na plaszczyźnie stycznej $AA'B'$ na niej się też mieścić będzie i linia $A'B$.

Ponieważ w punkcie A' rodzącej danej, dana plaszczyzna styczna ma na sobie i rodzącą i linią $A'B'$ styczną z ostrokreśgiem musi być przeto i w tym punkcie styczną do ostrokreśgu.

To samo rozumowanie może się odnosić do wszystkich punktów rodzącej danej, idzie zatem że plaszczyzna styczna do ostrokreśgu jest styczną we wszystkich punktach rodzącej przez którą przechodzi.

Wniosek. Stąd wypada, że wszystkie węgienne należące do punktów stykania się plaszczyzny z ostrokreśgiem, znajdują się na jednej plaszczyźnie prostopadłej na plaszczyźnie styczną.

TWIERDZENIE VIII.

Kiedy linia rodząca obraca się około osi i tworzy powierzchnię toczoną, każdy iey punkt opisuje koło mające środek na osi i którego plaszczyzna jest do osi prostopadła.

Niech m będzie punktem wziętym na Fig. 12. linii rodzącej, AB osią powierzchni, A i B dwa punkta od upodobania na osi obrane.

Prowadzą się l. proste mA , mB i z punktu m linia mC prostopadła na AB .

Niech m' będzie jedno z położań punktu m w czasie obrotu linii rodzącej; łączy się punkt m' z punktami A , B , C , l. prostymi.

Podług opisanja powierzchni toczonych jest $Am = Am'$, $Bm = Bm'$, zatem trójkąty AmB , $Am'B$ są równe.

Dwa trójkąty AmC $Am'C$, mając bok AC wspólny, $Am = Am'$ i kąt $mAC = m'AC$,

są sobie równe, stąd $m'C$ jest prostopadła do AB i równa mC .

Nie przywiązując się to rozumowanie do żadnego szczególnego położenia punktu m' odnosi się do wszystkich punktów l. krzywey m $m'C$ zakresłoney punktem m' w czasie obrotu linii rodzącej; stąd wypada:

1^{od} Że wszystkie punkta tej l. krzywey są na iedney płaszczyźnie prostopadłej do osi, bo linii mC , $m'C$ są do osi w tym samym punkcie prostopadłe.

2^{re} Że ta l. krzywa jest kołem mającém środek na osi, ta bowiem linia jest płaska i odległości każdego iey punktu od C są równe.

To dowodzenie stosuje się do każdego punktu linii rodzącej, wszystkie przeto iey punkta dowiedziona własność posiadają.

Wniosek. Wszystkie przecięcia powierzchni toczoney przez płaszczyzny do osi prostopadłe są kołami.

Inaczej albowiem, przez punkt spotkania się płaszczyzny przecinającej z linią rodzącą poprowadziwszy koło prostopadłe do osi, byłyby dwie płaszczyzny przez ieden punkt przechodzące prostopadłe do tej samey l. prostej, co jest niepodobieństwem.

TWIERDZENIE IX.

Wszystkie przecięcia powierzchni toczoney przez płaszczyzny południowe są l. krzywe równe i mogące przystać do siebie.

To założenie dowiedzione względem dwóch przecięć będzie już dowiedzione i na każdą ich liczbę.

Niech AB wyraża oś powierzchni; ABX , ABX' dwie iakiekolwiek południowe płaszczyzny; abc , $a'b'c'$ l. krzywe ich przecięcia się z powierzchnią daną. Fig. 15.

L. krzywe będą równe i mogące przystać do siebie, jeżeli, w iedną z nich wpisawszy iakikolwiek wielokąt, można zawsze wpisać iemu równy i podobny w l. krzywą drugą. To zaś wpisanie mogących przystać do siebie wielokątów będzie zawsze podobne do wykonania, jeżeli cięciwy w każdej z l. krzywych odpowiadające tym samym kołom powierzchni pokażą się bydź równe.

Niech d i e będą środki koł aa' , bb' , powierzchni daney; a , b , a' , b' punkta przecięć tym kołom odpowiadające.

Poprowadziwszy na każdej z płaszczyzn południowych promienie da , da' , eb , eb' , czworokąty $abde$, $a'b'de$ będą równe, mają bowiem de bok wspólny, $da = da'$, $eb = eb'$ i kąty ade , bed , $a'de$, $b'ed$, proste, stąd cięciwy ab , $a'b'$ są równe a na-

stępnie równe są l. krzywe abc , $a'b'c'$ i mogą przystać do siebie.

Wniosek I. Wszystkie styczne do różnych przecięć południowych, prowadzone przez punkta odpowiadające temu samemu kołu powierzchni, w ieden się punkt osi zbiegają: kąty bowiem zawarte między każdą z tych stycznych af , df , a promieniami ad , dd , są równe, idzie zatem że trójkąty adf , ddf równe być powinny.

Wniosek II. Dla tej samej przyczyny wszystkie węgielne różnych przecięć południowych, prowadzone przez punkta na tém samym kole powierzchni leżące, zbierają się w ieden punkt osi.

TWIERDZENIE X.

Węgielna któregośkolwiek z przecięć południowych jest także węgielną toczoney powierzchni.

Fig. 14. Niech AB wyraża oś powierzchni, ABX płaszczyznę południową przecinającą, ab l. krzywą przecięcia, bf styczną tej l. krzywey w punkcie b , bc iey węgielną w tymże punkcie, bd koło powierzchni przechodzące przez punkt b , br promień tego koła, be iego styczną w punkcie b .

Płaszczyzna koła rbe jest prostopadłą do osi AB , a zatem i do południowej płaszczyzny ABX .

Na płaszczyźnie koła eb leży styczna eb i jest prostopadłą do promienia br , będzie więc prostopadłą do płaszczyzny południowej a następnie i do węgielnej bc .

Węgielna więc bc jest razem prostopadłą i do stycznej bf i do stycznej be , będzie zatem prostopadłą na płaszczyznę styczną do powierzchni w punkcie b , to jest będzie tej powierzchni węgielną.

Wniosek I. Węgielna powierzchni toczoney jest razem węgielną południowego przecięcia które przez iey koniec przechodzi: inaczej albowiem, poprowadziwszy przez ten koniec węgielną południowego przecięcia, byłyby dwie węgielne toczoney powierzchni w tym samym iey punkcie, to jest dwie prostopadłe do płaszczyzny stycznej z iednego punktu wychodzące, co jest niepodobieństwem.

Wniosek II. Wszystkie węgielne powierzchni toczoney przez oś iey przechodzą.

Każda z tych węgielnych jest razem węgielną południowego przecięcia które przez iey koniec przechodzi, znajdować się więc musi na płaszczyźnie tego przecięcia a zatem oś spotykać.

Wniosek III. Wszystkie węgielne toczoney powierzchni w punktach na tém samym kole położonych w ieden się punkt osi zgromadzaia.

Tę własność posiadają wszystkie węgielne przecięć południowych, a te same linie są węgielnymi powierzchni.

TWIERDZENIE XI.

Linia przecięcia płaszczyzny dwoistej od płaszczyzny równoległej względem iey kierownic jest prosta.

Fig. 15. Niech ABC , $A'B'C'$ wyrażają kierownice płaszczyzny dwoistej podanej, $AA'A''$, $BB'B''$, $CC'C''$ trzy rodzące tej płaszczyzny, $A'aC'$ daną płaszczyznę przecinałą. Trzeba pokazać że punkta A' , B' , C' , leżące na spotkaniu się płaszczyzny przecinałacej z płaszczyzną dwoistą są w l. prostej.

Przez linią rodzącą $CC'C''$ i kierownicę $A'B'C'$ przeprowadza się płaszczyzna Ca $A'C'$ która spotyka płaszczyznę przecinałacą daną w l. prostej aC' . Przez punkt A' prowadzi się l. prosta $A'a$ równoległa względem rodzącej $CC'C''$, przez C linią Cba równoległa do kierownicy $C'B'A''$, łączą się punkta A, a ; przez punkta B, B', A' , prowadzą się do Aa równoległe Bb , $B'b'$, $A'a$ i l. prosta $B'b'b$ przez punkta B' , b' , b przechodząca.

Trzy l. proste $A'a$, $B'b'b$, $C'C'C''$ są równoległe, równie iak trzy linie abC , $ab'C'$, $A'B'C'$, więc $ab = ab'$, $aC = aC'$, $a'a = b'b'$, $A'a = B'b'$; z tej równości i z po-

dobieństwa trójkątów $A'A'a$ i $AA'a$, $B'B'b'$ i $BB'b$ wypada $\frac{Aa}{A'a} = \frac{Bb}{B'b'}$ czyli $\frac{Aa}{Bb} = \frac{A'a}{B'b'}$ trzy zatem punkta A' , B' , C' są w l. prostej.

Wniosek. Stąd wypada że dwoista płaszczyzna może się rodzić dwoiako, albo przez l. proste równoległe do płaszczyzny równoległości, albo też przez linie równoległe do płaszczyzny względem której kierownice są równoległymi.

ZASTOSOWANIA.

ZASTOSOWANIE I.

Mając daną linią rodzącą i kierownicę walca, wykreślić l. krzywą przecięcia tego walca przez którąkolwiek z płaszczyzn rzutowych.

Dla wykreślenia przecięcia z płaszczyzną poziomą:

Obiera się punkt na kierownicy i przez ten prowadzi się równoległą do rodzącej daney.

Naznacza się punkt wzajemnego spotkania się tej równoległej z płaszczyzną poziomą; ten punkt należąc będzie do l. krzywej żądanej.

Poprowadzona równoległa przechodząc przez punkt kierownicy i będąc równoległą do rodzącej daney, będzie także rodzącą danego walca i zupełnie do jego powierzchni przystanie; zatem punkt spotkania się iey z płaszczyzną poziomą należąc będzie razem i do tej płaszczyzny i do walca danego.

L. Krzywa rodząca się z przecięcia walca od płaszczyzny poziomej zowie się *podstawą walca*.

Podobnym się sposobem wykreśla l. krzywa przecięcia walca od płaszczyzny pionowej.

ZASTOSOWANIE II.

Mając daną podstawę walca, linią rodzącą i punkt na jego powierzchni, poprowadzić płaszczyznę styczną do walca w tym punkcie.

Przez punkt dany prowadzi się równoległą do linii daney rodzącej; ta będzie jedną z rodzących.

Przez punkt spotkania się tej drugiey rodzącej z podstawą walca prowadzi się styczna do podstawy.

Ta styczna będzie się znajdować na płaszczyźnie szukaney, bo płaszczyzna styczna powinna być styczną we wszystkich punktach rodzącej przez którą przechodzi.

Przez tę styczną i przez linią rodzącą na której się punkt dany znajduje przeprowadza się płaszczyzna; ta będzie płaszczyzną żadaną.

Przechodząc ta płaszczyzna przez dwie styczne do walca w jednym jego punkcie i sama styczną być musi.

ZASTOSOWANIE III.

Mając daną podstawę walca, linią rodzącą i punkt na jego powierzchni, poprowadzić węgielną walca w tym punkcie.

Przez dany punkt prowadzi się płaszczyzna styczna z walcem (Zastos II.).

Z tego punktu wyprowadza się prostopadła do płaszczyzny stycznej; ta będzie węgielną żadaną.

ZASTOSOWANIE IV.

Przez dany punkt w przestrzeni poprowadzić płaszczyznę styczną z walcem którego podstawa i rodząca są dane.

Przez punkt dany prowadzi się równoległa do rodzącej danej i naznacza się punkt iey przecięcia od płaszczyzny poziomej.

Ta równoległa leżeć będzie na płaszczyźnie szukanej, styczna bowiem płaszczyzna przez iedną z rodzących przechodzić powinna.

Przez ten punkt prowadzi się styczna do podstawy walca.

Będąc ta linia styczną do walca i przechodząc przez l. prostą leżącą na płaszczyźnie szukanej, na niej się sama znaydować musi.

Przez tę styczną i przez linią z punktu danego idącą równoległą do rodzących walca przeprowadza się płaszczyzna; ta będzie płaszczyzną żadaną.

Przechodzi bowiem ta płaszczyzna przez styczną z walcem i przez linią równoległą do iego rodzących, ma więc na sobie rodzącą która przechodzi przez punkt dotknięcia stycznej do podstawy, będzie zatem styczną w ciągu tej rodzącej.

Uwaga. Jeżeli przez punkt przecięcia się płaszczyzny poziomej z linią od punktu danego poprowadzoną równoległą do rodzących, można poprowadzić kilka stycznych do podstawy walca, otrzyma się za pomocą podanego tu sposobu tyleż płaszczyzn stycznych odpowiadających zagadnieniu.

ZASTOSOWANIE V.

Z punktu danego poprowadzić węgielną walca którego podstawa i rodząca są dane.

Dla rozwiązania tego zagadnienia kręśli się l. krzywa utworzona przez końce prostopadłych na rozmaite płaszczyzny styczne z walcem od danego punktu wychodzących.

Dla wykreślenia zaś tej linii:

Prowadzi się przez iedną z rodzących od woli wziętych płaszczyzna styczna do walca (Zastos. II.).

Z punktu danego spuszcza się prostopadła na tę płaszczyznę, i naznacza się iey koniec który będzie iednym z punktów linii szukanej.

To wykreślenie ma się powtarzać tyle razy ile się chce otrzymać punktów żądanej l. krzywej.

Znalezione l. krzywa bierze się za kierownicę nowego walca mającego rodzące równoległe względem rodzących walca danego, i kręśli się podstawa tego walca (Zastos. I.).

Przez punkt spotkania się podstaw dwóch walców prowadzi się wspólna im

rodząca która przetnie kierownicę nowego walca.

Przez ten punkt przecięcia i przez punkt dany przechodząca l. prosta będzie węgielną żadaną.

Ostatni punkt przecięcia znajduje się i na l. krzywej utworzonej przez końce prostopadłych i na powierzchni walca danego; styczna przeto płaszczyzna z walcem w tym punkcie będzie prostopadłą do l. prostej znalezionej; jest to więc linia węgielna danego walca, która, ponieważ przechodzi przez punkt dany, rozwiązuje zagadnienie.

Uwaga. Gdyby podstawa nowego walca spotykała w kilku punktach podstawę walca danego, postępując wskazanym sposobem z każdym z tych punktów, otrzymałoby się tyleż węgielnych na zagadnienie odpowiadających.

ZASTOSOWANIE VI.

Poprowadzić płaszczyznę równoległą względem l. prostej danej styczną do walca którego dane są podstawa i rodzająca.

Przez punkt dowolnie obrany na danej l. prostej prowadzi się równoległą do rodzących walca.

Przez te dwie linie przesuwają się płaszczyzna.

Kreśli się styczna do podstawy walca równoległa względem poziomego śladu tej płaszczyzny; ta styczna będzie śladem poziomym płaszczyzny żadanej.

Ponieważ szukana płaszczyzna powinna być równoległą względem l. prostej danej i musi przechodzić przez jedną z rodzących walca, będzie przeto

równoległą do płaszczyzny przez l. prostą daną równoległą do rodzących poprowadzoną; ślady więc tych płaszczyzn będą równoległe; a ślad poziomy płaszczyzny stycznej powinien nadto być stycznym do podstawy walca danego.

Przez punkt zejścia się tego śladu poziomego z osią rzutu prowadzi się na płaszczyźnie pionowej równoległą do pionowego śladu płaszczyzny przez l. prostą daną wprzód poprowadzonej; ta linia będzie śladem pionowym stycznej płaszczyzny szukanej.

Uwaga. Jeżeli można poprowadzić do podstawy walca danego kilka stycznych równoległych z poziomym śladem płaszczyzny przechodzącej przez l. prostą daną równoległą względem rodzących walca, postępując z każdą z tych stycznych sposobem tu wyłożonym, otrzyma się tyleż płaszczyzn stycznych odpowiadających zagadnieniu.

ZASTOSOWANIE VII.

Poprowadzić równoległą do płaszczyzny danej węgielną walca którego dane są podstawa i rodzająca.

Z punktu dowolnie obranego w przestrzeni spuszcza się prostopadłą do płaszczyzny danej.

Równoległą do tej linii prowadzi się płaszczyznę styczną z walcem (Zastos. VI.).

Przez jeden z punktów położonych na linii rodzącej w ciągu której ta płaszczyzna jest styczną wyprowadza się węgielną walca (Zastos. III.); ta będzie węgielną szukaną.

Ta bowiem węgielna będąc prostopadłą do płaszczyzny stycznej będzie też prostopadłą do l. prostej względem której płaszczyzna styczna jest równolegle poprowadzona, a następnie będzie równoległa do płaszczyzny danej.

Uwaga. Ze wszystkich punktów rodzącej podług której się płaszczyzna dotyka może być poprowadzona węgielna odpowiadająca pytaniu; przeto wszystkie węgielne składające węgielną płaszczyznę, która przez tę rodzącą przechodzi, rozwiązują zagadnienie.

ZASTOSOWANIE VIII.

Mając daną kierownicę i wierzchołek ostrokągu, wykreślić l. krzywą przecięcia tego ostrokągu od którejkolwiek z płaszczyzn rzutowych.

Dla wykreślenia linii przecięcia się z płaszczyzną poziomą, przez punkt obrany na kierownicy i wierzchołek ostrokągu prowadzi się l. prosta; naznacza się punkt iey przecięcia od płaszczyzny poziomej; ten będzie jednym z punktów l. krzywej szukanej.

Poprowadzona bowiem l. prosta przez wierzchołek i jeden z punktów kierownicy jest rodzącą ostrokągu, punkt zaś przecięcia iey przez płaszczyznę poziomą należeć będzie i do ostrokągu i do iey płaszczyzny.

Biorąc na kierownicy więcej punktów i do każdego stosując takie samo wykreślenie otrzyma się tyleż punktów l. krzywej szukanej.

Nazywa się ta l. krzywa *podstawą ostrokągu*.

Podobne wykreślenie prowadzi do otrzymania linii przecięcia ostrokągu od płaszczyzny pionowej.

ZASTOSOWANIE IX.

Przez punkt dany na ostrokągu którego wierzchołek i podstawa są dane poprowadzić płaszczyznę z nim styczną.

Przez punkt dany i wierzchołek ostrokągu prowadzi się rodzącą.

Naznacza się punkt iey spotkania się z podstawą i przezeń prowadzi się styczna do podstawy.

Ta styczna leżeć będzie na płaszczyźnie żądanej; płaszczyzna bowiem styczna dotyka się we wszystkich punktach rodzącej przez którą przechodzi.

Przez tę styczną i przez rodzącą na której się punkt dany znajduje przesuwają się płaszczyzny; ta będzie płaszczyzną żadaną.

Ta płaszczyzna przechodząc przez dwie styczne z ostrokągiem w tym samym punkcie sama też styczną być musi.

ZASTOSOWANIE X.

Przez punkt dany na ostrokřęgu którego wierzchołek i podstawa są dane poprowadzić jego węgelną.

Przez punkt dany prowadzi się płaszczyzna styczna z ostrokřęgiem (Zastos IX.).

Z tegoż punktu wyprowadza się prostopadła do tej płaszczyzny; będzie ona węgelną żadaną.

ZASTOSOWANIE XI.

Przez punkt dany w przestrzeni poprowadzić płaszczyznę styczną z ostrokřęgiem którego wierzchołek i podstawa są dane.

Przez punkt dany i wierzchołek ostrokřęgu prowadzi się l. prosta.

Ta linia będzie leżeć na płaszczyźnie szukaney iako mającey przechodzić przez punkt dany i która powinna mieścić na sobie jedną z rodzących.

Naznacza się punkt przecięcia poprowadzoney l. prostej od płaszczyzny poziomej i przezeń prowadzi się styczna ostrokřęgowej podstawy.

Będąc ta linia styczną z ostrokřęgiem i przechodząc przez jedną z linii położonych na płaszczyźnie szukaney na niej się także znajdować musi.

Przez poprowadzoną styczną i przez l. prostą łączącą punkt dany z wierzchoł-

kiem ostrokřęgu przesuwają się płaszczyzna, która będzie płaszczyzną żadaną.

Ta bowiem płaszczyzna mając na sobie styczną z ostrokřęgiem i jego wierzchołek przechodzi przez linią rodzącą która należy do punktu dotknięcia stycznej z podstawą, musi być przeto styczną ostrokřęgu w ciągu tej rodzącej.

Uwaga. Jeżeli przez punkt spotkania się płaszczyzny poziomej z linią łączącą punkt dany z wierzchołkiem ostrokřęgu, można poprowadzić kilka stycznych do ostrokřęgowej podstawy, otrzyma się tyleż płaszczyzn stycznych rozwiązujących zagadnienie.

ZASTOSOWANIE XII.

Przez punkt dany poprowadzić węgelną ostrokřęgu którego wierzchołek i podstawa są dane.

Dla rozwiązania tego zagadnienia, wykreśla się l. krzywa utworzona przez końce prostopadłych z danego punktu idących na rozmaite płaszczyzny styczne z ostrokřęgiem.

Żeby otrzymać tę l. krzywą:

Przez którąkolwiek rodzącą prowadzi się płaszczyzna styczna z ostrokřęgiem; z danego punktu spuszcza się na nią prostopadła; naznacza się koniec tej prostopadłej który będzie jednym z punktów l. krzywej żadaney.

Powtarzając wielokrotnie to wykreślenie znajdzie się takich punktów liczba upodobana.

Wykreśloną tym sposobem l. krzywą biorąc za kierownicę innego ostrokřęgu

maiącego wspólny wierzchołek z ostrokre-
giem podanym, rysuje się jego podstawa
(Zastos. VII.).

Przez punkt spotkania się podstaw
dwóch ostrokregów prowadzi się wspólna
im rodzająca; naznacza się punkt iey prze-
cięcia od kierownicy nowego ostrokregu;
l. prosta punkt ten z podanym łącząca bę-
dzie węgielną szukaną.

Ostatni punkt przecięcia się leży i na l. krzy-
wey utworzoney przez końce prostopadłych i na
powierzchni ostrokregu danego, zatem płaszczyzna
styczna w tym punkcie z ostrokregiem danym bę-
dzie prostopadłą do l. prostej znalezionej; znalezio-
na więc l. prosta jest węgielną ostrokregu w tym
punkcie, a przechodząc przez punkt dany rozwią-
zuje zagadnienie.

Uwaga. Jeżeliby podstawy ostrokregów danego i nowego
w kilku się punktach przecinały, wypadłoby tyleż węgielnych
odpowiadających pytaniu.

ZASTOSOWANIE XIII.

*Poprowadzić równolegle względem da-
ney l. prostej płaszczyznę styczną
z ostrokregiem którego wierzchołek i
podstawa są dane.*

Przez wierzchołek danego ostrokregu
prowadzi się równoległą względem l. pro-
stej daney.

Przez punkt wzięty na tej równo-
ległej prowadzi się płaszczyzna styczna do
ostrokregu; będzie ona płaszczyzną szukaną.

Ta płaszczyzna będąc styczną z ostrokregiem,
przechodzi przez jego wierzchołek; ponieważ zaś jest
poprowadzona przez jeden z punktów l. prostej
z wierzchołka idącej równolegle względem l. prostej
daney, więc ta linia na niej się znajdować musi,
a następnie płaszczyzna musi być równoległą wzglę-
dem l. prostej daney.

ZASTOSOWANIE XIV.

*Poprowadzić równolegle do płaszczyzny
daney węgielną ostrokregu którego
wierzchołek i podstawa są dane.*

Przez wierzchołek danego ostrokregu
prowadzi się prostopadłą do płaszczyzny
daney.

Równolegle względem tej prostopadłej
prowadzi się płaszczyzna styczna z ostro-
kregiem (Zastos. XIII.).

Ta płaszczyzna przechodząc przez linią prosto-
padłą do płaszczyzny daney jest także do niej pro-
stopadłą.

Z jakiegokolwiek punktu rodzącej przez
którą płaszczyzna styczna przechodzi pro-
wadzi się węgielną ostrokregu; ta będzie
węgielną szukaną.

Ta l. prosta jako prostopadła do płaszczyzny
stycznej prostopadłej na płaszczyznę daną jest od
daney płaszczyzny równoległą.

Uwaga. Ze wszystkich punktów rodzącej położoney w do-
tknięciu poprowadzone węgelne ostrokregu rozwiązuja pytanie;
stąd wszystkie węgelne składające węgielną płaszczyznę która
przez tę rodzącą przechodzi podanemu odpowiadać zagadnieniu.

ZASTOSOWANIE XV.

Mając oś i rodzającą powierzchnię toczony, wykreślić l. krzywą przecięcia iey przez południową płaszczyznę równoległą względem płaszczyzny pionowej.

Nota. Uważa się zawsze oś powierzchni prostopadła do płaszczyzny poziomej. Gdyby nawet inne miała położenie, zawsze się można odnieść do poprzedzającego przypadku używając dwóch płaszczyzn posilkowych, z którychby jedna równoległa do osi zastępowała miejsce pionowej, druga do teyże osi prostopadła miała znaczenie płaszczyzny poziomej.

Przez punkt dowolnie wzięty na linii rodzącej prowadzi się płaszczyzna prostopadła do osi.

Naznacza się przecięcie tey płaszczyzny od płaszczyzny danej i punkt iego spotkania się z osią.

Wykreśla się rzeczywista długość l. prostey która ten punkt z obranym na rodzącej łączy.

Przenosi się ta długość na wzmiankowaną linią przecięcia się dwóch płaszczyzn, tak, aby ieden iey koniec leżał na osi; punkt drugim tey długości końcem naznaczony należeć będzie do l. krzywej szukanej.

Punkt obrany na rodzącej, w czasie iey obrotu zakreśla koło którego płaszczyzna zgadza się z poprowadzoną przez ten punkt prostopadła do osi i którego środek na oś przypada; zatem punkt przecięcia się tego koła z płaszczyzną daną i punkt obrany na rodzącej będą równie odległe od osi; po-

mieniony zaś punkt przecięcia leży na linii spotkania się płaszczyzny danej z płaszczyzną prostopadłą na oś przez punkt obrany przechodzącą.

Obierając coraz inne punkta na rodzącej i to samo powtarzając wykreślenie otrzyma się punktów do l. krzywej żądanej należących liczba upodobana.

Ta l. krzywa nazywa się linią rodzącą *plaską* powierzchni toczony.

ZASTOSOWANIE XVI.

Przez punkt dany na powierzchni toczony, której oś i rodzająca plaska są dane, poprowadzić płaszczyznę styczną do tey powierzchni.

Przez punkt dany i przez oś powierzchni przesuwając się płaszczyzna południowa i do niej wyprowadza się z punktu danego prostopadła; ta prostopadła leżeć będzie na płaszczyźnie żądanej.

Przechodząc ta linia przez punkt powierzchni i będąc prostopadłą do płaszczyzny południowej na której się punkt ten znajduje, będzie styczną do koła powierzchni przez ten punkt przechodzącego, będzie zatem styczną do powierzchni w tymże punkcie, a tém samém znajdować się na płaszczyźnie żądanej.

Dla otrzymania drugiej l. prostey przez którąby szukana płaszczyzna styczna przechodziła, kładnie się płaszczyzna południo-

wa przez punkt dany poprowadzona na płaszczyznę linii rodzącej płaskiej.

Przez kład punktu danego przypadający na rodzącą płaską prowadzi się do niej styczna; punkt zbieżenia się tej stycznej z osią łączy się z punktem danym l. prostą; ta będzie drugą linią na płaszczyźnie szukanej leżącą.

Ponieważ wszystkie przecięcia powierzchni danej przez płaszczyzny południowe są l. krzywe równe, ostatnia więc l. prosta będzie styczną w danym punkcie do przecięcia powierzchni od płaszczyzny południowej na której się punkt ten znajduje, będzie zatem styczną w tym punkcie i do samej powierzchni, a następnie leżeć będzie na płaszczyźnie żądanej.

Mając dwie l. proste znajdujące się na płaszczyźnie szukanej, jeżeli przez nie poprowadzimy płaszczyznę, zagadnienie zostanie rozwiązane.

Ta bowiem płaszczyzna przechodząc przez dwie styczne w tym samym punkcie do powierzchni danej, sama też styczną być musi.

ZASTOSOWANIE XVII.

Przez punkt dany na toczoney powierzchni której oś i rodząca płaska są dane poprowadzić tę powierzchnię węgielną.

Przez punkt dany prowadzi się płaszczyznę południową i z nim się kładnie na płaszczyznę rodzącej płaskiej.

Przez kład danego punktu na rodzącą płaską przypadający prowadzi się tę linię węgielną.

Będzie ona węgielną powierzchni.

Punkt zeyścia się tej węgielnej z osią łączy się z punktem danym l. prostą która będzie węgielną żadaną.

Przechodząc albowiem ta l. prosta przez ten sam punkt osi z węgielną rodzącej płaskiej musi swoim końcem spotykać koło zakreślone przez koniec tej węgielnej a następnie musi być w punkcie danym węgielną powierzchni danej.

Uwaga. Za pomocą tego wykreślenia rozwiązać można przystosowanie poprzedzające, prowadząc naprzód przez punkt dany węgielną powierzchnię, a potem przez tenże punkt płaszczyznę do węgielnej prostopadłą; ta płaszczyzna będzie styczną.

ZASTOSOWANIE XVIII.

Poprowadzić równoległe do l. prostej danej walec styczny z powierzchnią toczoną której oś i rodząca płaska są dane.

Z punktu dowolnie wziętego na rodzącej płaskiej prowadzi się do niej styczna.

Przez punkt wzajemnego przecięcia się tej stycznej z osią i przez koło utworzone punktem wziętym na rodzącej przesuwają się ostrokrag, którego podstawą będzie to samo koło biorąc jego płaszczyznę za poziomą.

Do tego ostrokregu prowadzi się płaszczyzna styczna równoległa względem l.

prostej danej, naznaczając tylko ślad iey poziomy; punkt dotknięcia tego śladu z podstawą ostrokregową jest punktem w którym płaszczyzna styczna z ostrokregiem dotyka się powierzchni.

Ten ostokrąg w ciągu swojej podstawy jest styczny do powierzchni danej, płaszczyzna zatem styczna z ostrokregiem będzie, w punkcie swojego spotkania się z podstawą ostrokregową, styczną do powierzchni.

Przez ten punkt poprowadzona l. prosta równoległa względem danej będzie iedną z rodzących walca szukanego.

Ta l. prosta jest równoległą względem danej, przechodząc zaś przez punkt dotknięcia znajdować się musi na płaszczyźnie stycznej a następnie musi być styczną do powierzchni danej.

Biorąc rozmaite punkta na rodzącej płaskiej i to samo powtarzając wykreślenie, otrzyma się rodzących stycznego walca i punktów l. krzywey dotknięcia liczba upodobana.

ZASTOSOWANIE XIX.

Przez punkt dany w przestrzeni poprowadzić ostokrąg styczny do powierzchni toczoney której oś i rodząca płaska są dane.

Z punktu wziętego dowolnie na rodzącej płaskiej prowadzi się do niej sty-

czna. Przez punkt zeyścia się tej stycznej z osią i przez koło zakreślone punktem wziętym na rodzącej płaskiej przesuwając się ostokrąg, którego podstawą będzie to samo koło biorąc iego płaszczyznę za poziomą.

Przez punkt dany prowadzi się płaszczyzna styczna z ostrokregiem, kreśląc tylko ślad iey poziomy; punkt dotknięcia tego śladu z podstawą ostrokregową jest punktem w którym płaszczyzna dotykająca się ostrokregu jest styczną do powierzchni.

Ten ostokrąg w ciągu swojej podstawy jest styczny do powierzchni danej, płaszczyzna więc styczna z ostrokregiem będzie, w punkcie swojego zeyścia się z podstawą ostrokregu, styczną do powierzchni.

Przez ten punkt i przez punkt dany poprowadzona l. prosta będzie iedną z rodzących ostrokregu szukanego.

Ta l. prosta leży na płaszczyźnie stycznej bo przez dwa iey punkta przechodzi; a ponieważ przechodzi przez punkt dotknięcia tej płaszczyzny z powierzchnią, więc i sama do tejże powierzchni styczną być musi.

Biorąc odmienne coraz punkta rodzącej płaskiej i to samo powtarzając wykreślenie, otrzyma się linii rodzących stycznego ostrokregu i punktów l. krzywey dotknięcia liczba upodobana.

ZASTOSOWANIE XX.

Poprowadzić przez l. prostą daną płaszczyznę styczną do toczoney powierzchni której oś i rodząca płaska są dane (2).

Rozwiązanie pierwsze.

Równolegle do l. prostej danej prowadzi się wałek styczny z daną powierzchnią (Zastos. XVIII.).

Przez punkt danej l. prostej prowadzi się do tego wałka płaszczyzna styczna; będzie ona płaszczyzną żadaną.

Ta płaszczyzna dotykając się stycznego wałka będzie też styczną do powierzchni danej, a ponieważ przechodzi przez ieden z punktów danej l. prostej, będzie mieć na sobie całą tę linią jako równoległą do rodzących stycznego wałka.

Drugie rozwiązanie.

Przez punkt wzięty na danej l. prostej prowadzi się ostrokrag styczny do powierzchni danej (Zastos. XIX.), i wykreśla się l. krzywa dotknięcia.

Przez inny punkt l. prostej danej prowadzi się drugi ostrokrag styczny z powierzchnią daną i kreśli się l. krzywa iego dotknięcia.

Przez punkt przecięcia się tych dwóch l. krzywych i przez wierzchołki ostrokragów prowadzą się ich rodzące, przez nie

przesuwa się płaszczyzna, a ta będzie płaszczyzną styczną szukaną.

Te dwie rodzące są styczne do powierzchni danej, więc i płaszczyzna która przez nie przechodzi będzie także styczną do danej powierzchni: przechodzić zaś będzie ta płaszczyzna przez l. prostą daną, gdyż dwa iey punkta na sobie mieści.

Uwaga. Jeżeli l. krzywe dotknięcia w kilku się punktach przecinają, będzie tyleż płaszczyzn stycznych na zagadnienie odpowiadających.

ZASTOSOWANIE XXI.

Przez punkt dany w przestrzeni poprowadzić węgielną powierzchnię toczoney której oś i rodząca płaska są dane.

Przez punkt dany prowadzi się płaszczyzna południowa i kładnie się na płaszczyznę rodzącey płaskiey.

Przez kład na rodzącey płaskiey danego punktu prowadzi się iey węgielna. Punkt zbieżenia się tej węgielney z osią łączy się z danym l. prostą która będzie węgielną szukaną.

* Ta bowiem węgielna i węgielna rodzącey płaskiey są rodzącemi ostrokregu prostego którego osią jest oś powierzchni; koło zaś przecięcia się tego ostrokregu z powierzchnią jest to które zakreśla swoim końcem węgielna rodzącey płaskiey.

Chcąc otrzymać punkt w którym znaleziona węgielna spotyka powierzchnią daną, przez koniec węgielney linii rodzącey płaskiey prowadzi się płaszczyzna prosto-



padła do osi, naznacza się przecięcie tej płaszczyzny od znalezionej węgielnej, a to przecięcie będzie punktem szukanym.

Uwaga. Jeżeli przez kład na rodzącej płaskiej punktu danego można kilka iey węgielnych poprowadzić, otrzyma się tyleż węgielnych toczoney powierzchni odpowiadających pytaniu.

ZASTOSOWANIE XXII.

Poprowadzić równoległe do l. prostej daney węgielną powierzchni toczoney której oś i rodząca płaska są dane.

Przez punkt wzięty na osi prowadzi się równoległa do l. prostej daney; wykreśla się płaszczyzna południowa przez te dwie l. proste przechodząca; ta płaszczyzna z l. prostą daną na niey będącą kładnie się na płaszczyznę rodzącej płaskiej.

Równoległe względem kładu l. prostej daney prowadzi się węgielna rodzącej płaskiej; przez punkt w którym ta węgielna zbiega się z osią prowadzi się równoległa do l. prostej daney; będzie ona węgielną szukaną.

Ta równoległa i węgielna rodzącej płaskiej przechodzą przez ten sam punkt osi i przez to samo koło powierzchni.

Chcąc otrzymać punkt w którym znaleziona węgielna spotyka powierzchnią daną, przez koniec węgielnej linii rodzącej płaskiej prowadzi się płaszczyzna prostopadła do osi i naznacza się punkt prze-

cięcia tej płaszczyzny ze znalezionej węgielną, który będzie punktem żądanym.

Ta płaszczyzna jest płaszczyzną koła powierzchni przez które znaleziona węgielna przechodzi, a punkt przecięcia się tej linii z kołem jest właśnie punktem powierzchni w którym ona jest węgielną.

Uwaga. Jeżeli, równoległe względem kładu l. prostej daney, można poprowadzić kilka węgielnych rodzącej płaskiej, postępując z każdą z nich sposobem tu wyłożonym, otrzyma się tyleż węgielnych toczoney powierzchni rozwiązujących zagadnienie.

ZASTOSOWANIE XXIII.

Równoległe względem płaszczyzny daney poprowadzić płaszczyznę styczną do toczoney powierzchni której oś i rodząca płaska są dane.

Obiera się punkt na osi i przezeń prowadzi się linią prostopadłą do płaszczyzny daney.

Równoległe względem tej linii prowadzi się węgielna daney powierzchni (Zastos. XXII.), i koniec się iey naznacza.

Przez ten koniec prowadzi się płaszczyzna do węgielnej prostopadła; będzie ona płaszczyzną styczną szukaną.

Ta płaszczyzna będąc prostopadłą do węgielnej i przez iey koniec przechodząc jest styczną do powierzchni daney; nadto ta płaszczyzna jest równoległą względem daney, obiedwie albowiem są prostopadłe do tej samej l. prostej.

ZASTOSOWANIE XXIV.

Mając dany punkt na iedney z kierownic dwoistego walca danego, wykreślić rodzającą która przez punkt ten przechodzi.

Nota. W następujących przystosowaniach uważa się zawsze płaszczyzna równoległości dwoistego walca prostopadła do płaszczyzny poziomey. Gdyby nawet inne miała położenie, przynajmniej zawsze można pytać do przypadku poprzedzającego używając, na miejsce poziomey płaszczyzny, płaszczyzny prostopadłej na płaszczyznę równoległości.

Przez punkt dany prowadzi się płaszczyzna równoległa względem daney płaszczyzny równoległości; naznacza się punkt iey spotkania się z kierownicą drugą danego walca; przez ten punkt i przez dany prowadzi się l. prosta która będzie rodzającą żadaną.

Ta l. prosta przechodzi przez obie kierownice dwoistego walca danego, a znajdując się na płaszczyźnie równoległej względem płaszczyzny równoległości będzie także od niej równoległą.

ZASTOSOWANIE XXV.

Wykreślić l. krzywą przecięcia dwoistego walca danego od płaszczyzny równoległej względem płaszczyzny poziomey.

Przez punkt wzięty na iedney z kierownic walca danego prowadzi się iego rodzająca (Zastos. XXIV.).

Naznacza się punkt przecięcia się tej

rodzacej z płaszczyzną daną; należeć on będzie do l. krzywey szukanej.

Ten punkt będzie wspólny płaszczyźnie daney i daney powierzchni.

Biorąc inne coraz punkta na kierownicy i to samo powtarzając wykreślenie, otrzyma się punktów l. krzywey szukanej liczba upodobana.

Nazywa się ta l. krzywa *kierownicą płaską* dwoistego walca; dwie takie kierownice i płaszczyzna równoległości oznaczają zupełnie walec dwoisty.

ZASTOSOWANIE XXVI.

Wykreślić rodzającą poprzeczną płaszczyzny dwoistej przechodzącą przez punkt dany na tej płaszczyźnie.

Naznacza się punkt przecięcia iedney z kierownic od płaszczyzny równoległości; przezeń prowadzi się rodzająca (Zastos. XXIV.), która będzie leżeć na płaszczyźnie równoległości.

Przez punkt dany prowadzi się płaszczyzna równoległa do kierownic.

Wykreśla się przecięcie tej płaszczyzny od płaszczyzny równoległości i naznacza się punkt w którym to przecięcie spotyka rodzającą poprowadzoną na płaszczyźnie równoległości.

Łączy się ten punkt z danym l. prostą która będzie poprzeczną rodzającą żadaną.

Ta l. prosta ma dwa punkta wspólne z płaszczyzną dwoistą i położona jest na płaszczyźnie względem kierownic równoległej.

ZASTOSOWANIE XXVII.

Mając dwoisty walec dany przez dwie kierownice płaskie i płaszczyznę równoległości, poprowadzić dwoistą płaszczyznę styczną do tego walca podług rodzącej daney.

Przez dwa punkta spotkania się rodzącej daney z kierownicami danego walca dwoistego prowadzą się styczne do tych kierownic; te styczne będą kierownicami dwoistej płaszczyzny żadaney która mieć będzie płaszczyznę równoległości wspólną z walcem podanym.

ZASTOSOWANIE XXVIII.

Przez punkt dany na walcu dwoistym którego dwie kierownice płaskie i płaszczyzna równoległości są dane poprowadzić płaszczyznę styczną do tego walca.

Przez punkt dany prowadzi się rodzającą walca danego.

Kręśli się płaszczyzna dwoista styczna w ciągu tej rodzącej z dwoistym walcem podanym (Zastos. XXVII.).

Naznacza się rodzającą poprzeczną dwoistej płaszczyzny przez punkt dany idącą. Ta l. prosta będzie styczną do walca danego.

Znajduje się albowiem na powierzchni stycznej w punkcie danym z powierzchnią walca danego.

Przez tę linią i przez rodzającą na której się punkt dany znajduje poprowadzoną płaszczyznę będzie płaszczyzną styczną żadaną.

Ta płaszczyzna przejdzie przez dwie l. proste styczne w tym samym punkcie do dwoistego walca danego.

ZASTOSOWANIE XXIX.

Przez punkt dany na walcu dwoistym, którego dwie kierownice płaskie i płaszczyzna równoległości są dane, poprowadzić jego węgielną.

Przez punkt dany prowadzi się płaszczyznę styczną do walca danego (Zastos. XXVIII.).

Z tegoż punktu wyprowadza się prostopadła do płaszczyzny stycznej; ta będzie węgielną żadaną.

ZASTOSOWANIE XXX.

Mając daną płaszczyznę która przechodzi przez daną rodzającą danego walca dwoistego, naznaczyć punkt dotknięcia tej płaszczyzny z walcem dwoistym.

Wykreśla się dwoista płaszczyzna styczna z walcem danym podług rodzającej danej (Zastos. XXVII.).

Kręśli się rodzającą położoną na przecięciu się tej dwoistej płaszczyzny z płaszczyzną równoległości (Zastos. XXIV.).

Naznacza się punkt w którym ta rodzająca spotyka płaszczyznę daną i przezeń prowadzi się rodzającą poprzeczną płaszczyzny dwoistej; punkt przecięcia się tej rodzającej z rodzającą walca danego będzie punktem dotknięcia szukanym.

Rodzająca poprzeczna mając dwa punkta w pólne z płaszczyzną daną cała leży na tej płaszczyźnie; ta więc płaszczyzna przechodzi przez dwie styczne w tym samym punkcie do powierzchni danej, idzie zatem że i sama w tymże punkcie musi być styczną do tej samej powierzchni.

ZASTOSOWANIE XXXI.

Przez punkt dany poprowadzić ostrokąg styczny z walcem dwoistym którego dane są dwie kierownice płaskie i płaszczyzna równoległości.

Przez punkt wzięty dowolnie na iednej

z kierownic płaskich powierzchni danej prowadzi się iey rodzającą (Zastos. XXIV.).

Przez tę rodzającą i przez punkt dany przesuwą się płaszczyzna.

Naznacza się punkt dotknięcia tej płaszczyzny z powierzchnią daną (Zastos. XXX.).

I. prosta ten punkt z punktem danym łącząca będzie iedną z rodzących ostrokregu żadanego.

Ta linia mając dwa punkta wspólne z płaszczyzną styczną cała leży na tej płaszczyźnie, a przechodząc przez punkt dotknięcia jest styczną do walca dwoistego danego.

Powtórzone wielokrotnie to samo wykreślenie da za każdym razem nową rodzającą ostrokregu szukanego i nowy punkt I. krzywey dotknięcia.

ZASTOSOWANIE XXXII.

Przez daną I. prostą poprowadzić płaszczyznę styczną do walca dwoistego, którego dwie kierownice płaskie i płaszczyzna równoległości są dane.

Prowadzi się przez I. prostą daną płaszczyzna prostopadła do pionowej.

Wykreśla się I. krzywa przecięcia od tej płaszczyzny walca danego (Zastos. XXV.). Naznacza się punkt w którym ta I. krzywa spotyka I. prostą daną.

Te dwie linie będą na iedney płaszczyźnie przecina się a punkt ich przecięcia się będzie wspólnym l. prostey daney z powierzchnią daną.

Przez ten punkt prowadzi się rodzająca dwoistego walca danego (Zastos. XXVI.). Przez nią i przez l. prostą daną przesłwa się płaszczyzna; będzie ona płaszczyzną styczną szukaną.

Ta płaszczyzna, mając być styczną do walca dwoistego danego, powinna przechodzić przez iedną z jego rodzących, a ponieważ przechodzi przez l. prostą daną, nie inną więc może mieć na sobie rodzącą tylko tę na której się znajduje punkt spotkania się l. prostey daney z powierzchnią walca danego.

Sposób jakim się naznacza punkt dotknięcia tej płaszczyzny podany jest w przystos. XXX.

Uwaga. Jeżeli l. krzywa przecięcia się dwoistego walca danego z płaszczyzną prostopadłą do pionowej przechodzącą przez daną l. prostą spotyka się z tą ostatnią w kilku punktach, stosując do każdego z nich wskazane wykreślenie, otrzyma się tyleż płaszczyzn stycznych dających odpowiedź zagadnieniu.

ZASTOSOWANIE XXXIII.

Przez punkt dany poprowadzić węgelną dwoistego walca którego są dane dwie kierownice płaskie i płaszczyzna równoległości.

Dla rozwiązania tego zagadnienia, potrzeba wykreślić dwie l. krzywe:

1^{od} Liniją utworzoną przez końce wszy-

stkich prostopadłych na rozmaite rodzające danego walca z danego punktu idących.

Dla iey wykreślenia:

Przez punkt wzięty na iedney z kierownic płaskich prowadzi się rodzająca dwoistego walca danego (Zastos. XXIV.).

Z punktu danego prowadzi się do tej rodzącej prostopadłą; naznacza się iey koniec który będzie iednym z punktów linii szukaney.

Powtarzając wielokrotnie to wykreślenie otrzyma się za każdym razem nowy punkt tej samej l. krzywey.

2^{re} Drugą l. krzywą posilkuiącą w rozwiązaniu terażniejszego zagadnienia jest linia utworzona przez końce prostopadłych z danego punktu prowadzonych na rozmaite płaszczyzny styczne z walcem podanym których punkta dotknięcia leżą na l. krzywey znalezionej.

Ta druga l. krzywa następującym się wykreśla sposobem:

Przez punkt wzięty na pierwszej l. krzywey prowadzi się płaszczyzna styczną do walca danego (Zastos. XXVIII.).

Na tę płaszczyznę z punktu danego spuszcza się prostopadłą i naznacza się iey koniec który będzie punktem l. krzywey szukaney.

Powtarzając to wykreślenie otrzyma się punktów żadaney l. krzywey liczba upodobana.

Dla wykreślenia węgielney szukanej, łączy się punkt przecięcia się dwóch wykreślonych l. krzywych z punktem danym l. prostą; ta będzie węgielną żadaną.

Ta l. prosta w punkcie spotkania się z powierzchnią danego walca będzie prostopadła na płaszczyznę styczną w tym punkcie do tejże powierzchni.

Uwaga. Jeżeli dwie l. krzywe powyżej wykreślone w kilku się punktach przecinają, wypadnie także liczba węgielnych rozwiązujących zagadnienie.

ZASTOSOWANIE XXXIV.

Równolegle względem l. prostej daney poprowadzić walec styczney z walcem dwoistym którego dwie kierownice płaskie i płaszczyzna równoległości są dane.

Przez punkt wzięty na iedney z kierownic płaskich danego dwoistego walca prowadzi się jego rodzająca (Zastos. XXIV.).

Przez tę rodzającą prowadzi się płaszczyzna równoległa względem l. prostej daney; naznacza się punkt iey dotknięcia z walcem danym (Zastos. XXX.).

Przez ten punkt prowadzi się równoległa względem l. prostej daney; ta równoległa będzie iedną z rodzących szukanego walca stycznego.

Ta bowiem linia znayduje się na płaszczyźnie styczney jako równoległej względem l. prostej daney; przechodząc zaś przez punkt dotknięcia jest styczną do walca danego.

Biorąc inne coraz punkta kierownicy i to samo powtarzając wykreślenie, otrzyma się za każdym razem nowa rodzająca stycznego walca i nowy punkt l. krzywey dotknięcia.

ZASTOSOWANIE XXXV.

Równolegle do płaszczyzny daney poprowadzić płaszczyznę styczną z dwoistym walcem którego dwie kierownice płaskie i płaszczyzna równoległości są dane.

Prowadzi się równolegle względem śladu pionowego daney płaszczyzny walec styczney z dwoistym walcem podanym (Zastos. XXXIV.) i wykreśla się l. krzywa dotknięcia.

Prowadzi się podobnież równolegle względem śladu poziomego płaszczyzny daney walec styczney do walca danego i wykreśla się l. krzywa dotknięcia.

Przez punkt w którym się te dwie l. krzywe przecinają prowadzi się rodzająca każdego walca; przez te dwie rodzące poprowadzona płaszczyzna będzie płaszczyzną styczną żadaną.

Ta płaszczyzna będzie styczną do walca dwoistego danego, przechodzi bowiem przez dwie jego styczne w tym samym punkcie; będzie zaś równoległą do płaszczyzny daney bo ma na sobie dwie l. proste do tej płaszczyzny równoległe.

Uwaga. Jeżeliby się dwie l. krzywe dotknęły w kilku przecinały punktach, wypadłoby tyleż płaszczyzn stycznych odpowiadających pytaniu.

ZASTOSOWANIE XXXVI.

Poprowadzić równoległe do l. prostej danej węgelną dwoistego walca którego dwie kierownice płaskie i płaszczyzna równoległości są dane.

Przez punkt dowolnie wzięty prowadzi się płaszczyzna prostopadła do l. prostej danej.

Równoległe względem tej płaszczyzny prowadzi się płaszczyzna styczna do walca dwoistego danego (Zastos. XXXV.).

Z punktu dotknięcia tej płaszczyzny wyprowadza się do niej prostopadła; będzie ona węgelną żadaną.

* Ta l. prosta będąc, w punkcie swojego spotkania się z powierzchnią danego walca, prostopadła do płaszczyzny stycznej jest węgelną, a jako prostopadła do jednej płaszczyzny z l. prostą daną jest od niej równoległa.

GEOMETRYI RYSUNKOWEY

XIĘGA TRZECIA.

O WZAJEMNYCH PRZECIĘCIACH SIĘ POWIERZCHNI I O STYCZNYCH TYCH PRZECIĘC.

ZASTOSOWANIE I.

Mając l. krzywą daną przez przecięcie się dwóch danych powierzchni, z punktu na niej wziętego poprowadzić iey styczną.

Przez punkt dany prowadzą się płaszczyzny styczne do powierzchni danych; wykreśla się l. prosta przecięcia się tych płaszczyzn; ta będzie styczną żadaną.

Szukana styczna mając się dotykać l. krzywej na dwóch powierzchniach leżącej powinna być styczną do każdej z powierzchni w jednym ich punkcie, powinna się przeto znajdować na każdej z płaszczyzn stycznych do powierzchni w tymże punkcie, będzie więc oznaczona przez wzajemne się tych płaszczyzn przecięcie.

ZASTOSOWANIE II.

Z punktu danego poprowadzić styczną do l. krzywej danej przez przecięcie się dwóch danych powierzchni.

Przez dany punkt prowadzą się ostrokręgi styczne do powierzchni danych i na każdej z nich kręśli się l. krzywa dotknięcia.

Punkt spotkania się danej l. krzywej i dwóch linii dotknięcia łączy się z punktem danym l. prostą; ta będzie styczną szukaną.

Ta l. prosta przechodząc przez punkt dany i przez dwie l. krzywe dotknięcia jest rodzącą wspólną obu dwóm ostrokręgom, a ponieważ ma na sobie punkt należący razem i do dwóch l. krzywych dotknięcia i do l. krzywej podanej, jest przeto w tym punkcie styczną do dwóch danych powierzchni a następnie styczną do l. krzywej danej.

Uwaga. Jeżeliby się l. krzywe dotknięcia przecinały w kilku punktach na danej l. krzywej położonych; wypadłoby tyleż stycznych na zagadnienie odpowiadających.

ZASTOSOWANIE III.

Mając l. krzywą daną przez przecięcie się dwóch danych powierzchni, poprowadzić do niej styczną równoległą względem l. prostej danej.

Równolegle względem l. prostej danej prowadzą się walce styczne do powierzchni danych i kręśli się l. krzywe dotknięcia.

Przez punkt wspólny danej l. krzywej i każdej z linii dotknięcia prowadzi się równoległą do l. prostej danej; ta będzie styczną szukaną.

Ta l. prosta będąc równoległą do l. prostej danej i przechodząc przez dwie l. krzywe dotknięcia jest rodzącą wspólną dwóm stycznym walcem, a ponieważ ma na sobie punkt należący razem i do linii dotknięcia i do l. krzywej danej, jest więc w tym punkcie styczną do dwóch danych powierzchni a następnie i do l. krzywej danej.

Uwaga. Jeżeliby dwie l. krzywe dotknięcia w kilku się przecinały punktach na l. krzywej danej, stosując do każdego z nich wskazane wykreślenie, otrzymałoby się tyleż stycznych rozwiązujących zagadnienie.

ZASTOSOWANIE IV.

Mając l. prostą daną i walec dany przez swoją podstawę i rodzącą, naznaczyć ich wspólne przecięcie się.

Przez daną l. prostą prowadzi się płaszczyznę równoległą do rodzących walca danego.

Przez punkt zbieżenia się poziomego iey śladu z podstawą danego walca prowadzi się jego rodzącą.

Ta rodząca będzie cała leżeć na płaszczyźnie poprowadzonej przez l. prostą daną, jest bowiem do tej płaszczyzny równoległa i ma z nią jeden punkt wspólny.

Punkt w którym ta rodząca spotka daną l. prostą jest szukanym punktem przecięcia.

Ten punkt należy razem i do l. prostey daney i do walca danego.

Uwaga. Jeżeli ślad poziomy płaszczyzny poprowadzony przez l. prostą daną w kilku punktach przecina podstawę danego walca, wypadnie tyleż punktów przecięcia się daney l. prostey z walcem danym.

ZASTOSOWANIE V.

Mając daną płaszczyznę i walec dany przez swoją podstawę i rodzającą, wykreślić ich wspólne przecięcie się.

Przez iedną z rodzących dowolnie wziętą na walcu danym prowadzi się płaszczyzna prostopadła do poziomey.

Wykreśla się linia przecięcia tej płaszczyzny od płaszczyzny daney i naznacza się punkt spotkania się tej linii z rodzącą walca który będzie iednym z punktów linii szukaney.

Te dwie l. proste będą na iedney płaszczyźnie przetną się, a punkt ich przecięcia się będzie wspólny i walcowi i płaszczyźnie.

Biorąc coraz inne rodzące i to samo powtarzając wykreślenie, otrzyma się punktów szukaney l. krzywey liczba upodobana.

ZASTOSOWANIE VI.

Mając ostrokrag dany przez swoją podstawę i wierzchołek, naznaczyć jego przecięcie się z l. prostą daną.

Przez l. prostą daną i wierzchołek ostrokregu przeprowadza się płaszczyzna.

Przez punkt spotkania się poziomego iey śladu z ostrokregową podstawą prowadzi się rodzącą ostrokregu.

Będzie się ona znajdować na poprowadzoney płaszczyźnie bo ma z nią dwa punkta wspólne.

Naznacza się punkt zbieżenia się tej rodzącej z l. prostą daną który będzie punktem przecięcia szukany.

Ten punkt jest wspólny l. prostey daney i danemu ostrokregowi.

Uwaga. Jeżeli poziomy ślad płaszczyzny przez l. prostą daną poprowadzoney spotyka w kilku punktach podstawę ostrokregu danego, do każdego z nich wskazane stosując wykreślenie, otrzyma się tyleż punktów dających odpowiedź zagadnieniu.

ZASTOSOWANIE VII.

Mając ostrokrag dany przez swoją podstawę i wierzchołek, wykreślić l. krzywą jego przecięcia od płaszczyzny daney.

Z wierzchołka danego ostrokregu prowadzi się prostopadła na płaszczyznę poziomą.

Przez tę prostopadłą i iedną z rodzących dowolnie wziętą prowadzi się płaszczyzna i wykreśla się linia iey przecięcia od płaszczyzny daney; punkt zeyścia się tej linii z rodzącą ostrokregu należec będzie do l. krzywey szukaney.

Ten punkt jest wspólny danemu ostrokregowi i daney płaszczyźnie.

Biorąc coraz inne rodzaje i to samo powtarzając wykreślenie otrzyma się za każdym razem nowy punkt l. krzywej żądanej.

ZASTOSOWANIE VIII.

Mając powierzchnią toczoną daną przez swoją oś i rodzającą płaską, wykreślić l. krzywą iey przecięcia od płaszczyzny danej.

Przez punkt wzięty na rodzającej płaskiej prowadzi się płaszczyzna prostopadła do osi.

Wykreśla się 1^o koło przecięcia się tej płaszczyzny z powierzchnią daną. 2^o l. prosta przecięcia się tej samej płaszczyzny z płaszczyzną daną; punkta spotkania się tych dwóch przecięć należeć będą do l. krzywej żądanej.

Są one wspólne płaszczyźnie i powierzchni.

Powtarza się to wykreślenie dla otrzymania większej liczby punktów żądanej l. krzywej.

ZASTOSOWANIE IX.

Mając powierzchnią toczoną daną przez swoją oś i rodzającą płaską, naznaczyć iey przecięcie się z l. prostą daną.

Przez daną l. prostą prowadzi się płaszczyzna prostopadła do poziomej. Wy-

kreśla się l. krzywa iey przecięcia się z powierzchnią daną (Zastos. VIII.).

Punkta spotkania się tej l. krzywej z daną l. prostą będą punktami przecięcia szukanymi.

Są one wspólne powierzchni i l. prostej danej.

ZASTOSOWANIE X.

Mając dwoisty walec dany przez swoje dwie kierownice płaskie i płaszczyznę równoległości, wykreślić l. krzywą iego przecięcia się z płaszczyzną daną.

Przez punkt wzięty na jednej z kierownic płaskich prowadzi się rodzająca dwoistego walca danego. Naznacza się punkt iey przecięcia od płaszczyzny danej; ten punkt należeć będzie do szukaney l. krzywej.

Jest on wspólny powierzchni i płaszczyźnie.

Powtarza się to wykreślenie tyle razy ile się ma otrzymać punktów l. krzywej żądanej.

ZASTOSOWANIE XI.

Mając dwoisty walec dany przez dwie swoje kierownice płaskie i płaszczyznę równoległości, naznaczyć iego przecięcie się z l. prostą daną.

Przez l. prostą daną prowadzi się płaszczyzna prostopadła do poziomej. Wy-

kręśla się l. krzywa przecięcia od tej płaszczyzny powierzchni walca danego (Zastos. X.).

Punkta spotkania się tej l. krzywej z l. prostą daną będą punktami przecięcia szukanymi.

Te punkta są wspólne l. prostey i walcowi dwolistemu.

ZASTOSOWANIE XII.

Wykręślić l. krzywą przecięcia się dwóch walców danych przez swoje podstawy i rodzaje.

Przez rodzającą od woli wziętą na iednym walcu danym prowadzi się płaszczyzna równoległa do rodzających walca drugiego.

Przez punkt przecięcia się poziomego śladu tej płaszczyzny z podstawami dwóch walców prowadzą się ich rodzaje; te się będą znajdować na poprowadzoney płaszczyźnie.

Każda z nich bowiem ma ieden punkt wspólny z tą płaszczyzną i iest do niej równoległa.

Naznaczają się punkta przecięć tych rodzających; będą one punktami l. krzywej szukaney.

Te punkta są wspólne dwóm walcom.

Dla znalezienia większey ich liczby, należy to samo powtarzać wykreślenie, biorąc coraz inną rodzającą.

ZASTOSOWANIE XIII.

Wykręślić l. krzywą przecięcia się walca danego przez swoją podstawę i rodzającą z ostrokreśłem którego są dane podstawa i wierzchołek.

Z wierzchołka ostrokreśła prowadzi się równoległa do rodzających walca danego.

Przez tę linię i przez iedną z rodzających ostrokreśła prowadzi się płaszczyzna.

Przez punkta spotkania się poziomego śladu tej płaszczyzny z podstawami ostrokreśła i walca prowadzą się rodzaje tych dwóch powierzchni; będą się one znajdować na poprowadzoney płaszczyźnie.

Rodzające ostrokreśła mają dwa punkta wspólne z tą płaszczyzną; rodzające walca mają punkt ieden i są od niej równoległe.

Punkta zeyścia się rodzających walca z rodzącemi ostrokreśła należeć będą do l. krzywej szukaney.

Będą one punktami wspólnymi ostrokreśła i walca.

Dla otrzymania większey ich liczby należy to samo powtarzać wykreślenie biorąc inną coraz rodzającą ostrokreśła.

ZASTOSOWANIE XIV.

Wykreślić przecięcie się walca danego przez swoją podstawę i rodzającą z powierzchnią toczoną której są dane oś i rodzająca płaska.

Przez punkt wzięty na rodzącej płaskiej prowadzi się płaszczyzna prostopadła do osi.

Wykreśla się koło przecięcia tej płaszczyzny od powierzchni toczoney, a wzięwszy za kierownicę walca mającego rodzące równoległe względem rodzących walca danego, wykreśla się podstawę tego nowego walca, która będzie kołem równem wziętemu za kierownicę.

Przez punkta przecięcia się tej podstawy z podstawą walca danego prowadzą się rodzące dwóm walcom wspólne.

Naznaczają się punkta w których te rodzące spotykają koło kierownicze walca nowego; będą one należeć do l. krzywej przecięcia szukaney.

Te punkta są wspólne walcowi z powierzchnią.

Chcąc otrzymać większą ich liczbę należy to samo powtarzać wykreślenie biorąc inne coraz punkta na rodzącej płaskiej toczoney powierzchni.

ZASTOSOWANIE XV.

Wykreślić l. krzywą przecięcia się walca danego przez swoją podstawę i rodzającą z powierzchnią walca dwoistego którego są dane dwie kierownice płaskie i płaszczyzna równoległości.

Przez punkt wzięty na iedney z kierownic płaskich dwoistego walca prowadzi się jego rodzająca.

Naznaczają się punkta w których ta rodzająca przecina walec podany (Zastos. IV.); te punkta należeć będą do l. krzywej szukaney.

Są one wspólne dwóm powierzchniom danym.

Dla otrzymania większej ich liczby należy to samo powtarzać wykreślenie, biorąc inne coraz punkta kierownicy płaskiej dwoistego walca danego.

ZASTOSOWANIE XVI.

Wykreślić l. krzywą przecięcia się dwóch ostrokęgów danych przez swoje podstawy i wierzchołki.

Przez wierzchołki ostrokęgów prowadzi się l. prosta; przez nią i przez punkt wzięty dowolnie na podstawie któregośkolwiek ostrokęgu przesuwają się płaszczyzny.

Przez punkta przecięcia się poziomego śladu tej płaszczyzny z podstawami ostro-

kręgów prowadzą się ich rodzące; będą one całkiem leżeć na tej płaszczyźnie.

Każda z nich ma dwa punkta wspólne z płaszczyzną.

Punkta wzajemnego przecięcia się tych rodzących należeć będą do l. krzywej żądanej.

Są one wspólne dwóm powierzchniom.

Dla otrzymania większej ich liczby wskazane wykreślenie powtarzać należy.

ZASTOSOWANIE XVII.

Mając ostrokąg dany przez swoją podstawę i wierzchołek, wykreślić l. krzywą jego przecięcia się z powierzchnią toczoną której oś i rodząca płaska są dane.

Przez punkt wzięty na rodzącej płaskiej prowadzi się płaszczyzna prostopadła do osi.

Wykreśla się koło podług którego ta płaszczyzna przecina powierzchnią toczoną, a wzięwszy go za kierownicę ostrokręgu mającego wspólny wierzchołek z ostrokręgiem danym, kreśli się podstawa tego nowego ostrokręgu, która będzie kołem.

Przez punkta przecięcia się podstaw dwóch ostrokręgów prowadzą się wspólne tych powierzchni rodzące.

Naznaczają się punkta w których te rodzące spotykają koło kierownicze ostro-

kręgu nowego; te będą należeć do l. krzywej żądanej.

Będą one wspólne dwóm powierzchniom danym.

Dla otrzymania większej ich liczby, wskazane wykreślenie powtarzać należy.

ZASTOSOWANIE XVIII.

Mając ostrokąg dany przez swoją podstawę i wierzchołek, wykreślić l. krzywą jego przecięcia się z dwoistym walcem którego dane są dwie kierownice płaskie i płaszczyzna równoległości.

Przez punkt wzięty na jednej z kierownic płaskich prowadzi się rodząca dwoistego walca; naznaczają się punkta ich przecięcia się z ostrokręgiem danym (Zastos. VII.); te punkta należeć będą do l. krzywej szukanej.

Są one wspólne dwóm powierzchniom.

Dla otrzymania większej ich liczby to samo wykreślenie powtarzać należy.

ZASTOSOWANIE XIX.

Wykreślić l. krzywą przecięcia się dwóch toczonych powierzchni danych przez swoje osi i rodzące płaskie.

Jeżeli osi obudwóch powierzchni są prostopadłe do płaszczyzny poziomej:

Przez punkt wzięty na jednej z ro-

dających płaskich prowadzi się płaszczyzna prostopadła na osi; kręślą się koła przecięcia się tej płaszczyzny z powierzchniami danymi; punkta w których się z sobą te koła spotykają należeć będą do l. krzywej szukanej.

Będą one wspólne dwóm powierzchniom.

Dla otrzymania większey ich liczby to samo wykreślenie powtarzać należy.

Jeżeli oś jedney tylko powierzchni jest prostopadła do poziomey płaszczyzny:

Przez punkt wzięty na rodzącej płaskiej tej powierzchni prowadzi się płaszczyzna do iey osi prostopadła, i wykreślają się koło przecięcia się teyże powierzchni z poprowadzoną płaszczyzną.

Kręśli się l. krzywa przecięcia się tej samey płaszczyzny z powierzchnią drugą; punkta w których się ta l. krzywa przecina z kołem dopiero wykreślonem należeć będą do l. krzywej żądanej.

Są one wspólne dwóm powierzchniom danym.

Dla otrzymania większey liczby tych punktów, wskazane wykreślenie powtarzać należy.

ZASTOSOWANIE XX.

*Mając powierzchnią toczoną daną przez swoją oś i rodzącą płaską, wykreślić l. krzywą przecięcia się iey z dwoi-
stym walcem którego dane są dwie
kierownice płaskie i płaszczyznę r-
ównoległości.*

Przez punkt wzięty na jedney z kierownic płaskich danego walca prowadzi się iego rodząca.

Naznaczają się punkta w których ta l. prosta przecina powierzchnią toczoną; będą one należeć do l. krzywej szukanej.

Te punkta są wspólne dwóm powierzchniom.

Dla otrzymania większey ich liczby należy to wykreślenie powtarzać.

ZASTOSOWANIE XXI.

*Wykreślić l. krzywą przecięcia się dwóch
walców dwoi-
stych danych przez swoją
kierownice płaskie i płaszczyznę r-
ównoległości.*

Przez punkt wzięty na jedney z kierownic płaskich któregośkolwiek walca prowadzi się iego rodząca.

Naznaczają się punkta w których ta linia przecina się z drugim walcem poda-

nym (Zastos. XII.). Te punkta należeć będą do l. krzywey żądanej.

Są one wspólne dwóm powierzchniom.

Chcąc większą liczbę tych punktów wynaleźć, wskazane wykreślenie powtarzać należy.

PRZYPISKI DO XIĘGI DRUGIEY.

(1) Ten pewnik może się dowieść analitycznie sposobem następującym.

Niech $z = \varphi(x, y)$ wyraża równanie jakiegokolwiek powierzchni; równanie iey różniczkowe będzie $dz = \frac{dz}{dx}dx + \frac{dz}{dy}dy$.

Styczna powierzchni jest styczną do jakiegokolwiek l. krzywey na niey wykreślonej, niech $y = Fx$ będzie równaniem walca podług tej l. krzywey powierzchnią daną przecinającego; równanie różniczkowe tego walca będzie $dy = qdx$.

Jeżeli x', y', z' , są współuszykowanemi punktu l. krzywey przecięcia się wzmiankowanych powierzchni, równania stycznej w tym punkcie do tej l. krzywey będą kształtu $z - z' = A(x - x')$, $y - y' = B(x - x')$, ich zaś równania różniczkowe będą $\frac{dz}{dx} = A$, $\frac{dy}{dx} = B$.

Styczna i dwie przecinające się powierzchnie przechodzą przez punkt dany, równania ich przeto do tego punktu zastosowane będą miały miejsce; będzie zatem: $dz' = \frac{dz'}{dx'}dx' + \frac{dz'}{dy'}dy'$, $dy' = q'dx'$, $\frac{dz'}{dx'} = A$, $\frac{dy'}{dx'} = B$.

Dla otrzymania, z pierwszego z tych równań, wyrażenia różniczki z' przez wzgląd na x' odnoszącego się od uważanej tu l. krzywey, potrzeba na miejsce dy' podstawić iego wartość wziętą ze zrównowania walca; tym sposobem wypadnie $dz' = \frac{dz'}{dx'}dx' + \frac{dz'}{dy'}q'dx' = \left(\frac{dz'}{dx'} + q'\frac{dz'}{dy'}\right)dx'$.

Kiedy w punkcie danym l. prosta ma być styczną do l. krzywey danej a tém samém i do da-

ney powierzchni; stosowane do tego punktu współczynniki różniczkowe, wzięte przez wzgląd na te same zmienne, powinny być równe i w l. krzywey i w l. prostej; powinno być zatem $A = \frac{dz'}{dx'} + q' \frac{dz'}{dy'}$, $B = q'$.

Stąd wynika że zrównania styczney do uważaney tu l. krzywey w jakimkolwiek iey punkcie będą kształtu $z - z' = \left(\frac{dz'}{dx'} + \frac{dz'}{dy'} q' \right) (x - x')$, $y - y' = q' (x - x')$.

W tych zrównaniach wartości x', y', z' , odmiannami swoimi prowadzą po punktach tej samej l. krzywey; wartości q' stosowane do tego samego punktu (x', y', z') przez swoje zmiany przeprowadzają z iedney l. krzywey na drugą; rugując przeto z tych dwóch zrównań ilość q' otrzyma się związek między x, y, z , odnoszący się do wszystkich stycznych w punkcie (x', y', z') iakabykolwiek przezeń l. krzywa przechodziła. Uskuteczniając to rugowanie wy-

pada $q' = \frac{y - y'}{x - x'}$, $z - z' = \left\{ \frac{dz'}{dx'} + \frac{dz'}{dy'} \left(\frac{y - y'}{x - x'} \right) \right\} (x - x')$ albo

$z - z' = \frac{dz'}{dx'} (x - x') + \frac{dz'}{dy'} (y - y')$ zrównanie płaszczyzny

przechodzącej przez punkt dany która będąc miejscem wszystkich stycznych do powierzchni w tym punkcie nosi imię płaszczyzny styczney.

(2) Jeżeliby toczona powierzchnia była kulą, wskazane wykreślenie ogólne dla wszelkich powierzchni toczonych zastąpione być może przez następujące, które się wykonywa bez użycia l. krzywych.

Przez środek kuli prowadzi się płaszczyzna prostopadła do l. prostej danej i naznacza się punkt ich przecięcia się.

Ta płaszczyzna przechodząc przez środek kuli przetnie ją podług koła wielkiego.

Kładą się na iedney z płaszczyzn rzutowych, obracając około śladu na tej płaszczyźnie płaszczyzny poprowadzonej: 1^o płaszczyzna poprowadzona, 2^o koło iey przecięcia się z kulą, 3^o punkt iey przecięcia się z l. prostą daną.

Przez kład punktu prowadzi się styczna do kładu koła.

Odwodzi się koło z punktem dotknięcia na swoje rzeczywiste położenie. Odwiedziony punkt dotknięcia z punktem l. prostej danej wspólnym z poprowadzoną płaszczyzną łączy się l. prostą.

Ta linia będzie styczną do wielkiego koła przecięcia w iego rzeczywistym położeniu.

Przez tę linią i przez daną poprowadzona płaszczyzna będzie płaszczyzną styczną szukaną.

Wystawivszy sobie promień kuli przechodzący przez punkt dotknięcia podniesiony na swoje rzeczywiste położenie, ten promień 1^o będzie prostopadły do styczney, 2^o leżąc na płaszczyźnie prostopadłej do l. prostej danej, będzie też prostopadłym i do tej linii równoległe względem swego położenia na punkt dotknięcia przeniesionej; iako więc prostopadły do dwóch l. prostych przecinających się jest prostopadły do płaszczyzny przez nie idącej, zatem ta płaszczyzna jest styczną do kuli.

Uwaga. Ponieważ przez kład punktu można poprowadzić dwie styczne do kładu koła, stosując zatem do drugiego punktu dotknięcia takie samo wykreślenie otrzyma się druga płaszczyzna styczna na zagadnienie odpowiadająca.

OMYŁKI

strona	wiersz	omyłki	popraw
9	16	linia	l. prosta.
16	2	A'x	A'X
22	18	naydując się	znaydując się
25	17	linia	linia dana
27	1	styczna	styczna do
32	5	styczném	stycznemi
42	29	A'''	A''
72	6	nię	nią
—	20	prezez	przez



Fig. 1.

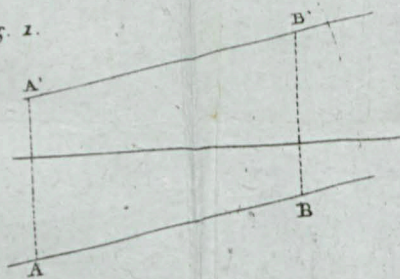


Fig. 2.

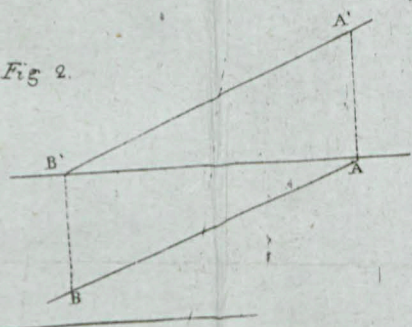


Fig. 3.

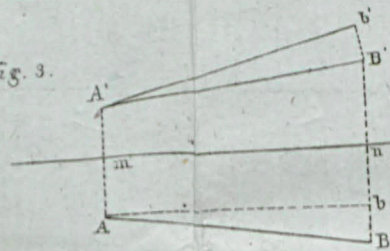


Fig. 4.

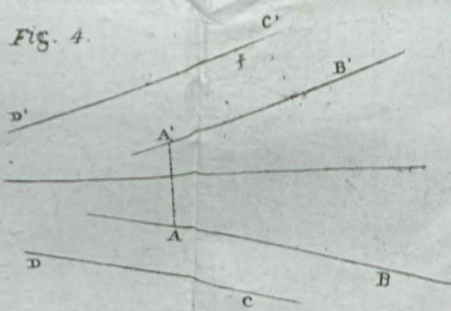


Fig. 5.

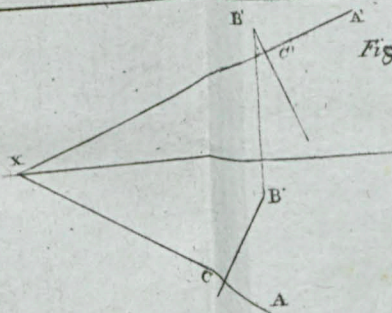


Fig. 6.

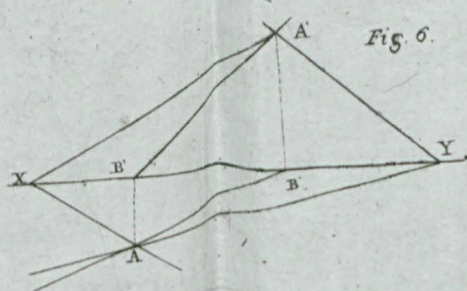


Fig. 7.

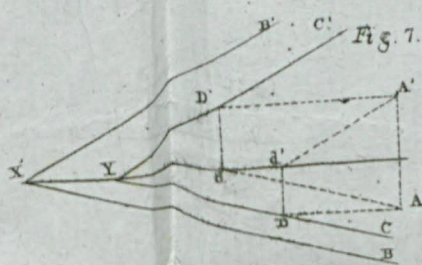


Fig. 8.

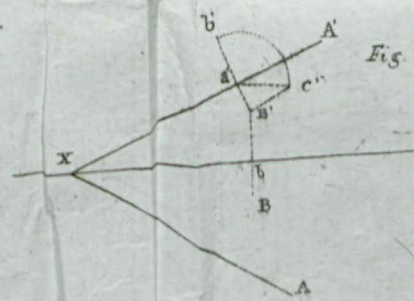


Fig. 9.

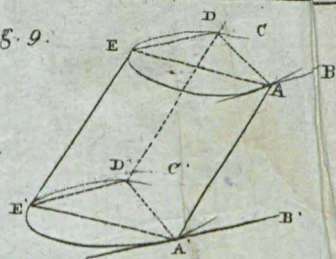


Fig. 11.

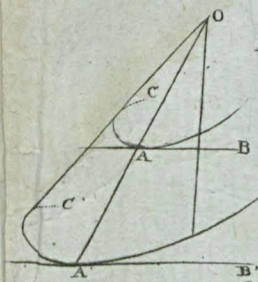


Fig. 10.

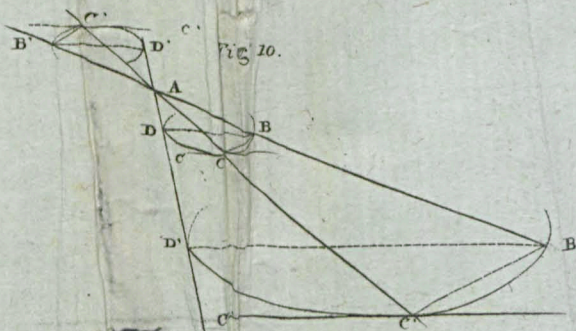


Fig. 12.

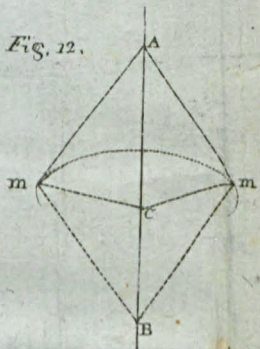


Fig. 13.

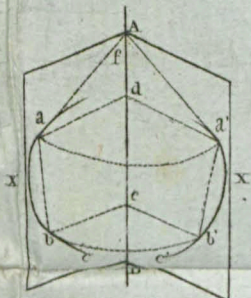


Fig. 14.

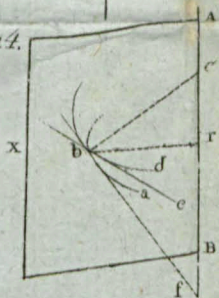


Fig. 15.

